Aufbaus dieses Axiomensystems gelegen sein dürfte]. Beispiel: Es sollen nur Punkte *einer* Geraden und überhaupt keine Ebenen existieren. — Ist I 8 in der angegebenen Weise ergänzt, so ergibt sich ohne irgend eine Zusatzforderung die behauptete Reduzierung von I 3.

Mit dem Vorstehenden stimmt durchaus überein, dass in der von Frl. Weinlös a. a. O. aufgestellten Geometrie 1) die Erfüllbarkeitsforderung nicht befriedigt ist, 2) in jeder Ebene nur ein einziger Punkt enthalten ist, 3) alle Punkte auf *einer* Geraden liegen

---

Une caractérisation topologique de la surface de la sphère [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Appelons espace Péanien [2]) tout espace métrique qui est une image continue de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Je vais prouver que, au point de vue topologique, la surface de la sphère est, parmi les espaces Péaniens (contenant plus d'un point), caractérisée par les deux propriétés suivantes:

1°: propriété de l'espace d'être *cyclique* [3]), c.-à.-d. que

($\mathcal{C}$) *aucun point ne coupe l'espace,*

2°: propriété de Janiszewski:

($\mathcal{J}$) *si C est un continu qui ne coupe pas l'espace, C est uni-cohérent* [4]), *c'est-à-dire que pour toute décomposition de C en deux continus K et L, le produit KL est un continu* [5]).

Le fait que la surface de la sphère jouit de la propriété $\mathcal{C}$ est

[1]) Les principaux résultats de cette note ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie) à la séance du 22. VI. 1928.

[2]) D'accord avec M. Rosenthal (Math. Zeitschr. 10, 1921). Dans le même sens fut souvent employé dans ce Journal le terme „continu (ou courbe) de Jordan", qui chez d'autres auteurs a un sens différent.

D'après le théorème de Hahn-Mazurkiewicz, les espaces Péaniens sont caractérisés par les trois propriétés: compacticité, connexité et connexité locale.

[3]) dans la terminologie des mathématiciens américains.

[4]) continu „ohne Henkel" au sens de M. Vietoris, Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam, 29 (1926).

[5]) Ce théorème peut servir de base pour l'axiomatique de la topologie de la surface sphérique. Je l'ai exposé dans une Communication faite au Congrès Int. des Mathématiciens à Bologne.

évident. Quant à la propriété $\mathfrak{J}$, elle fut établie par Janiszewski dans son Mémoire „Sur les coupures du plan“ [1]).

Le but de la note présente est de prouver la *suffisance* de ces deux propriétés pour qu'un espace Péanien soit homéomorphe à la surface de la sphère. En même temps, j'étudie de plus près la propriété $\mathfrak{J}$, la propriété plus générale $\mathfrak{U}$, de l'uni-cohérence de l'espace, et les relations qui subsistent entre elles.

Termes et notations. $\overline{X}$ désigne l'ensemble X augmenté de ses points d'accumulation. Un ensemble A est dit *connexe*, lorsqu'il ne se laisse pas décomposer en deux ensembles non-vides M et N tels que $\overline{M}N+\overline{N}M=0$. Un ensemble connexe et fermé (ouvert) est dit un *continu* (*région*). Un sous-ensemble connexe d'un ensemble arbitraire X est dit sa *composante*, lorsqu'il n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de X. L'espace est dit *localement connexe* au point p, lorsqu'il existe un entourage connexe de p aussi petit qu'on le veut.

Un ensemble A est dit *coupure entre p et q*, ou un $\mathfrak{S}(p,q)$, lorsque A est fermé, p et q n'appartiennent pas à A et il n'existe aucun continu qui unisse p et q en dehors de A; dans les espaces Péaniens le terme „continu“ peut être remplacé ici par „ensemble connexe“. Une coupure *irréductible* entre p et q, ou un $\mathfrak{S}_i(p,q)$, est un $\mathfrak{S}(p,q)$ dont aucun vrai sous-ensemble n'est un $\mathfrak{S}(p,q)$.

La *frontière* de X est l'ensemble $F(X)=\overline{X}\,.\,\overline{1-X}$, 1 désignant l'espace.

Un ensemble est dit *punctiforme* lorsqu'il ne contient aucun continu (ayant plus d'un point).

§ 1. Espaces uni-cohérents.

Par définition, un espace est uni-cohérent, lorsque, pour toute décomposition de cet espace en deux continus, le produit de ces continus est un continu. Des exemples de continus uni-cohérents fournissent les continus Péaniens qui ne coupent pas le plan; en effet, pour les continus Péaniens situés sur le plan, il y a identité entre les notions d'uni cohérence et de continu qui n'est pas une coupure [2]).

Je vais prouver, à présent, que pour les espaces Péaniens l'uni-cohérence de l'espace équivaut à chacune des propriétés suivantes:

[1]) Prace mat.-fiz. 26 (1913), p. 55, théorème B. (Cf. la note de M. S. Straszewicz et moi, Fund. Math XII).

[2]) Voir ma note *Sur les continus de Jordan et le théorème de M Brouwer*, Fund. Math. VIII, p. 149, théor. III. Plus généralement, comme le signale M. Vietoris, les espaces Péaniens uni-cohérents (à un nombre de dimensions quelconque) coïncident avec les continus Péaniens ayant „la cyclose de base 0“ (l. cit. p. 447).

($\mathfrak{U}_1$) [1]) *R étant une région-composante du complémentaire d'un continu (arbitraire situé dans l'espace considéré), $F(R)$ est un continu;*

($\mathfrak{U}_2$) [2]) *A et B étant deux ensembles fermés et disjoints, il existe pour tout couple $a\,\varepsilon\,A$, $b\,\varepsilon\,B$ un continu C disjoint de $A+B$ qui est un $\mathfrak{S}(a,b)$;*

($\mathfrak{U}_{2'}$) *on ajoute dans $\mathfrak{U}_2$ l'adjectif „Péanien“ au continu C.*

($\mathfrak{U}_3$) [3]) *tout $\mathfrak{S}_i(a,b)$ est un continu;*

($\mathfrak{U}_4$) [4]) *A et B étant deux ensembles fermés et disjoints dont aucun n'est un $\mathfrak{S}(p,q)$, leur somme $A+B$ n'en est un nonplus.*

L'équivalence entre l'uni-cohérence et les propriétés $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ fut démontrée dans ma note précitée Il suffit donc de prouver les implications suivantes:

$$1^0:\ \mathfrak{U}_1\rightarrow\mathfrak{U}_3,\quad 2^0:\ \mathfrak{U}_3\rightarrow\mathfrak{U}_2,\quad 3^0:\ \mathfrak{U}_2\rightarrow\mathfrak{U}_{2'},\quad \text{et}\quad 4^0:\ \mathfrak{U}_3\rightarrow\mathfrak{U}_4,$$

car les implications $\mathfrak{U}_{2'}\rightarrow\mathfrak{U}_2$ et $\mathfrak{U}_4\rightarrow\mathfrak{U}_3$ sont évidentes.

1. Soient: C un $\mathfrak{S}(a,b)$, P la région-composante de $1-C$ qui contient a, R celle de $1-\overline{P}$ qui contient b. La frontière $F(R)$ est alors un $\mathfrak{S}_i(a,b)$ et

$$F(R)\subset C\ ^{5)}\tag{1}$$

Or, si l'on suppose que C est un $\mathfrak{S}_i(a,b)$, il vient $C=F(R)$, donc l'implication 1^0 est établie.

2. Soient A et B deux ensembles fermés et disjoints. Il existe [6]) un $\mathfrak{S}(a,b)$ disjoint de $A+B$, pour chaque couple $a\,\varepsilon\,A$, $b\,\varepsilon\,B$. Comme nous venons de prouver, ce $\mathfrak{S}(a,b)$ contient un $\mathfrak{S}_i(a,b)$; ce dernier est — si l'on admet $\mathfrak{U}_3$ — un continu. L'implication 2^0 en résulte.

3. Soit C le continu de la proposition $\mathfrak{U}_2$. L'espace — comme Péanien — est une image *uniformément* continue de l'intervalle 01.

[1]) théorème de M. Brouwer, Math. Ann. 69.

[2]) cf. F. Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 344, th. VII.

[3]) ibid p 343. th VI.

[4]) ibid. p. 342, th. IV.

[5]) cela est vrai pour chaque espace Péanien Cf. S. Mazurkiewicz, Fund. Math. V, p. 193, lemme 1. Dans la démonstration de cet énoncé interviennent quelques propriétés des espaces Péaniens, par ex.: R étant une composante d'un ensemble ouvert G, R est une région; on a $F(R)\subset F(G)$. Cf. H. Hahn, Fund. Math. II et ma note de Fund. Math. I, p. 43.

[6]) Selon le théor. de „séparation“ qui subsiste dans chaque espace métrique. Voir p. ex. Vietoris, Mon. f. Math. u. Phys. 31 (1921), p. 190.

Il peut donc être décomposé en un nombre fini de continus Péaniens aussi petits qu'on le veut; plus petits, par exemple, que la distance de $A+B$ à C. Considérons, parmi ces petits continus, ceux qui ont des points communs avec C; leur somme constitue un continu $\mathfrak{S}(a,b)$ Péanien, disjoint de $A+B$.

Donc: $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_{2'}$.

4. Supposons, contrairement à $\mathcal{U}_4$, que $A+B$ est un $\mathfrak{S}(p,q)$. Il contient, par conséquent (inclusion (1)) un $\mathfrak{S}_l(p,q)$. Désignons le par C. On a donc $C=CA+CB$ et, comme ni A ni B n'est un $\mathfrak{S}(p,q)$, tandisque C en est un, on en conclut que $CA \neq 0 \neq CB$. Il en résulte que C n'est pas un continu, puisque par hypothèse: $AB=0$. La proposition $\mathcal{U}_3$ n'est donc pas réalisée.

L'implication 4⁰ est ainsi établie. C. Q. F. D.

Considérons, à présent, les espaces Péaniens uni-cohérent qui jouissent de la propriété $\mathcal{C}$.

Je dis que dans un espace de ce genre le théorème suivant, de Phragmèn, subsiste:

aucun ensemble fermé et punctiforme ne coupe l'espace.

En effet, selon $\mathcal{U}_3$ toute coupure A contient (voir inclusion (1)) un continu C qui est une coupure. Or, si l'on admet la proposition $\mathcal{C}$, le continu C ne peut pas se réduire à un point; autrement dit, l'ensemble A n'est pas punctiforme, c. q. f. d.

On en conclut facilement que *dans les espaces Péaniens uni-cohérents la proposition $\mathcal{C}$ et le théorème de Phragmèn sont équivalents.*

Il est encore à remarquer que, dans le cas de continus Péaniens uni-cohérents situés sur le plan, *la proposition $\mathcal{C}$ caractérise le cercle* [1]. En d'autres termes: *pour qu'un ensemble situé sur le plan soit homéomorphe à un cercle, il faut et il suffit qu'il soit un continu Péanien qui ne coupe pas le plan et qui n'est coupé par aucun point.*

§ 2. Espaces de Janiszewski.

Appelons espace de Janiszewski tout espace Péanien satisfaisant à la condition $\mathcal{J}$ formulée au début. Cette condition étant plus restrictive que la condition $\mathcal{U}$, les espaces de Janiszewski forment une sous-classe dans la classe des espaces uni-cohérents.

[1]) Cela résulte facilement des théorèmes 23 et 24 de la Note de M. G. T. Whyburn *Concerning the structure of a continuous curve*, Amer. Journ. of Math. 50 (1928).

Comme exemples d'espaces de Janiszewski on peut considérer une surface sphérique, deux surfaces sphérique tangentes etc. Sur le plan il n'y a que les „dendrites" (continus Péaniens ne contenant aucune courbe fermée) qui constituent des espaces de Janiszewski [1]).

La condition $\mathcal{J}$ équivaut, comme je vais le prouver à présent, pour les espaces Péaniens, à la condition suivante [2]):

($\mathcal{J}_1$) *A et B étant deux ensembles fermés dont le produit est un continu et dont aucun n'est un $\mathfrak{S}(p,q)$, leur somme $A+B$ n'est non-plus un $\mathfrak{S}(p,q)$.*

Démonstration. 1. $\mathcal{J}_1 \to \mathcal{J}$.

Admettons que l'espace Péanien considéré satisfait à la condition $\mathcal{J}_1$. Soient C, K et L trois continus tels que

(1) $$C=K+L, \quad KL=A+B$$

(2) $$A \neq 0 \neq B, \quad AB=0,$$

A et B étant deux ensembles fermés.

Il s'agit de prouver que C coupe l'espace.

Soient $a \varepsilon A$ et $b \varepsilon B$. Comme la proposition $\mathcal{J}_1$ entraîne évidemment $\mathcal{U}_4$ et celle-ci est équivalente à $\mathcal{U}_{2'}$, on en conclut l'existence d'un continu Péanien Q qui est un $\mathfrak{S}(a,b)$ tel que $Q(A+B)=0$, donc que, conformément à (1):

(3) $$QKL=0.$$

K et L étant deux continus unissant a et b et Q étant un $\mathfrak{S}(a,b)$, il vient

(4) $$QK \neq 0 \neq QL.$$

Soit δ la borne inférieure des distances des points extraits des ensembles QK et QL respectivement. Selon (3) et (4): $\delta>0$.

Le continu Q étant Péanien, on peut le décomposer en un nombre fini de petits continus de diamètres $<\frac{\delta}{2}$. Soient S_1 et S_2

[1]) Une analyse plus détaillée des espaces de Janiszewski paraitra bientôt dans une autre note.

[2]) connue sous le nom de *premier théorème de Janiszewski* (loc. cit., p. 48, théor. A). Ainsi les deux théorèmes de Janiszewski se montrent équivalents (dans les espaces Péaniens).

les sommes de ceux parmi eux qui ont des points communs avec K ou L resp.; soit S_3 la somme de tous les autres. On a, par conséquent:

$$S_1 L = 0 = S_2 K \tag{5}$$

$$S_1 S_2 = 0 \tag{6}$$

$$Q = S_1 + S_2 + S_3 \tag{7}$$

$$S_3(K+L) = 0. \tag{8}$$

Or, supposons contrairement à la proposition $\mathfrak{J}$, que C ne coupe pas l'espace. S_3 étant composé d'un nombre fini de continus situés en dehors de C (formules (1) et (8)), il existe, par conséquent, un continu T qui passe par chacun de ces continus et que $TC = 0$; d'où (1):

$$T(K+L) = 0. \tag{9}$$

Par définition de T, $(T + S_3)$ est un continu.

Considérons les deux ensembles fermés:

$$F_1 = S_1 + T + S_3, \quad F_2 = S_2 + T + S_3.$$

Selon (5), (8) et (9): $F_1 L = 0 = F_2 K$, ce qui prouve que ni F_1 ni F_2 n'est un $\mathfrak{S}(a, b)$, puisque les continus K et L contiennent les points a et b. D'autre part, le produit $F_1 F_2$, comme identique à $T + S_3$ (selon (6)), est un continu. On en conclut, en vertu de $\mathfrak{J}_1$, que $F_1 + F_2$ n'est pas un $\mathfrak{S}(a, b)$; donc Q, comme sous-ensemble de $F_1 + F_2$ (form. (7)), n'est nonplus un $\mathfrak{S}(a, b)$. Mais ceci contredit la définition de Q.

La contradiction demandée est ainsi établie.

2. $\mathfrak{J} \rightarrow \mathfrak{J}_1$.

Soient A et B deux ensembles fermés qui ne sont pas des $\mathfrak{S}(p, q)$; soient donc K et L deux continus Péaniens (des arcs simples, par ex.) qui unissent p et q et tels que

$$AK = 0 = BL. \tag{10}$$

Supposons que AB est un continu. Il s'agit de prouver, en admettant la proposition $\mathfrak{J}$, que $A + B$ n'est pas un $\mathfrak{S}(p, q)$.

AB étant un continu disjoint de $K + L$ (form. (10)), il existe une région-composante R de $1 - (L + K)$ qui le contient. Posons $C = 1 - R$. On a donc:

$$AB \subset R, \quad \text{d'où} \quad ABC = 0 \tag{11}$$

$$R \subset 1 - (K + L), \quad \text{d'où} \quad K + L \subset C. \tag{12}$$

$K + L$ étant un continu Péanien, C, comme égal à $1 - R$, en est un également [1]). En outre, C est, conformément à la proposition $\mathfrak{J}$, uni-cohérent. Par conséquent, si l'on considère C comme espace, la proposition $\mathfrak{A}_4$ y est vérifiée.

En posant: $A_1 = AC$ et $B_1 = BC$, on conclut de (11) que les ensembles fermés A_1 et B_1 sont disjoints et que, en raison de (10) et (12), aucun d'eux ne coupe le continu C entre p et q. Donc, selon $\mathfrak{A}_4$, $A_1 + B_1$ ne coupe nonplus C entre ces points; c'est-à-dire, qu'il existe dans C un continu qui unit p et q en dehors de $A_1 + B_1$, donc en dehors de $A + B$.

§ 3. Théorème.

Pour qu'un espace Péanien, contenant plus d'un point, soit homéomorphe à la surface de la sphère, il faut et il suffit qu'il possède les propriétés $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{J}$.

Démonstration. La nécessité de ces deux propriétés est, comme nous l'avons dit dans l'introduction, connue. Pour prouver leur suffisance nous allons nous appuyer sur un résultat de Mlle Gawehn [2]) qui permet de réduire notre démonstration à prouver que les hypothèses $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{J}$ entraînent les deux propositions suivantes:

1°: *le théorème de Jordan,*

2°: ($\mathfrak{G}$) *dans tout entourage d'un point arbitraire p il existe une région R qui contient p et dont la frontière est une courbe simple fermée* [3]).

1. Démonstration du théorème de Jordan.

Soit K une courbe simple fermée. K n'étant pas uni-cohérent, il résulte de $\mathfrak{J}$ que K *coupe* l'espace.

[1]) en vertu du théorème suivant de Mme Nikodym: Q étant un continu Péanien situé dans un espace Péanien et R une région-composante de $1 - Q$, l'ensemble $1 - R$ est un continu Péanien. (Fund. Math. XII, p. 243, cor. 3).

[2]) Math. Ann. 98 (1928, p. 352.

[3]) Evidemment la propriété $\mathfrak{G}$ et plus restrictive pue $\mathfrak{C}$. Or, il importe de remarquer que le plan projectif possède les deux propriétés: $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{A}$, ce qui prouve que, dans notre théorème, la propriété $\mathfrak{J}$ ne peut pas être remplacée par $\mathfrak{A}$ même si l'on remplaçait $\mathfrak{C}$ par $\mathfrak{G}$.

K constitue *la frontière commune* de toutes les régions-composantes de son complémentaire, car s'il n'en était pas ainsi, K contiendrait un arc simple qui coupe l'espace, ce qui est impossible — comme on déduit très facilement [1]) de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{C}$.

Il reste à prouver que le nombre des régions en lesquelles K coupe l'espace est *deux*.

Supposons, par contre, qu'il existe trois régions-composantes différentes R_1, R_2 et R_3 dans $1 - K$. On a donc

$$(1) \qquad K = F(R_1) = F(R_2) = F(R_3).$$

Soit C un arc simple plongé dans R_1 et ayant ses extrémités a et b, situés sur K [2]). On a par suite:

$$(2) \qquad C \subset \overline{R}_1$$

et le produit CK se compose des deux points: a et b.

Soient acb et adb les deux arcs de K déterminés par a et b. Considérons les deux ensembles fermés: $acb + C$ et $adb + C$.

Soient $p_2 \varepsilon R_2$ et $p_3 \varepsilon R_3$. Aucun des deux ensembles considérés n'est un $\mathfrak{S}(p_2, p_3)$; car, en vertu de (1): $c \varepsilon F(R_2) . F(R_3)$ et $d \varepsilon F(R_2) . F(R_3)$, donc chacun des ensembles: $S_1 = R_2 + c + R_3$ et $S_2 = R_2 + d + R_3$ est connexe, unit p_2 et p_3 et selon (2):

$$S_1(adb + C) = 0 = S_2(acb + C).$$

D'autre part, le produit des ensembles $acb + C$ et $adb + C$ est un continu (comme égal à C). Donc, selon $\mathcal{J}_1$, leur somme n'est nonplus un $\mathfrak{S}(p_2, p_3)$. Mais ceci est impossible, car la somme $acb + C + adb$ contient la courbe K, qui, par hypothèse, coupe l'espace entre p_2 et p_3.

2. Démonstration de la proposition $\mathcal{G}$.

Remarquons d'obord que la propriété suivante, moins restrictive que $\mathcal{G}$, appartient à chaque espace Péanien:

(γ) *dans tout entourage d'un point p qui ne coupe pas l'espace, il*

[1]) Voir ma note *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, Fund. Math. XII, p. 228.

[2]) Un tel arc existe, car en général, si R est une région d'un espace Péanien et si $F(R)$ contient deux points différents x et y, il existe un arc simple qui est contenu dans R, abstraction faite de ses extrémités qui appartiennent à $F(R)$ (et dont les distances de x et y resp. sont aussi petites qu'on le veut).

existe une région A qui contient p et dont le complémentaire est un continu [1]).

Soit, en effet, G un ensemble ouvert arbitraire contenant p. L'ensemble fermé $1 - G$ est donc contenu dans la région $1 - p$. On en conclut [2]) l'existence d'un continu C tel que

$$1 - G \subset C \subset 1 - p.$$

Soit A la région-composante de $1 - C$ qui contient p. L'espace étant Péanien, $1 - A$ est un continu [3]). En outre:

$$p \varepsilon A \subset 1 - C \subset G.$$

La proposition (γ) établie, soit A un entourage arbitraire de p. On peut donc admettre que A est une région et $1 - A$ un continu (contenant plus d'un point).

La frontière $F(A)$ ne se réduisant pas à un seul point (selon $\mathcal{C}$), il existe un arc simple ab plongé dans A, abstraction faite de ses extrémités qui appartiennent à $1 - A$ [4]).

Il peut arriver que le point p appartienne à cet arc. Sinon [5]) — on peut unir p à ab par un arc pp' situé dans A et n'ayant en commun avec ab que le point p'. Désignons par T le „triode" $ab + pp'$ (d'ailleurs, dans le premier cas, pp' se réduit à un point).

[1]) Dans le cas, où l'espace est uni-cohérent, $F(A)$ est, selon $\mathfrak{A}_1$, un continu; l'analogie entre γ et $\mathcal{G}$ devient, dans ce cas, encore plus étroite.

[2]) en vertu du théorème suivant de M. R. L. Wilder: *si, dans un espace Péanien, F est un sous-ensemble fermé d'une région H, il existe un continu C tel que $F \subset C \subset H$.* Bull. Amer. Math. Soc. 34 (1928), p. 652, th. 5.

Ce théorème peut être déduit du fait que H, comme semi-continu qui est une différence de deux ensembles fermés, est somme d'une série de continus croissants: $H = K_1 + K_2 + \dots K_n + \dots$ (v. ma note de Fund. Math. V, p. 120). En effet, soit R_n une région telle que: $K_n \subset R_n$ et $\overline{R}_n \subset H$. Comme $H = R_1 + R_2 + \dots + R_n + \dots$, il existe selon le théorème de Heine-Borel, un indice k tel que $F \subset R_1 + \dots + R_k$. L'ensemble $C = \overline{R}_1 + \dots + \overline{R}_k$ est le continu demandé.

Comme le prouve M. Wilder, le continu C peut toujours être supposé Péanien. Il en résulte, en vertu du théorème cité de Mme Nikodym (p. 313, note [1])), que dans la proposition (γ) on peut ajouter l'adjectif *Péanien* au terme continu.

[3]) V. ma note précitée, Fund. Math. V, p. 113.

[4]) voir p. 314, note [2]).

[5]) On peut éviter ce dernier cas en s'appuyant sur la proposition suivante que M. Ayres m'a aimablement communiquée et dont la démonstration paraîtra prochainement: dans un espace Péanien satisfaisant à la condition $\mathcal{C}$ tous deux points se laissent unir par une courbe simple fermée.

Le produit $T.(1-A)$ n'étant pas un continu (comme composé de deux points: a et b), la somme $T+1-A$ coupe l'espace (en vertu de $\mathfrak{J}$). Soient M et N deux régions entre lesquelles cette somme coupe l'espace; il vient

(3) $$M+N \subset A-T$$

(4) $$F(M)+F(N) \subset T+1-A.$$

Je dis que $F(M)$ contient des points intérieurs de l'arc $p'a$ (c'est-à-dire des points distincts de p' et de a).

En effet, en cas contraire, on aurait (selon (4)):

$$F(M) \subset bp+1-A.$$

Le produit de bp et de $1-A$ se réduisant au point b, on conclut de $\mathfrak{J}_1$ que soit bp soit $1-A$ coupe l'espace entre M et N (puisque $F(M)$ le coupe). Cela présente une contradiction avec la propriété établie des arcs simples de ne pas être coupures et avec la formule (3), d'après laquelle $1-A$ ne coupe pas l'espace entre M et N (puisque $M+N \subset A$).

Il est donc établi que $F(M)$ contient des points intérieurs de l'arc $p'a$ et — par raison de symétrie — des points intérieurs de $p'b$. On peut, par conséquent, unir un point intérieur de $p'a$ à un de $p'b$ par un arc $a_1 m b_1$ plongé dans M [1]); d'une façon analogue, il existe un arc $a_2 n b_2$ plongé dans N qui unit aussi deux points intérieurs des arcs $p'a$ et $p'b$.

Soit K la courbe simple fermée:

$$K = a_1 m b_1 + b_1 b_2 + b_2 n a_2 + a_2 a_1$$

($b_1 b_2$ et $a_2 a_1$ désignant des sous-arcs de $p'b$ et de $p'a$ resp.).

Soit R la région du complémentaire de K qui contient p. Je dis que R est la région cherchée.

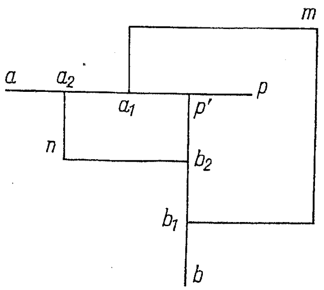
Comme en vertu du théorème de Jordan, on a

(5) $$F(R) = K,$$

il reste à prouver que

(6) $$R \subset A.$$

Désignons par S la deuxième des deux régions déterminées par K. On



[1]) voir p. 314, note [2]).

a donc (cf. form (5)): $F(S) = K$. Par conséquent, l'ensemble $S+m+n$ est connexe. Or, m et n désignant deux points intérieurs des arcs $a_1 m b_1$ et $a_2 n b_2$, il vient $m \varepsilon M$, $n \varepsilon N$. On en conclut que $S.F(M) \neq 0$, d'où, en vertu de (4):

(7) $$S(T+1-A) \neq 0.$$

Désignons par D et E resp. les arcs issus de a et de b (resp.) situés dans T et plongés dans $1-K$ sauf une extrémité qui appartient à K (ce sont les arcs aa_2 et bb_1, lorsqu'on admet la disposition des points d'accord avec la figure). Evidemment:

(8) $$T-(D+E) \subset \overline{R}.$$

Or, supposons, contrairement à l'inclusion (6) que

(9) $$R(1-A) \neq 0.$$

Comme, par définition de K, on a $K \subset A$, donc $K(1-A)=0$, il vient en vertu de (5): $F(R).(1-A)=0$. L'ensemble $1-A$ étant un continu, on conclut de là, conformément à (9), que

(10) $$1-A \subset R.$$

Les arcs D et E ayant des points communs avec $1-A$ (notamment a et b), on a donc $DR \neq 0 \neq ER$ et on conclut de leur définition que $D+E \subset \overline{R}$. Il vient, en raison de (8) et (10): $T+1-A \subset \overline{R}$ et, comme $S \subset 1-\overline{R}$, on a finalement

$$S(T+1-A)=0,$$

contrairement à (7).

La contradiction demandée est ainsi établie. De là résulte l'inclusion (6), c. q. f. d.

§ 4 Application aux décompositions semi-continues.

Etant donnée une fonction $y=f(x)$ continue qui transforme un espace métrique compact A en un espace H, on appelle *décomposition semi-continue* la décomposition de A en ensembles $\underset{x}{E}[f(x)=y_0]$, où y_0 parcourt l'ensemble des valeurs de la fonction $f(x)$ [1]).

Considérons les décompositions semi-continues en „tranches"-continus. Il importe de remarquer que pour les espaces Péaniens *la propriété de Janiszewski est invariante par rapport aux dé-*

[1]) Cf. R. L. Moore, Proc. Nat. Ac. Sc. 10 (1924) et Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925); P. Alexandroff, Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 28 (1925); ma note *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. XI.

compositions de ce genre; plus précisément: A étant un espace Péanien décomposé en continus d'une façon semi-continue, si A jouit de la propriété $\mathfrak{F}$, „l'hyper-espace" H en jouit également.

Soit, en effet, R une région dans l'hyper-espace H et soit $H - R$ un continu. R et $H - R$ sont donc respectivement des images d'une région R_1 de l'espace A et d'un continu $A - R_1$ [1]). En vertu de $\mathfrak{F}$, $A - R_1$ est uni-cohérent. Or, l'uni-cohérence étant un invariant des décompositions considérées [2]), il résulte que $H - R$ est uni-cohérent, c. q. f. d.

De là résulte directement le théorème de M. R. L. Moore, d'après lequel, *si l'on décompose d'une façon semi-continue la surface d'une sphère en (vrais) sous-continus qui ne coupent pas cette surface, l'hyper-espace lui est homéomorphe* [3]).

Car, l'hypothèse de M. R. L. Moore équivaut à l'hypothèse que l'hyper-espace possède la propriété $\mathfrak{C}$. L'hyper-espace est donc Péanien (comme image continue de la surface sphérique) et possède les propriétés $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{C}$, — il est, par conséquent, homéomorphe à la surface de la sphère.

Remarquons encore qu'en appliquant le théorème de M. R. L. Moore, on démontre d'une façon très simple le théorème connu [4]) suivant: *une région située sur la surface de la sphère est homéomorphe à cette surface diminuée d'un ensemble punctiforme fermé.*

Soit, en effet, R la région considérée. Décomposons la surface de la sphère en considérant comme tranches les composantes de $1 - R$ et les points individuels de R. C'est une décomposition semi-continue [5]) en tranches dont aucune n'est une coupure [6]). Selon le théorème de M. R. L. Moore, l'hyper-espace de cette décomposition est homéomorphe à la surface de la sphère. Dans la transformation considérée de l'espace en l'hyper-espace, l'ensemble $1 - R$, comme décomposé en composantes, se transforme en un ensemble punctiforme, fermé [1]). Enfin R se transforme par homéomorphie.

[1]) d'après les théorèmes IV, 8° et X de ma note précitée. [Dans le théor. IX après le mot continu le terme „plan" est omis].

[2]) ibid. cor. 2, 4° du théor. X. Cf. Vietoris, Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam 29 (1926).

[3]) Trans. Amer. Math. Soc. 27 (1925).

[4]) Voir, p. ex., v. Kerékjártó, Topologie I, chap. III. Berlin 1923.

[5]) voir ma note précitée, p. 169. Cf. R. L. Moore, l. cit. p. 427.

[6]) d'après le théorème général suivant: R étant un sous-ensemble connexe d'un espace connexe et S une composante de $1 - R$, $1 - S$ est connexe. Voir la note de M. Knaster et moi de Fund. Math. II, théor. X.

[1]) Cf. L. E. J. Brouwer, Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam 12 (1910). Cf. ma note de Fund. Math. XI, p. 184.

Über Funktionen, deren Felder Gruppen mit Rücksicht auf diese Funktionen sind.

Von

Stanisław Leśniewski (Warszawa).

Ich sage hier, dass die Gegenstände, die einer gegebenen Funktion f genügen, eine Gruppe mit Rücksicht auf eine gegebene Funktion φ bilden, dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind [1]):

a) $[A, B]: f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(A, B, C)$

b) $[A, B, C, D]: f(A) . f(B) . f(C) . f(D) . \varphi(A, B, C) . \varphi(A, B, D) . \supset . C = D$

c) $[A, B]: f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(A, C, B)$

d) $[A, B, C, D]: f(A) . f(B) . f(C) . f(D) . \varphi(A, C, B) . \varphi(A, D, B) . \supset . C = D$

e) $[A, B]: f(A) . f(B) . \supset . [\exists C] . f(C) . \varphi(C, A, B)$

[1]) Im Zusammenhang mit dem Inhalt dieser Bedingungen vgl.: 1) H. Weber. *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie. Mathematische Annalen.* 43. Band. 1893. SS. 522 und 523. 2) Edward V. Huntington. *Note on the definitions of abstract groups and fields by sets of independent postulates. Transactions of the American Mathematical Society.* Volume 6. 1905. S. 192. — Im Zusammenhang mit den unten auftretenden Ausdrücken vom Typus „$\varphi(A, B, C)$" vgl.: Maxime Bôcher. *The fundamental conceptions and methods of mathematics. Address delivered before the Department of Mathematics of the International Congress of Arts and Science, St. Louis, September 20, 1904. Bulletin of the American Mathematical Society.* Vol. XI. October 1904 to July 1905. 1905. S. 126. — Im Zusammenhang mit den in meiner Mitteilung angewandten „logistischen" Symbolen vgl.: Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica.* Volume I. Second edition. Cambridge. 1925. SS. 6, 7, 9—11 und 15.