Eine Bemerkung zu der Arbeit von Fräulein S. Weinlös: »Sur l'indépendance des axiomes de coïncidence et de la parallélité...«

Von

A. Rosenthal (Heidelberg).

In ihrer interessanten Arbeit Fund. math. 11 (1928), S. 206/221, hat Fräulein S. Weinlös auf S. 218 über meine Note Math. Ann. 69 (1910), S. 223/6, [„Über das dritte Hilbertsche Axiom der Verknüpfung"] eine Bemerkung gemacht, die geeignet ist, zu Missverständnissen Anlass zu geben. Die Verfasserin sagt dort, eine von ihr aufgestellte Geometrie zeige, dass mein Beweis „insuffisante" sei, „si nous comprenons l'ax. I 7 de Hilbert, comme il est interprété dans le système (S)". Dem ist jedoch nicht so; und deshalb möchte ich mir gestatten, den Sachverhalt hier klar zu stellen.

In meiner Note hatte ich ganz bewusst und explizit von der Forderung an das Axiomensystem Gebrauch gemacht, dass der Vordersatz jedes Axioms mindestens einmal erfüllt sein solle. Diese „Erfüllbarkeits-Forderung" [1]) erscheint als eine Folge der Forderung der Einfachheit des Axiomensystems [1a]). In der Tat, wenn ein bestimmter Gegenstandsbereich durch ein Axiomensystem gefasst werden soll, so ist jedes nicht erfüllbare Axiom für diesen Gegenstandsbereich völlig bedeutungslos und überflüssig. Ich war mir jedoch wohl bewusst, dass diese Erfüllbarkeitsforderung nicht allgemeine

[1]) Die auch von R. Baldus, Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik, Karlsruhe 1924, S. 14 u. 41/42, gestellt wird.

[1a]) *Zusatz bei der Korrektur:* Mit Rücksicht auf die nachfolgenden „Remarques..." von Frl. Weinlös sei noch hervorgehoben, dass die „Erfüllbarkeitsforderung" [ähnlich wie die Forderung der Unabhängigkeit der Axiome] sich nur auf Axiome und nicht auf Theoreme beziehen soll. (Ich habe wie die Absicht gehabt, eine von der Russelschen Logik abweichende Logik aufstellen zu wollen).

Zustimmung finden werde, und Frl. W. wendet sich auch ganz besonders gegen diese Forderung; (ich selbst würde es wohl auch beim Bau eines Axiomensystems vorziehen, die Existenzforderungen nicht indirekt mit Hilfe der Erfüllbarkeitsforderung, sondern explizit durch Existenzaxiome einzuführen, — aber jedenfalls so, dass die Erfüllbarkeitsforderung nirgends verletzt wird). Deshalb habe ich damals a. a. O., S. 225 Fussnote, ausdrücklich folgendes gesagt: „Wollte man diesen Schluss *nicht* machen, so müsste man für unseren Beweis noch besonders voraussetzen, dass es mindestens in einer einzigen Ebene wenigstens zwei Punkte gibt" [2]). Aber in jedem Falle ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung des Hilbertschen Axioms I 3.

An der betreffenden Stelle meines Beweises braucht man die Aussage, dass nicht sämtliche Punkte auf einer Geraden liegen. Die ganze Schwierigkeit an jener Stelle war dadurch entstanden, dass (ohne Erfüllbarkeitsforderung) das Hilbertsche Axiom I 8 einer Ergänzung bedarf. In einer Fussnote einer späteren Arbeit, Math. Ann. 71 (1912), S 264, habe ich auf diese kleine Unvollständigkeit von I 8 hingewiesen: „Um im Hilbertschen Axiomensystem [3]), auf die Existenz von drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten schliessen zu können, muss man (wenn man nicht eine allgemeine Forderung an die Beschaffenheit von Axiomensystemen hinzunehmen will) das Verknüpfungsaxiom I 8 in der folgenden Weise ergänzen: I 8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene *oder in einer Geraden* gelegene Punkte" [4]) Man kann auch sagen: Ohne Erfüllbarkeitsforderung oder ohne jene Ergänzung von I 8 ist im Hilbertschen System die Existenz von Ebenen zunächst nicht gesichert [5]) [wenn man sie nicht erst nachträglich mittels des Vollständigkeitsaxioms erzwingen wollte [6]), was wohl nicht im Sinn des

[2]) Übrigens wird damit auch die in Fussnote [3]) auf S. 218 von Frl. Weinlös gemachte, das Vollständigkeitsaxiom betreffende Bemerkung hinfällig.

[3]) Gemeint ist: ohne Vollständigkeitsaxiom; vgl. das hier Nachfolgende.

[4]) Die kursiv gedruckten Worte sind zu I 8 hinzugefügt.

[5]) Die von Herrn H. Steinhaus angegebene Modifikation des Hilbertschen Axiomensystems wird von dem eben Gesagten wegen der abgeänderten Fassung von I 4 nicht berührt; vgl. Fund. math. 11 (1928), S. 207.

[6]) Dann aber liesse sich im Hilbertschen System I 8 überhaupt entbehren und mittels des Vollständigkeitaxioms herleiten. [Zusatz bei der Korrektur: Vgl. dazu auch eine Bemerkung in einer kürzlich erschienenen Arbeit von R. Baldus, Math. Ann. 100 (1928), S. 332].

Aufbaus dieses Axiomensystems gelegen sein dürfte]. Beispiel: Es sollen nur Punkte *einer* Geraden und überhaupt keine Ebenen existieren. — Ist I 8 in der angegebenen Weise ergänzt, so ergibt sich ohne irgend eine Zusatzforderung die behauptete Reduzierung von I 3.

Mit dem Vorstehenden stimmt durchaus überein, dass in der von Frl. Weinlös a. a. O. aufgestellten Geometrie 1) die Erfüllbarkeitsforderung nicht befriedigt ist, 2) in jeder Ebene nur ein einziger Punkt enthalten ist, 3) alle Punkte auf *einer* Geraden liegen

---

Une caractérisation topologique de la surface de la sphère [1]).

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Appelons espace Péanien [2]) tout espace métrique qui est une image continue de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Je vais prouver que, au point de vue topologique, la surface de la sphère est, parmi les espaces Péaniens (contenant plus d'un point), caractérisée par les deux propriétés suivantes:

1°: propriété de l'espace d'être *cyclique* [3]), c.-à.-d. que

($\mathcal{C}$) *aucun point ne coupe l'espace,*

2°: propriété de Janiszewski:

($\mathcal{J}$) *si C est un continu qui ne coupe pas l'espace, C est uni-cohérent* [4]), *c'est-à-dire que pour toute décomposition de C en deux continus K et L, le produit KL est un continu* [5]).

Le fait que la surface de la sphère jouit de la propriété $\mathcal{C}$ est

[1]) Les principaux résultats de cette note ont été présentés à la Société Polonaise de Mathématique (Section de Varsovie) à la séance du 22. VI. 1928.

[2]) D'accord avec M. Rosenthal (Math. Zeitschr. 10, 1921). Dans le même sens fut souvent employé dans ce Journal le terme „continu (ou courbe) de Jordan", qui chez d'autres auteurs a un sens différent.

D'après le théorème de Hahn-Mazurkiewicz, les espaces Péaniens sont caractérisés par les trois propriétés: compacticité, connexité et connexité locale.

[3]) dans la terminologie des mathématiciens américains.

[4]) continu „ohne Henkel" au sens de M. Vietoris, Proc. K. Akad. Wet., Amsterdam, 29 (1926).

[5]) Ce théorème peut servir de base pour l'axiomatique de la topologie de la surface sphérique. Je l'ai exposé dans une Communication faite au Congrès Int. des Mathématiciens à Bologne.