compositions de ce genre; plus précisément: A étant un espace Péanien décomposé en continus d'une façon semi-continue, si A jouit de la propriété $\mathfrak{J}$, „l'hyper-espace" H en jouit également.

Soit, en effet, R une région dans l'hyper-espace H et soit $H - R$ un continu. R et $H - R$ sont donc respectivement des images d'une région R_1 de l'espace A et d'un continu $A - R_1$ [1]). En vertu de $\mathfrak{J}$, $A - R_1$ est uni-cohérent. Or, l'uni-cohérence étant un invariant des décompositions considérées [2]), il résulte que $H - R$ est uni-cohérent, c. q. f. d.

De là résulte directement le théorème de M. R. L. Moore, d'après lequel, *si l'on décompose d'une façon semi-continue la surface d'une sphère en (vrais) sous-continus qui ne coupent pas cette surface, l'hyper-espace lui est homéomorphe* [3]).

Car, l'hypothèse de M. R. L. Moore équivaut à l'hypothèse que l'hyper-espace possède la propriété $\mathfrak{C}$. L'hyper-espace est donc Péanien (comme image continue de la surface sphérique) et possède les propriétés $\mathfrak{J}$ et $\mathfrak{C}$, — il est, par conséquent, homéomorphe à la surface de la sphère.

Remarquons encore qu'en appliquant le théorème de M. R. L. Moore, on démontre d'une façon très simple le théorème connu [4]) suivant: *une région située sur la surface de la sphère est homéomorphe à cette surface diminuée d'un ensemble punctiforme fermé.*

Soit, en effet, R la région considérée. Décomposons la surface de la sphère en considérant comme tranches les composantes de $1 - R$ et les points individuels de R. C'est une décomposition semi-continue [5]) en tranches dont aucune n'est une coupure [6]). Selon le théorème de M. R. L. Moore, l'hyper-espace de cette décomposition est homéomorphe à la surface de la sphère. Dans la transformation considérée de l'espace en l'hyper-espace, l'ensemble $1 - R$, comme décomposé en composantes, se transforme en un ensemble punctiforme, fermé [1]). Enfin R se transforme par homéomorphie.

[1]) d'après les théorèmes IV, 8^0 et X de ma note précitée. [Dans le théor. IX après le mot continu le terme „plan" est omis].

[2]) ibid. cor. 2, 4^0 du théor. X. Cf. Vietoris, Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam 29 (1926).

[3]) Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925).

[4]) Voir, p. ex., v. Kerékjártó, Topologie I, chap. III, Berlin 1923.

[5]) voir ma note précitée, p. 169. Cf. R. L. Moore, l. cit. p. 427.

[6]) d'après le théorème général suivant: R étant un sous-ensemble connexe d'un espace connexe et S une composante de $1 - R$, $1 - S$ est connexe. Voir la note de M. Knaster et moi de Fund. Math. II, théor. X.

[1]) Cf. L. E. J. Brouwer, Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam 12 (1910). Cf. ma note de Fund. Math. XI, p. 184.

Über Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rücksicht auf diese Funktionen sind.

Von

Stanisław Leśniewski (Warszawa).

Ich sage hier, dass die Gegenstände, die einer gegebenen Funktion f genügen, eine Gruppe mit Rücksicht auf eine gegebene Funktion φ bilden, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind [1]):

a) $[A, B] : f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(A, B, C)$

b) $[A, B, C, D] : f(A) . f(B) . f(C) . f(D) . \varphi(A, B, C) . \varphi(A, B, D) . \supset . C = D$

c) $[A, B] : f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(A, C, B)$

d) $[A, B, C, D] : f(A) . f(B) . f(C) . f(D) . \varphi(A, C, B) . \varphi(A, D, B) . \supset . C = D$

e) $[A, B] : f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(C, A, B)$

[1]) Im Zusammenhang mit dem Inhalt dieser Bedingungen vgl.: 1) H. Weber. *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. Mathematische Annalen.* 43. Band. 1893. SS. 522 und 523. 2) Edward V. Huntington. *Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates. Transactions of the American Mathematical Society.* Volume 6. 1905. S. 192. — Im Zusammenhang mit den unten auftretenden Ausdrücken vom Typus „$\varphi(A, B, C)$" vgl.: Maxime Bôcher. *The fundamental conceptions and methods of mathematics. Address delivered before the Department of Mathematics of the International Congress of Arts and Science, St. Louis, September 20, 1904. Bulletin of the American Mathematical Society.* Vol. XI. October 1904 to July 1905. 1905. S. 126. — Im Zusammenhang mit den in meiner Mitteilung angewandten „logistischen" Symbolen vgl.: Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica.* Volume I. Second edition. Cambridge. 1925. SS. 6, 7, 9—11 und 15.

f) $[A, B, C, D] : f(A) . f(B) . f(C) . f(D) . \varphi(C, A, B) . \varphi(D, A, B) . \supset . C = D$

g) $[A, B, C, D, E, F, G] : f(A) . f(B) . f(C) . f(D) . f(E) . f(F) . f(G) . \varphi(A, B, C) . \varphi(C, D, E) . \varphi(B, D, F) . \varphi(A, F, G) . \supset . E = G$

Herr Huntington hat bekanntlich im J. 1904 bewiesen, dass die Bedingungen b, d und f aus dem System der vier übrigen Bedingungen folgen [1]); in dieser Mitteilung also werde ich schon dem Umstande Rechnung tragen, dass in der oben formulierten terminologischen Festsetzung die Bedingungen $a - g$ durch die vier Bedingungen a, c, e und g ersetzt werden können.

Indem ich verschiedene bekannte Systeme der Arithmetik von dem Gesichtspunkte verschiedener möglicher Vereinfachungsmethoden der axiomatischen Grundlage dieser Systeme untersuchte, habe ich bemerkt, dass es von dem genannten Gesichtspunkte aus wichtig ist, ein möglichst einfaches System von Bedingungen zu besitzen, welches — mit Hilfe beliebiger konstanter Zeichen der „Theorie der Deduktion", der allgemeinen und partikulären Quantifikatoren, des Identitätszeichens und entsprechender Ausdrücke vom Typus „$\varphi(A, B, C)$" — eine solche spezielle Situation eindeutig charakterisieren würde, in der eine Gruppe mit Rücksicht auf eine gegebene Funktion φ von den Gegenständen gebildet wird, die der mittels der Formel

$$[A] \therefore f(A) . \equiv : [\exists B, C] : \varphi(A, B, C) . \vee . \varphi(B, A, C) . \vee . \varphi(B, C, A)$$

bestimmten Funktion f genügen (in ganz freien Worten könnte ich die genannte Situation mittels der Erklärung charakterisieren, dass hier die Funktion φ eine solche Funktion ist, deren ganzes Feld eine Gruppe mit Rücksicht auf diese Funktion ist). In der Anwendung auf die erwähnte Situation würden die oben angegebenen Bedingungen a, c, e und g entsprechend — nach der Beseitigung der in ihnen ganz deutlichen neuentstandenen Pleonasmen — die Gestalt der vier folgenden Bedingungen annehmen:

1. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists C] . \varphi(A, B, C)$

2. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists C] . \varphi(A, C, B)$

[1]) Vgl.: Huntington. *Op. cit.*, SS. 181, 192 und 196.

3. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists C] . \varphi(C, A, B)$

4. $[A, B, C, D, E, F, G] : \varphi(A, B, C) . \varphi(C, D, E) . \varphi(B, D, F) . \varphi(A, F, G) . \supset . E = G$

In dieser Mitteilung möchte ich nachweisen, dass das System der vier Bedingungen *1—4* einer einzigen Bedingung äquivalent ist, die die Gestalt folgender Äquivalenz besitzt:

I. $[A, B, C] \because \varphi(A, B, C) . \equiv \therefore [\exists D, E, F, G] . \varphi(A, D, E) . \varphi(C, F, G) \therefore [H, I] :: \varphi(H, B, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P$ [1])

Die Ableitung der These I aus den Thesen *1—4* bietet bei Berücksichtigung bekannter elementarer Resultate der Gruppentheorie keine Schwierigkeiten. Ich führe hier *explicite* die betreffenden Deduktionen nur der Ordnung halber durch.

5. $[B, H, I] : \varphi(H, B, I) . \supset . [\exists K, L] . \varphi(K, H, L)$ (folgt aus *1*)

6. $[A, B, C] : \varphi(A, B, C) . \supset . [\exists F, G] . \varphi(C, F, G)$ (folgt aus *2*)

7. $[A, B, C, H, I, K, L, M, N] :: \varphi(A, B, C) . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P \therefore \supset . \varphi(H, B, I)$

Beweis:

$[A, B, C, H, I, K, L, M, N] \therefore :$

(α) $\varphi(A, B, C)$.

(β) $\varphi(K, H, L)$.

(γ) $\varphi(M, N, I) \therefore$

(δ) $[O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P \therefore \supset ::$

$[\exists D] \therefore$

(ε) $\varphi(H, B, D) \therefore$ (aus *1*, β, α)

$[\exists P] :$

(ζ) $\varphi(P, A, H) :$ (*3*, α, β)

$[\exists O]$.

(η) $\varphi(O, C, I)$. (*3*, α, γ)

(ϑ) $O = P :$ (δ, η, ζ)

(ι) $\varphi(P, C, I) \therefore$ (η, ϑ)

(κ) $D = I ::$ (*4*, ζ ε, α, ι)

$\varphi(H, B, I)$ (ε, κ)

[1]) Dieses Ergebnis stammt aus dem J. 1926.

8. $[A, B, C, D] : \varphi(A, B, C) . \varphi(D, B, C) . \supset . A = D$

Beweis[1]):

$[A, B, C, D] ::$

(α) $\varphi(A, B, C)$.

(β) $\varphi(D, B, C) . \supset \therefore$

$[\exists E] :$

(γ) $\varphi(E, A, D) :$ (3, α, β)

$[\exists F]$.

(δ) $\varphi(E, C, F)$. (1, γ, α)

(ε) $C = F :$ (4, γ, β, α, δ)

(ζ) $\varphi(E, C, C) :$ (δ, ε)

$[\exists G]$.

(η) $\varphi(C, G, A) \therefore$ (2, α)

$A = D$ (4, ζ, η, γ)

9. $[A, C, O, P] : \varphi(O, C, C) . \varphi(P, A, A) . \supset . O = P$

Beweis:

$[A, C, O, P] ::$

(α) $\varphi(O, C, C)$.

(β) $\varphi(P, A, A) . \supset \therefore$

$[\exists B] :$

(γ) $\varphi(O, A, B) :$ (1, α, β)

$[\exists D]$.

(δ) $\varphi(C, D, A) :$ (2, α, β)

(ε) $A = B \therefore$ (4, α, δ, γ)

(ζ) $\varphi(O, A, A)$. (γ, ε)

$O = P$ (8, ζ, β)

10. $[A, B, C, D, E, F, G] :: \varphi(A, D, E) . \varphi(C, F, G) :.: [H, I] :: \varphi(H, B, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P :.: \supset . \varphi(A, B, C)$

Beweis:

$[A, B, C, D, E, F, G] ::$

(α) $\varphi(A, D, E)$.

(β) $\varphi(C, F, G) :.:$

[1]) Dieser Beweis ist wesentlich nur eine Wiederholung des betreffenden Beweises des Herrn Huntington. Vgl. *op. cit.*, S. 196.

(γ) $[H, I] :: \varphi(H, B, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P :.: \supset \therefore$

(δ) $[O, P] : \varphi(O, C, C) . \varphi(P, A, A) . \supset . O = P \therefore$ (9)

$[\exists K, L] :$

(ε) $\varphi(K, A, L) :$ (5, α)

$[\exists N]$.

(ζ) $\varphi(C, N, C) \therefore$ (2, β)

$\varphi(A, B, C)$ (γ, ε, ζ, δ)

11. $[A, B, C, H, I, O, P] : \varphi(A, B, C) . \varphi(H, B, I) . \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P$

Beweis:

$[A, B, C, H, I, O, P] ::$

(α) $\varphi(A, B, C)$.

(β) $\varphi(H, B, I)$.

(γ) $\varphi(O, C, I)$.

(δ) $\varphi(P, A, H) . \supset \therefore$

$[\exists D] :$

(ε) $\varphi(O, A, D) :$ (1, γ, α)

$[\exists E]$.

(ζ) $\varphi(D, B, E)$. (1, ε, α)

(η) $E = I :$ (4, ε, ζ, α, γ)

(ϑ) $\varphi(D, B, I)$. (ζ, η)

(ι) $D = H \therefore$ (8, ϑ, β)

(κ) $\varphi(O, A, H)$. (ε, ι)

$O = P$ (8, κ, δ)

12. $[A, B, C, H, I] :.: \varphi(A, B, C) . \supset :: \varphi(H, B, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P$ (folgt aus 5, 11 und 7)

Aus 6, 12 und 10 folgt I.

Ich trete an die Ableitung der Thesen 1—4 aus der These I heran:

II. $[A, B, C] : \varphi(A, B, C) . \supset . [\exists F, G] . \varphi(C, F, G)$ (folgt aus I)

III. $[B, H, I] : \varphi(H, B, I) . \supset . [\exists K, L] . \varphi(K, H, L)$ (folgt aus I)

IV. $[A, B, C, H, I, O, P] : \varphi(A, B, C) . \varphi(H, B, I) . \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P$ (folgt aus I)

V. $[A, B, C, H, I, K, L, M, N] :: \varphi(A, B, C) . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P \therefore \supset . \varphi(H, B, I)$ (folgt aus I)

VI. $[A, B, C, D, E, F, G] :: \varphi(A, D, E) . \varphi(C, F, G) :.: [H, I] :: \varphi(H, B, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, A, H) . \supset . O = P :.: \supset . \varphi(A, B, C)$ (folgt aus I)

VII. $[A, B, C] : (A, B, C) . \supset . [\exists K, L] . \varphi(K, C, L)$ (folgt aus II und III)

VIII. $[E, Q] : \varphi(Q, Q, Q) . \varphi(E, Q, Q) . \supset . \varphi(Q, Q, E)$

Beweis:

$[E, Q]:$

(α) $\varphi(Q, Q, Q)$.

(β) $\varphi(E, Q, Q) . \supset .$

(γ) $Q = E$. (IV, α, β)

$\varphi(Q, Q, E)$ (α, γ)

IX. $[A, B, C, E, H] : \varphi(E, E, B) . \varphi(A, E, B) . \varphi(C, B, H) . \varphi(B, E, H) . \supset . \varphi(E, A, B)$

Beweis:

$[A, B, C, E, H]:$

(α) $\varphi(E, E, B)$.

(β) $\varphi(A, E, B)$.

(γ) $\varphi(C, B, H)$.

(δ) $\varphi(B, E, H) . \supset .$

(ε) $C = E$. $(IV, \alpha, \delta, \gamma)$

(ζ) $C = A$. $(IV, \alpha, \delta, \gamma, \beta)$

(η) $E = A$. (ε, ζ)

$\varphi(E, A, B)$ (α, η)

X. $[A, B, C] : \varphi(A, B, C) . \supset . [\exists F, G] . \varphi(B, F, G)$

Beweis:

$[A, B, C] \therefore$

(α) $\varphi(A, B, C) . \supset :$

(β) $[\exists P] . \varphi(P, A, B) . \vee . \varphi(B, B, C) :$ (V, α)

$[\exists F, G] . \varphi(B, F, G)$ (β, II)

XI. $[A, B, D, E, F, G] : \varphi(D, E, A) . \varphi(F, G, B) . \supset . [\exists O] . \varphi(O, A, B)$

Beweis:

$[A, B, D, E, F, G]:$

(α) $\varphi(D, E, A)$.

(β) $\varphi(F, G, B) . \supset \therefore$

(γ) $[\exists O] . \varphi(O, A, B) . \vee . \varphi(E, E, B) :$ (V, α, β)

$[\exists K, L]$.

(δ) $\varphi(K, A, L) :$ (VII, α)

(ε) $[\exists O] . \varphi(O, A, B) . \vee . \varphi(A, E, B) \therefore$ $(V, \alpha, \delta, \beta)$

$[\exists C, H]:$

(ζ) $\varphi(C, B, H) :$ (VII, β)

(η) $[\exists O] . \varphi(O, A, B) . \vee . \varphi(B, E, H) :$ (ε, V, ζ)

(ϑ) $[\exists O] . \varphi(O, A, B) . \vee . \varphi(E, E, B) . \varphi(A, E, B) . \varphi(B, E, H) \therefore$ $(\gamma, \varepsilon, \eta)$

$[\exists O] . \varphi(O, A, B)$ (ϑ, IX, ζ)

XII. $[A, K, P, Q] : \varphi(Q, A, A) . \varphi(P, K, Q) . \supset . \varphi(Q, Q, Q)$

Beweis:

$[A, K, P, Q] \therefore$

(α) $\varphi(Q, A, A)$.

(β) $\varphi(P, K, Q) . \supset :$

$[\exists O]$.

(γ) $\varphi(O, Q, Q)$. (XI, β)

(δ) $Q = O :$ (IV, α, γ)

$\varphi(Q, Q, Q)$ (γ, δ)

XIII. $[A, Q] : \varphi(Q, A, A) . \sim\{\varphi(Q, Q, A)\} . \supset . \varphi(Q, Q, Q)$

Beweis:

$[A, Q] ::$

(α) $\varphi(Q, A, A)$.

(β) $\sim\{\varphi(Q, Q, A)\} . \supset \therefore$

$[\exists K, L]:$

(γ) $\varphi(K, Q, L) :$ (III, α)

$[\exists P]$.

(δ) $\varphi(P, K, Q) \therefore$ $(V, \gamma, \alpha, \beta)$

$\varphi(Q, Q, Q)$ (XII, α, β)

XIV. $[A, Q] : \varphi(Q, A, A) . \varphi(Q, Q, A) . \supset . \varphi(Q, Q, Q)$

Beweis:

$[A, Q] ::$

(α) $\varphi(Q, A, A)$.

(β) $\varphi(Q, Q, A) . \supset :.:$

(γ) $[H, I] :: \varphi(H, Q, I) . \equiv \therefore [\exists K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, A, I) . \varphi(P, Q, H) . \supset . O = P :.:$ $(III, IV, V, \beta$ [1]$)$

[1]) Einfacher ist es hier, sich auf I und β zu berufen. Ich tue dies nicht — aus Gründen, die weiter unten klar sein werden.

(δ) $[H, I] :: \varphi(H, A, I) . \equiv \therefore [\exists\, K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : (O, A, I) . \varphi(P, Q, H) . \supset . O = P :.:$ (*III*, *IV*, *V*, α[1]))

(ε) $(H, I) : \varphi(H, A. I) . \equiv . \varphi(H, Q, I) :.:$ (δ, γ)

(ζ) $[H, I] :: \varphi(H, Q, I) . \equiv \therefore [\exists\, K, L, M, N] . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, Q, I) . \varphi(P, Q, H) . \supset . O = P :.:$ (γ, ε)

$\varphi(Q, Q, Q)$ (*VI*, α, ζ)

XV. $[A, Q] : \varphi(Q, A, A) . \supset . \varphi(Q, Q, Q)$ (folgt aus *XIV* und *XIII*).

XVI. $[A, D, E] : \varphi(D, E, A) . \supset . [\exists\, P, Q] . \varphi(P, Q, E)$

Beweis:

$[A, D, E] ::$

(α) $\varphi(D, E, A) . \supset \therefore$

$[\exists\, Q] :$

(β) $\varphi(Q, A, A) .$ (*XI*, α)

(γ) $\varphi(Q, Q, Q) :$ (*XV*, β)

(δ) $\sim\{\varphi(E, Q, Q)\} . \vee . \varphi(Q, Q, E) \therefore$ (*VIII*, γ)

$[\exists\, P, Q] . \varphi(P, Q, E)$ (δ, *V*, γ, α)

XVII. $[B, H, I] : \varphi(H, B, I) . \supset . [\exists\, P, Q] . \varphi(P, Q, H)$ (folgt aus *III* und *XVI*)

XVIII. $[A, D, E] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) : \supset . [\exists\, F, G, K, L, P, Q] . \varphi(A, F, G) . \varphi(K, A, L) . \varphi(P, Q, A)$ (folgt aus *III*, *XVII*, *X*, *XVI*, *II* und *VII*)

3. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee : \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset . [\exists\, C] . \varphi(C, A, B)$

Beweis:

$[A, B, D, E, F, G] ::$

(α) $\varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) :$

(β) $\varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset \therefore$

$[\exists\, P, Q] :$

(γ) $\varphi(P, Q, A) :$ (*XVIII*, α)

$[\exists\, H, I] .$

(δ) $\varphi(H, I, B) \therefore$ (*XVIII*, β)

$[\exists\, C] . \varphi(C, A, B)$ (*XI*, γ, δ)

[1]) Einfacher ist es hier, sich auf *I* und α zu berufen.

XIX. $[B, C, O, P] : \varphi(O, B, C) . \varphi(P, B, C) . \supset . O = P$

Beweis:

$[B, C, O, P] :.:$

(α) $\varphi(O, B, C) .$

(β) $\varphi(P, B, C) . \supset ::$

$[\exists\, A, Q] \therefore$

(γ) $\varphi(A, Q, B) \therefore$ (*XVI*, β)

$[\exists\, D] :$

(δ) $\varphi(D, Q, C) :$ $(3, \gamma, \alpha)$

$[\exists\, E] .$

(ε) $\varphi(E, A, D) .$ $(3, \gamma, \delta)$

(ζ) $O = E .$ (*IV*, $\gamma, \delta, \alpha, \varepsilon$)

(η) $P = E ::$ (*IV*, $\gamma, \delta, \beta, \varepsilon$)

$O = P$ (ζ, η)

XX. $[A, B, C, H, I] \therefore \varphi(C, B, B) : \varphi(I, H, A) . \vee . \varphi(H, I, A) . \vee . \varphi(H, A, I) : \supset . \varphi(I, C, I)$

Beweis:

$[A, B, C, H, I] ::$

(α) $\varphi(C, B, B) :$

(β) $\varphi(I, H, A) . \vee . \varphi(H, I, A) . \vee . \varphi(H, A, I) : \supset \therefore$

$[\exists\, P, Q] .$

(γ) $\varphi(P, Q, C) :$ (*XVII*, α)

(δ) $\varphi(C, C, C) \therefore$ (*XII*, α, γ)

(ε) $[O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, C, I) . \supset . O = P \therefore$ (*XIX*)

$[\exists\, K, L, M, N] .$

(ζ) $\varphi(K, I, L) . \varphi(M, N, I) :$ (*XVIII*, β)

$\varphi(I, C, I)$ (*V*, $\delta, \zeta, \varepsilon$)

XXI. $[A, B, F, G, H, I, K, L, M, N, Q] :: \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \varphi(Q, A, A) . \varphi(K, H, L) . \varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, B, I) . \varphi(P, Q, H) . \supset . O = P \therefore \supset . \varphi(H, B, I)$

Beweis:

$[A, B, F, G, H, I, K, L, M, N, Q] ::$

(α) $\varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B. G) . \vee . \varphi(F, G, B) :$

(β) $\varphi(Q, A, A) .$

(γ) $\varphi(K, H, L) .$

(δ) $\varphi(M, N, I) \therefore$

(ε) $[O, P] : \varphi(O, B, I) . \varphi(P, Q, H) . \supset . O = P \therefore \supset :$

(ζ) $\varphi(H, Q, H)$: (XX, β, γ)
$[\exists\, C]$.
(η) $\varphi(C, B, I)$. $(3, \alpha, \delta)$
(ϑ) $C = H$: $(\varepsilon, \eta, \zeta)$
$\varphi(H, B, I)$ (η, ϑ)

XXII. $[A, B, C, H, I, O, P] : \varphi(C, B, B) . \varphi(I, H, A) . \varphi(O, C, I) . \varphi(P, H, A) . \supset . O = P$

Beweis:

$[A, B, C, H, I, O, P]$:
(α) $\varphi(C, B, B)$.
(β) $\varphi(I, H, A)$.
(γ) $\varphi(O, C, I)$.
(δ) $\varphi(P, H, A) . \supset$.
(ε) $\varphi(I, C, I)$. (XX, α, β)
(ζ) $I = O$. $(XIX, \varepsilon, \gamma)$
(η) $I = P$. (XIX, β, δ)
$O = P$ (ζ, η)

XXIII. $[A, B, C, H, I] : \varphi(C, B, B) . \varphi(H, B, C) . \varphi(I, H, A) . \supset . \varphi(A, B, I)$

Beweis:

$[A, B, C, H, I]$::
(α) $\varphi(C, B, B)$.
(β) $\varphi(H, B, C)$.
(γ) $\varphi(I, H, A) . \supset \therefore$
(δ) $[O, P] : \varphi(O, C, I) . \varphi(P, H, A) . \supset . O = P \therefore$ $(XXII, \alpha, \gamma)$
$[\exists\, D]$.
(ε) $\varphi(D, A, I)$: $(3, \gamma)$
$\varphi(A, B, I)$ $(V, \beta, \varepsilon, \delta)$

1. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A) : \varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) . \supset . [\exists\, C] . \varphi(A, B, C)$

Beweis:

$[A, B, D, E, F, G]$:.:
(α) $\varphi(A. D, E) . \vee . \varphi(D, A, E) . \vee . \varphi(D, E, A)$:
(β) $\varphi(B, F, G) . \vee . \varphi(F, B, G) . \vee . \varphi(F, G, B) : \supset$::
$[\exists\, C] \therefore$
(γ) $\varphi(C, B, B) \therefore$ $(3, \beta)$
$[\exists\, H]$:

(δ) $\varphi(H, B, C)$: $(3, \gamma)$
$[\exists\, I]$.
(ε) $\varphi(I, H, A)$:: $(3, \delta, \alpha)$
$[\exists\, C] . \varphi(A, B, C)$ $(XXIII, \gamma, \delta, \varepsilon)$

XXIV. $[B, H, I] : \varphi(H, B, B) . \varphi(I, B, H) . \supset . \varphi(B, I, H)$

Beweis:

$[B, H, I] \therefore$
(α) $\varphi(H, B, B)$.
(β) $\varphi(I, B, H) . \supset$:
$[\exists\, C]$.
(γ) $\varphi(B, I, C)$. $(1, \beta)$
(δ) $\varphi(C, B, B)$. $(XXIII, \alpha, \beta, \gamma)$
(ε) $C = H$: (XIX, δ, α)
$\varphi(B, I, H)$ (γ, ε)

XXV. $[A, B, C, H, I] : \varphi(H, B, B) . \varphi(I, B, H) . \varphi(A, B, C) . \supset . \varphi(C, I, A)$

Beweis:

$[A, B, C, H, I] \therefore$
(α) $\varphi(H, B, B)$.
(β) $\varphi(I, B, H)$.
(γ) $\varphi(A, B, C) . \supset$:
(δ) $\varphi(H, H, H)$: (XII, α, β)
$[\exists\, P]$.
(ε) $\varphi(P, I, I)$. $(3, \beta)$
(ζ) $H = P$: $(IV, \beta, \delta, \varepsilon)$
(η) $\varphi(H, I, I)$. (ε, ζ)
(ϑ) $\varphi(B, I, H)$. $(XXIV, \alpha, \beta)$
$\varphi(C, I, A)$ $(XXIII, \eta, \vartheta, \gamma)$

4. $[A, B, C, D, E, F, G] : \varphi(A, B, C) . \varphi(C, D, E) . \varphi(B, D, F) . \varphi(A, F, G) . \supset . E = G$

Beweis:

$[A, B, C, D, E, F, G]$ ⁙
(α) $\varphi(A, B, C)$.
(β) $\varphi(C, D, E)$.
(γ) $\varphi(B, D, F)$.
(δ) $\varphi(A, F, G) . \supset$ ⁙
$[\exists\, H]$ ⁙

(ε) $\varphi(H, B, B) \because\because$ $(3, \alpha)$

$[\exists\, I] ::$

(ζ) $\varphi(I, B, H)\,.$ $(3, \varepsilon)$

(η) $\varphi(C, I, A) ::$ $(XXV, \varepsilon, \zeta, \varkappa)$

$[\exists\, Q] :.:$

(ϑ) $\varphi(Q, D, D)\,.$ $(3, \beta)$

(ι) $\varphi(G, Q, G) :.:$ (XX, ϑ, δ)

$[\exists\, R] ::$

(κ) $\varphi(R, D, Q)\,.$ $(3, \vartheta)$

(λ) $\varphi(E, R, C) ::$ $(XXV, \vartheta, \varkappa, \beta)$

$[\exists\, S] \therefore$

(μ) $\varphi(R, I, S)\,.$ $(1, \varkappa, \zeta)$

(ν) $\varphi(S, B, R) \therefore$ $(XXIII, \varepsilon, \zeta, \mu)$

$[\exists\, T] :$

(ξ) $\varphi(T, S, A)\,.$ $(3, \mu, \alpha)$

(ο) $T = E :$ $(IV, \mu, \eta, \xi, \lambda)$

$[\exists\, O]\,.$

(π) $\varphi(O, F, Q)\,.$ $(XI, \gamma, \varkappa)$

(ρ) $O = S\,.$ $(IV, \gamma, \varkappa, \pi, \nu)$

(σ) $\varphi(T, O, A) :$ (ξ, ρ)

(τ) $G = T \because\because$ $(IV, \pi, \delta, \iota, \sigma)$

$E = G$ (o, τ)

2. $[A, B, D, E, F, G] \therefore \varphi(A, D, E)\,.\vee.\,\varphi(D, A, E)\,.\vee.\,\varphi(D, E, A) :$ $\varphi(B, F, G)\,.\vee.\,\varphi(F, B, G)\,.\vee.\,\varphi(F, G, B) : \supset . [\exists\, C]\,.\,\varphi(A, C, B)$

Beweis:

$[A, B, D, E, F, G] \because\because$

(α) $\varphi(A, D, E)\,.\vee.\,\varphi(D, A, E)\,.\vee.\,\varphi(D, E, A) :$

(β) $\varphi(B, F, G)\,.\vee.\,\varphi(F, B, G)\,.\vee.\,\varphi(F, G, B) : \supset ::$

(γ) $[H, I] : \varphi(H, B, I)\,.\supset.\,[\exists\, K, L, M, N]\,.\,\varphi(K, H, L)\,.\,\varphi(M, N, I) :$ (III)

$[\exists\, Q] :.:$

(δ) $\varphi(Q, A, A) \therefore$ $(3, \alpha)$

(ε) $[H, I, O, P] : \varphi(H, B, I)\,.\,\varphi(O, B, I)\,.\,\varphi(P, Q, H)\,.\supset.\,P = O :.:$ $(XXII, \delta)$

(ζ) $[H, I, K, L, M, N] :: \varphi(K, H, L)\,.\,\varphi(M, N, I) \therefore [O, P] : \varphi(O, B, I)\,.\,\varphi(P, Q, H)\,.\supset.\,O = P \therefore \supset .\,\varphi(H, B, I) :.:$ (XXI, β, δ)

$[\exists\, R, S]\,.$

(η) $\varphi(B, R, S) :$ $(XVIII, \beta)$

(ϑ) $\varphi(Q, B, B) ::$ $(VI, \delta, \eta, \gamma, \varepsilon, \zeta)$

$[\exists\, T] \therefore$

(ι) $\varphi(T, A, Q)\,.$ $(3, \alpha, \delta)$

(κ) $\varphi(A, T, Q) \therefore$ $(XXIV, \delta, \iota)$

$[\exists\, C] :$

(λ) $\varphi(T, B, C) :$ $(1, \iota, \vartheta)$

$[\exists\, U]\,.$

(μ) $\varphi(A, C, U)\,.$ $(1, \delta, \lambda)$

(ν) $B = U ::$ $(4, \varkappa, \vartheta, \lambda, \mu)$

$[\exists\, C]\,.\,\varphi(A, C, B)$ (μ, ν)

Die hier durchgeführten Deduktionen weisen nach, dass das System der Thesen *1*—*4*, wie ich das oben angesagt habe, der These *I* äquivalent ist. (Das erhaltene Resultat können wir auch in die Aussage fassen, nach welcher der Umstand, dass irgendeine Funktion φ der These *I* genügt, die notwendige und hinreichende Bedingung ist, damit das Feld der Funktion φ eine Gruppe mit Rücksicht auf diese Funktion sei.)

Ich erwähne hier noch, dass, nachdem ich oben aus der These *I* die Thesen *II*—*VI* abgeleitet hatte, die die „natürlichen" Faktoren der These *I* darstellen, appellierte ich schon beim Ableiten der Thesen *1*—*4* an die These *I* gar nicht [1]). Es ergibt sich daraus, dass das System der Thesen *II*—*VI* schon an und für sich ein von dem Gesichtspunkte der in der Gruppentheorie herrschenden Traditionen ziemlich merkwürdiges Postulatensystem bildet, welches dem System der Postulate *1*—*4* äquivalent ist. Es ist leicht sich zu überzeugen, dass jede von den fünf Thesen, die zu dem genannten System der Thesen *II*—*VI* gehören, von dem Produkt der vier übrigen Thesen dieses Systems unabhängig ist: allen Thesen *II*—*VI* mit Ausnahme *einer* von ihnen (die für fünf verschiedene Fälle verschieden ist) genügen die Funktionen φ, die der Reihe nach mittels fünf folgender Formeln bestimmt werden:

$$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C)\,.\equiv: A = 1\,.\,B = 1 : C = 1\,.\vee.\,C = 2$$

$$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C)\,.\equiv: A = 1\,.\vee.\,A = 2 : B = 2\,.\,C = 1$$

$$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C)\,.\equiv: A = B\,.\,B = C\,.\supset.\,A = C$$

[1]) Vgl. oben die Anmerkungen zu den Thesen γ und δ im Beweis der These *XIV*.

$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C) . \equiv : A = 1 . B = 1 . C = 1 . \vee . A = 1 . B = 2 . C = 2 . \vee . A = 2 . B = 1 . C = 2$

$[A, B, C] \therefore \varphi(A, B, C) . \equiv : A = 1 . C = 1 . \vee . A = 2 . C = 2 : B = 1 . \vee . B = 2.$

Der Umstand, dass die Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rücksicht auf diese Funktionen sind, mittels einer einzigen Äquivalenz charakterisiert werden können, die sich in die voneinander unabhängigen Postulate $II - VI$ auflösen lässt, und deren eine Seite ein entsprechender Ausdruck vom Typus „$\varphi(A. B, C)$“ ist [ein analoges Ergebnis für Abelsche Gruppen werde ich in einer besonderen Mitteilung darstellen], besitzt für mich persönlich eine allgemeinere Bedeutung: ich bin geneigt anzunehmen, dass das Aussuchen einziger Äquivalenzen dieser Art, welche zur Charakterisierung von Funktionen genügen würden, die in den verschiedenen deduktiven Theorien als primitive Funktionen auftreten, viel Licht auf die Axiomensysteme dieser Theorien werfen und zu einer bedeutenden Vereinfachung der genannten Axiomensysteme beitragen kann [es ist mir gelungen, solche Vereinfachungen schon in mehreren sehr voneinander verschiedenen Fällen zu erreichen]. Ich bemerke bei Gelegenheit, dass mir beim Konstruieren von Äquivalenzen des erwähnten Typus bisher immer die grössten Schwierigkeiten diejenigen Axiome der betrachteten Theorien bereiteten, die mit der Frage der Anzahl von Elementen zusammenhängen, welche zu den Feldern der primitiven Funktionen dieser Theorien gehören. In den Tatsachen, die ich hier so ganz allgemein berühre, vermute ich ein Material für eine zukünftige präzise Synthese aus dem Gebiet der Theorie der deduktiven Systeme.

Zusatz zur Arbeit »Zur allgemeinen Theorie des Masses«.

Von

J. von Neumann (Berlin).

Leider übersah der Verfasser bei Abfassung der genannten Arbeit und den Korrekturen die Tatsache, dass das im Teile III behandelte Problem, Kontinuum viele paarweise Elementfremde Mengen anzugeben, von denen keine eine Nullmenge ist (sowie die davongemachte Anwendung) in der Arbeit von Herrn W. Sierpiński „*L'axiome de M. Zermelo et son rôle...*“ (Bull. de l'Acad. d. Sc. de Cracovie, Avril-Mai 1918, S. 151) behandelt und gelöst worden ist.

Immerhin ist es vielleicht vom prinzipiellen Standpunkte aus nicht ganz ohne Interesse, dass Herr W. Sierpiński einen weitergehenden Gebrauch vom Auswahlprinzip macht als wir. Seine Konstruktion beruht auf gewissen total imperfekten Mengen, zu deren Erzeugung eine Wohlordnung des Kontinuums notwendig ist. Wir benötigen nur eine simultane Auswahl aus Kontinuum vielen Mengen (für die Wohlordnung braucht man $2^{\aleph}$!), wie es bei Konstruktion unmessbarer Mengen immer notwendig ist.