Sur la représentation des fonctions discontinues par les polynomes de M. S. Bernstein.

Par

M. I. Chlodovsky (Moscou).

1°. M. S. Bernstein[1]) a démontré que toute fonction continue $f(x)$ définie sur le segment $[0, 1]$ peut être représentée par une suite de polynomes

$$(1) \qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

qui converge uniformément vers la fonction $f(x)$ dans le segment $[0, 1]$.

Le polynome (1) sera dit *polynome de M. Bernstein*. Nous désignerons par le symbole $P_n[f(x)]$ le polynome de M. Bernstein de degré n, formé pour la fonction $f(x)$

M. S. Bernstein se borne à l'étude des fonctions $f(x)$ *continues*. Nous allons considérer, dans l'article présent, le dévéloppement des fonctions *discontinues* $f(x)$ en séries de polynomes de M. Bernstein.

Les coéfficients du polynome de M. S. Bernstein sont complétement déterminés par les valeurs de la fonction $f(x)$ aux points rationnels. C'est la raison pour laquelle on peut se borner à considérer les valeurs des fonctions $f(x)$ aux points rationnels seuls.

[1]) S. Bernstein: *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le Calcul des probabilités.* (*Communications de la Société Mathématique de Kharkow.* II-me Série, T. XIII, N. 1). V. aussi: R. Adhémar. *Leçons sur les principes d'Analyse*, t. II, Paris 1913. Note de S. Bernstein: „Sur les séries normales" p. 259.

Une démonstration élémentaire du théorème de S. Bernstein a été donnée par W. Sierpiński dans son cours d'Analyse „*Analiza*" t. I. cz. II, p. 231, Varsovie 1925 (en polonais)

2°. Avant d'étudier le cas général d'une fonction $f(x)$ bornée arbitraire, considérons les fonctions $f(x)$ détérminées sur le segment $[0, 1]$, et intégrables au sens de Riemann. Considérons donc une fonction $f(x)$ dont l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle.

Soit $\varphi(x)$ une fonction intégrable au sens de Riemann définie sur le segment $[0, 1]$. Définissons $\varphi(x)$ sur tout l'axe de x de la manière suivante:

$$\varphi(x) = \varphi(0) \quad \text{pour} \quad -\infty < x \leqslant 0$$

et

$$\varphi(x) = \varphi(1) \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant x < +\infty$$

Le polynome de M. S. Bernstein formé pour la fonction $\varphi(x)$

$$P_n[\varphi(x)] = \sum_{k=0}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

peut être remplacé par une intégrale, si n est suffisamment grand.

En effet, nous devons au Calcul des probabilités le resultat suivant: quelque soit le nombre positif ε, il existe un nombre N tel que l'inégalité $n > N$ entraîne

$$(2) \qquad \left| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{h}{n\sqrt{\pi}} e^{-h^2\left(\frac{k}{n}-x\right)^2} \right| < \varepsilon$$

uniformément dans $[0 \leqslant x \leqslant 1]$, où

$$h = \sqrt{\frac{n}{2x(1-x)}}.$$

Par suite nous aurons [1]):

[1]) On trouve un raisonnement analogue dans la démonstration du théorème de Bernoulli où la somme $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ se transforme en l'intégrale $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 t^2} dt.$

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\lim_{h\to\infty}\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\,e^{-h^2t^2}\,dt.$$

Comme l'intégrale

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\,e^{-h^2t^2}\,dt$$

est celle qui intervient dans la démonstration de la proposition célèbre de Weierstrass [1]) sur la représentation d'une fonction continue arbitraire par une série de polynomes uniformément convergente, l'égalité (3) nous donne une démonstration nouvelle du théorème cité de M. S. Bernstein pour les fonctions $f(x)$ continues. Mais il est facile de montrer que dans le cas, où $\varphi(x)$ est intégrable au sens de Riemann, nous aurons [2])

$$\lim_{h\to\infty}\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\,e^{-h^2t^2}\,dt=\tfrac{1}{2}[\varphi(x+0)+\varphi(x-0)].$$

Cette remarque fort simple nous amène au résultat suivant:

La suite des polynomes de M. Bernstein formés pour une fonction $\varphi(x)$ intégrable au sens de Riemann, converge vers la valeur de la fonction $\varphi(x)$ en tous les points de continuité; en un point de discontinuité de première espèce elle converge vers la moyenne arithmétique des valeurs, vers lesquelles $\varphi(x)$ tend quand la variable s'approche du point de discontinuité.

3°. L'étude de la convergence des polynomes de M. Bernstein dans le cas général s'appuie sur le lemme suivant:

Quelque soit la fonction $f(x)$ bornée, la convergence de la suite des polynomes de M. S. Bernstein.

$$P_n[f(x)]=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

dans un intervalle (α,β), $(0<\alpha<\beta<1)$, ne dépend que de la convergence de la somme

[1]) Weierstrass, *Berliner Sitzungsberichte*, 1885.
[2]) Picard, Traité d'Analyse. T. I, Edit. 3, p. 272.

$$\sum_{k=l}^{p}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

où p et l sont définis par les inégalités

$$(4)\quad \frac{l-1}{n}<\alpha\leqslant\frac{l}{n};\qquad \frac{p}{n}\leqslant\beta\leqslant\frac{p+1}{n}.$$

En effet, supposons $f(x)$ positive, ce qui est permis, car on peut toujours lui ajouter une constante convenablement choisie.

Désignons par M la borne supérieure de la fonction $f(x)$ dans les intervalles $(0,\alpha)$, $(\beta,1)$ et définissons une fonction $F(x)$ de la manière suivante:

$F(x)=0$ dans le segment $[\alpha,\beta]$.

$F(x)=M$ dans les semi-segments $[0,\alpha)$ et $(\beta,1]$.

La suite

$$P_n[F(x)]=\sum_{k=0}^{n}F\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}$$

converge dans le segment $[0,1]$, car la fonction $F(x)$ n'a que deux points de discontinuité.

D'après la construction de la fonction $F(x)$, nous aurons:

$$(5)\quad P_n[F(x)]-\left[\sum_{k=0}^{l-1}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=p+1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right]\geqslant 0,$$

où l et p sont détérminés par les inégalités (4).

Puisque $P_n[F(x)]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ dans l'intervalle (α,β), nous aurons

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{l-1}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=p+1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right]=0.$$

C. Q. F. D.

4°. Le lemme demontré permet d'étudier aisément la convergence des polynomes de M. S. Bernstein formés pour une fonction arbitraire $\Phi(x)$ bornée dans le segment $[0,1]$.

Considérons les valeurs de la fonction $\Phi(x)$ dans les points rationnels seuls. Désignons par $(r_1, r_2, \dots r_n, \dots)$ tous les points rationnels, dont les abscisses sont inférieures à l'abscisse d'un point x_0 fixé arbitrairement et par $(\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_n, \dots)$ tous les points rationnels d'abscisses supérieures à l'abscisse de x_0.

Nous dirons que le point x_0 est un *point de discontinuité de première espèce pour les points rationnels* si les valeurs de la fonction $\Phi(x)$ aux deux limites

$$\lim_{r_n \to x_0} \Phi(r_n) = \Phi_R(x-0) \qquad \lim_{\varrho_n \to x_0} \Phi(\varrho_n) = \Phi_R(x+0)$$

existent et sont inégales [1]).

Soit x_0 un point de discontinuité de première espèce pour la fonction $\Phi(x)$. Quelque soit le nombre positif ε, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que les inégalités

$$|\Phi(r_i) - \Phi(r_n)| < \varepsilon, \qquad |\Phi(\varrho_i) - \Phi(\varrho_j)| < \varepsilon$$

ont lieu pour tous les points rationnels des intervalles $(x_0 - \delta, x_0)$ et $(x_0, x_0 + \delta)$.

Désignons par M_r^δ et m_r^δ la borne supérieure et la borne inférieure des valeurs de la fonction $\Phi(x)$ aux points rationnels de l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0)$ et par M_ϱ^δ et m_ϱ^δ la borne supérieure et la borne inférieure dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$.

Introduisons deux fonctions $F_\delta(x)$ et $\varphi_\delta(x)$ définies de la manière suivante:

$F_\delta(x) = 0$ et $\varphi_\delta(x) = 0$ dans les semi-segments $[0, x - \delta]$ et $[x_0 + \delta, 1]$.

$F_\delta(x) = M_r^\delta$ et $\varphi_\delta(x) = m_r^\delta$ dans le segment $[x_0 - \delta, x_0]$.

$F_\delta(x) = M_\varrho^\delta$ et $\varphi_\delta(x) = m_\varrho^\delta$ dans le semi-segment $[x_0, x_0 + \delta]$.

Pour simplifier, supposons la fonction $\Phi(x)$ positive.

Nous-avons:

$$P_n\{\varphi_\delta(x)\} \leqslant P_n\{\Phi(x)\} \leqslant P_n\{F_\delta(x)\} + \eta_n(x)$$

[1]) Nous dirons de même qu'un point x_0 est un point de continuité pour les valeurs de la fonction $\Phi(x)$ aux points rationnels, si les deux limites précédentes existent et sont égales. Nous posons alors

$$\Phi_R(x) = \lim_{r_n \to x_0} \Phi(r_n) = \lim_{\varrho_n \to x_0} \Phi(\varrho_n).$$

où

$$\eta_n(x) = \sum_{k=0}^{l-1} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=p+1}^{n} \Phi\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

l et p étant définis par les inégalités

$$\frac{l-1}{n} < x_0 - \delta \leqslant \frac{l}{n}; \qquad \frac{p}{n} \leqslant x_0 + \delta < \frac{p+1}{n}.$$

D'après le lemme démontré (§ 3), $\eta_n(x)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pour chaque x de l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Il en résulte que la limite supérieure de la suite des polynomes $P_n\{\Phi(x)\}$ satisfait aux inégalités suivantes.

$$\frac{m_r^\delta + m_\varrho^\delta}{2} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} P_n\{\Phi(x)\} \leqslant \frac{M_\varrho^\delta + M_r^\delta}{2}$$

où x appartient à l'intervalle $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

La limite inférieure satisfait de même aux inégalités

$$\frac{m_r^\delta + m_\varrho^\delta}{2} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} P_n\{\Phi(x)\} \leqslant \frac{M_\varrho^\delta + M_r^\delta}{2}.$$

D'ailleurs, nous avons les inégalités suivantes

$$0 < \Phi_R(x_0 - 0) - m_r^\delta \leqslant \varepsilon; \qquad 0 < M_r^\delta - \Phi_R(x_0 - 0) \leqslant \varepsilon$$
$$0 < \Phi_R(x_0 + 0) - m_\varrho^\delta \leqslant \varepsilon \qquad 0 < M_\varrho^\delta - \Phi_R(x_0 + 0) \leqslant \varepsilon;$$

donc il en suit

$$\left|\overline{\lim}\, P_n\{\Phi(x_0)\} - \tfrac{1}{2}\left[\Phi_R(x_0+0) + \Phi_R(x_0-0)\right]\right| \leqslant 2\varepsilon.$$
$$\left|\underline{\lim}\, P_n\{\Phi(x_0)\} - \tfrac{1}{2}\left[\Phi_R(x_0+0) + \Phi_R(x_0-0)\right]\right| \leqslant 2\varepsilon.$$

Si δ tend vers zéro, nous avons l'égalité suivante:

$$\underline{\lim}\, P_n\{\Phi(x_0)\} = \overline{\lim}\, P_n\{\Phi(x_0)\} = \frac{\Phi_R(x_0+0) + \Phi_R(x_0-0)}{2}.$$

Il est évident que le même raisonnement peut être appliqué pour un point de continuité relativement aux points rationnels (continuité relative à R). Nous avons démontré ainsi le théorème général:

La suite des polynomes de M. Bernstein, formés pour une fonction $\Phi(x)$ bornée, converge vers $\Phi(x)$ en tous les points de continuité relative à R. Dans un point x_0 de discontinuité de première espèce elle converge vers

$$\frac{\Phi_R(x_0-0)+\Phi_R(x_0+0)}{2}.$$

5⁰. On peut étudier de la même manière la convergence des polynomes de M. Bernstein dans un point de discontinuite *de deuxième espèce.*

Nous dirons qu'un point ξ est un point de discontinuité de deuxième espèce rélativement à R, si l'une au moins des limites

$$\lim_{r_n\to\xi}\Phi(r_n)\qquad \lim_{\varrho_n\to\xi}\Phi(\varrho_n)$$

n'existe pas.

Soit

$$\overline{\Phi}(\xi-0)=\overline{\lim_{r_n\to\xi}}\,\Phi(r_n);\qquad \overline{\Phi}_R(\xi+0)=\overline{\lim_{\varrho_n\to\xi}}\,\Phi(\varrho_n)$$

$$\underline{\Phi}_R(\xi-0)=\underline{\lim_{r_n\to\xi}}\,\Phi(r_n);\qquad \underline{\Phi}_R(\xi+0)=\underline{\lim_{\varrho_n\to\xi}}\,\Phi(\varrho_n).$$

Désignons par $M_r^{(\delta)}$ la borne supérieure des valeurs de la fonction aux points rationnels de l'intervalle $(\xi-\delta,\xi)$, par $M_\varrho^{(\delta)}$ la borne supérieure dans l'intervalle $(\xi,\xi+\delta)$ et par $m_r^{(\delta)}$, $m_\varrho^{(\delta)}$ les bornes inférieures dans les mêmes intervalles. Il est possible de détérminer δ de telle manière que les inégalités

$$|M_r^{(\delta)}-\overline{\Phi}_R(\xi-0)|<\varepsilon;\qquad |M_\varrho^{\delta}-\overline{\Phi}_R(\xi+0)|<\varepsilon$$

$$|m_r^{(\delta)}-\underline{\Phi}_R(\xi-0)|<\varepsilon;\qquad |m_\varrho^{(\delta)}-\underline{\Phi}_R(\xi+0)|<\varepsilon$$

auront lieu, quelque soit le nombre positif ε. Introduisons les fonctions majorante et minorante $F_\delta(x)$ et $\varphi_\delta(x)$ construites de la même manière qu'au paragraphe précédent. Répétant le raisonnement donné pour l'étude de la convergence des polynomes de M. Bernstein dans un point de discontinuité de première espèce, nous obtenons les inégalités

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,P_n\{\Phi(\xi)\}\leqslant\frac{\overline{\Phi}_R(\xi+0)+\overline{\Phi}_R(\xi-0)}{2}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,P_n\{\Phi(\xi)\}\geqslant\frac{\underline{\Phi}_R(\xi+0)+\underline{\Phi}_R(\xi-0)}{2}$$

si ξ est un point de discontinuité de deuxième espèce pour une fonction $\Phi(x)$, ce qui nous amène au théorème suivant:

La limite supérieure de la suite des polynomes de M. Bernstein de $\Phi(x)$ est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique des maxima de $\Phi(x)$ à droite et à gauche de ξ.

La limite inférieure de cette suite de polynomes et supérieure ou égale à la moyenne arithmétique des minima à droite et à gauche de ξ.

(Le minimum et le maximum sont détérminés pour les valeurs de la fonction $\Phi(x)$ dans les points rationnels seulement).

6⁰. En général, la suite des polynomes de M. Bernstein *diverge* dans les points de discontinuité de deuxième espèce.

Considérons par exemple la fonction suivante:

$$F\left(\frac{p}{2k}\right)=1;\qquad F\left(\frac{p}{2k+1}\right)=0;\qquad \begin{matrix}k=1,2,3,\ldots\\ p=0,1,3,\ldots\end{matrix}$$

Il est évident qu'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,P_n\{F(x)\}=1,\qquad \text{et}\qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\,P_n\{F(x)\}=0.$$

pour tout point de l'intervalle $(0,1)$.

Mais il est possible de construire une fonction $f(x)$ telle que tous les points de $f(x)$ soient des points de discontinuité de deuxième espèce et la suite de polynomes formés pour $f(x)$ soit *partout convergente.* La construction des fonctions de cette nature est fondée sur un lemme que nous allons démontrer.

Considérons deux ensembles $\mathcal{E}$ et E complémentaires dont la somme est l'ensemble de tous les points rationnels du segment $[0,1]$. Construisons une fonction $f(x)$ qui n'admet que deux valeurs: la fonction $f(x)$ est égale à zéro lorsque x appartient à l'ensemble E et $f(x)$ est égale à 1 lorsque x appartient à $\mathcal{E}$. Considérons un segment $[\alpha,\beta]$ quelconque où $0<\alpha<\beta<1$. Décomposons le segment $[0,1]$ en n segments égaux. Désignons par q le nombre des points de division contenus dans le segment $[\alpha,\beta]$. Parmi ces q points m points appartienent à l'ensemble $\mathcal{E}$ et p points appartiennent à l'ensemble E.

La suite des polynomes de M. Bernstein formés pour $f(x)$ ainsi construite converge vers zéro dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ si $\frac{m}{\sqrt{m+p}}$ tend vers zéro, et converge vers 1 si $\frac{p}{\sqrt{m+p}}$ tend vers zéro quand n croît infiniment.

Pour simplifier, supposons que le segment $[\alpha, \beta]$ coïncide avec le segment $[0, 1]$. Alors $p+m=n$.

Considérons le cas où $\frac{m}{\sqrt{n}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

La fonction $f\left(\frac{k}{n}\right)$ où $k=0, 1, 2, \ldots, n$, est égale à 1 dans les m points de l'ensemble E. Nous aurons

$$0 < \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{5}$$

Supposons que dans l'expression (5) la variable x prend une valeur fixe x_0. Cherchons pour x_0 l'indice q pour lequel l'expression

$$A_q = C_n^q x_0^q (1-x_0)^{n-q}$$

atteint son maximum. On trouve cet indice à l'aide des inégalités

$$q \leqslant nx_0 + x_0$$
$$q \geqslant nx_0 - (1-x_0).$$

Pour simplifier supposons que nx_0 est un nombre entier. Dans ce cas l'indice q est égal à nx_0.

Puisque A_{nx_0} est supérieur à tous les A_n et la somme (5) ne contient que m termes non nuls, on obtient l'inégalité suivante

$$0 < \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < m A_{nx} \tag{6}$$

où

$$A_{nx} = \frac{n!}{(nx)!\,(n-nx)!} x^{nx} (1-x)^{n-nx}.$$

En appliquant la formule de Stirling on aura

$$0 < \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{\sqrt{2\pi x(1-x)}} \cdot \frac{m}{\sqrt{n}} + \varepsilon_n.$$

Nous avons supposé que $\frac{m}{\sqrt{n}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Par conséquent, nous aurons l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 0$$

pour tout point x, $0 < x < 1$. C. Q. F. D.

Pour la démonstration du lemme précédent, nous avons supposé que nx_0 est un nombre entier. On peut obtenir le même résultat sans faire cette hypothèse. Il suffit de prendre q égal à l'entier de nx_0.

7⁰. Le lemme démontré au paragraphe précédent permet de trouver la condition *suffisante* pour la convergence des polynomes de M. Bernstein dans un point de discontinuité de deuxième espèce.

Considérons une fonction $f(x)$ bornée ayant au point ξ une discontinuité de deuxième espèce (relativement à R).

Décomposons les points rationnels des intervalles $(\xi-\delta, \xi)$ et $(\xi, \xi+\delta)$ respectivement en deux ensembles $E_1, \mathcal{E}_1$ et $E_2, \mathcal{E}_2$ de telle manière, que la fonction $f(x)$ soit continue sur E_1 et en même temps elle sera continue sur E_2. Considérons les ensembles $E = E_1 + E_2$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$.

Lorsqu'on divise le segment $[0, 1]$ en n segments égaux, on a dans le segment $[\xi-\delta, \xi+\delta]$ m points appartenant à l'ensemble E et p points appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$.

S'il est possible de trouver un nombre δ et un ensemble $\mathcal{E}$ tels que $\frac{p}{\sqrt{m+p}}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la suite des polynomes de M. S. Bernstein, formés pour $f(x)$, converge vers

$$\frac{\Phi_{E_1}(\xi-0) + \Phi_{E_2}(\xi+0)}{2}$$

où $\Phi_{E_1}(\xi-0)$ et $\Phi_{E_2}(\xi+0)$ sont les limites de la fonction $f(x)$ du côté droit et du côté gauche du point ξ, relativement aux ensembles E_1 et E_2.

Il est facile de démontrer cette proposition au moyen des considérations toutes analogues à celle du § 4 (c'est à dire au moyen des fonctions majorantes et minorantes).

Maintenant une question très importante se pose: quelle est la condition necessaire et suffisante pour la convergence des polynomes de M. S. Bernstein dans un point de discontinuité de deuxième espèce? On peut affirmer qu'une telle condition, si elle existe, ne dépend que de la structure arithmétique des valeurs de la fonction $f(x)$ aux points rationnels, et elle est indépendante des qualités métriques et descriptives de l'ensemble des discontinuités. En effet, il à été démontré (au paragraphe 6°) qu'il est possible de construire deux fonctions discontinues en chaque point et telles que pour l'une d'elles la suite des polynomes de M. S. Bernstein *converge partout* et pour l'autre cette suite est *partout divergente.*

Zur allgemeinen Theorie des Masses.

Von

J. v. Neumann (Berlin).

Einleitung.

1. Das allgemeine Problem des linearen Maßes kann (in Anschluss an eine etwas allgemeinere Fragestellung von Lebesgue [1])), folgendermassen formuliert werden:

Jeder beschränkten linearen Menge (d. h. Menge reeller Zahlen) $\mathfrak{M}$ werde eine nicht negative Zahl $\mu(\mathfrak{M})$ zugeordnet, derart, dass

α. Wenn $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots,$ paarweise elementfremdre Menge (mit beschränkter Vereinigungsmenge) sind,

$$\mu(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots) = \mu(\mathfrak{M}_1) + \mu(\mathfrak{M}_2) + \cdots$$

gilt (die Folge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ ist endlich oder abzählbar!).

β. Wenn die Menge $\mathfrak{N}$ aus der Menge $\mathfrak{M}$ durch eine gewöhnliche Translation entsteht [2]) (beide beschränkt!), so ist

$$\mu(\mathfrak{M}) = \mu(\mathfrak{N})$$

[1]) *Leçons sur l'intégration*, Paris 1905. Lebesgue sucht nach einem allgemeinen Integral, das für alle beschränkten Funktionen $f(x)$ und jedes endliche Intervall a, b definiert ist:

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Diese Fragestellung ist aber nur scheinbar allgemeiner als die des Maßes: mit der üblichen Methode der Zurückführung des Lebesgueschen Integrals aufs lineare Lebesguesche Maß (vgl. Anm. [37]) ist ihre Gleichwertigkeit leicht einzusehen.

[2]) Wenn wir die „Koordinate" x einführen, so ist das die Abbildung

$$x' = x + a$$

(a konstant).