Sur les fonctions conjuguées.

Par

A. Zygmund (Varsovie).

1. Soit $f(x)$ une fonction de période 2π, intégrable [1]) dans $(0, 2\pi)$ On appelle conjuguée à la série de Fourier

(1) $$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

la série

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx).$$

Nous désignons les séries (1) et (2) respectivement par $\mathfrak{S}(f)$ et $\overline{\mathfrak{S}}(f)$. On sait que la série (1) est presque partout sommable $(C, 1)$ vers $f(x)$. La série (2) est également presque partout sommable $(C, 1)$ [2]) vers une fonction que nous désignons par $\bar{f}(x)$. La fonction $\bar{f}(x)$ n'est pas nécessairement intégrable, donc la série (2) n'est pas en général celle de Fourier. On obtient l'exemple le plus simple en considérant la série de Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\lg n}.$$

Par la méthode de condensation des singularités on obtient les fonctions $\bar{f}(x)$ non intégrables dans aucun intervalle [3]).

[1]) Nous employons le terme „intégrable" toujours au sens de M. Lebesgue.

[2]) Cf. J. Privaloff, L'intégrale de Cauchy, (en russe) Saratoff, 1918, voir aussi A. Plessner, Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Giessen, 1923.

[3]) N. Lusin, Intégrale et série trigonométrique (en russe), Moscou, 1915, pp. 1—240, spéc. pp. 190—192. Cf. aussi: A. Kolmogoroff: Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy, Fund. Math. 11 (1928).

2. Recemment M. Riesz [1]) a démontré que si la fonction f est intégrable de puissance $1+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, la fonction $\bar{f}$ est aussi intégrable [2]) et la série conjuguée est $\mathfrak{S}(\bar{f})$. Alors la question s'impose: quelles conditions concernant l'intégrabilité de f suffisent pour que la fonction $\bar{f}$ soit aussi intégrable et pour que l'on ait: $\overline{\mathfrak{S}}(f) = \mathfrak{S}(\bar{f})$? La reponse est donnée par les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. *Si la fonction f verifie la condition*

(3) $$\int_0^{2\pi} |f| \cdot \overset{+}{\log} |f| \, dx < \infty \text{ [3])},$$

la série conjuguée est $\mathfrak{S}(\bar{f})$.

Théorème 2. *Soit $\varepsilon(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ une fonction positive, bornée, tendant vers zéro pour $x \to \infty$ et d'ailleurs quelconque. On peut construire une fonction $f(x)$ telle qu'on a*

(4) $$\int_0^{2\pi} |f| \cdot \overset{+}{\log} |f| \cdot \varepsilon(|f|) \, dx < \infty$$

et cependant la fonction $\bar{f}(x)$ n'est pas intégrable.

La démonstration du théorème I est assez longue et il serait désirable de prouver ce théorème en suivant la voie plus courte.

§ 1.

3. Nous allons démontrer d'abord quelques lemmes.

Lemme α. Si $|f(\theta)| \leqslant 1$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$, on a:

(5) $$\int_0^{2\pi} e^{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)|\bar{f}(\theta)|} d\theta \leqslant \frac{2}{\sin \varepsilon}. \qquad (\varepsilon > 0)$$

Dans la démonstration nous nous servirons de la méthode de M. Marcel Riesz [4]).

[1]) M. Riesz, Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr. 27 (1927), pp. 218—244.

[2]) Même de puissance $1+\varepsilon$.

[3]) $\overset{+}{\log} x$ est égale à $\log x$ pour $x \geqslant 1$ et à zero ailleurs.

[4]) M. Riesz, loc. cit.

4. Posons

$$f(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)\,r^n;$$

$$\bar{f}(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\sin n\theta-b_n\cos n\theta)\,r^n$$

$$\varphi(z)=f(r,\theta)+i\bar{f}(r,\theta)\qquad (z=re^{i\theta}).$$

et considérons l'intégrale complexe $(0<r<1)$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} e^{-i\varphi(z)\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}\frac{dz}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)[\bar{f}(r,\theta)-if(r,\theta)]}\,d\theta=e^{-\frac{ia_0}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}.$$

En prenant la partie relle, on obtient:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\bar{f}(r,\theta)}\cos\left[f\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]d\theta\leqslant 1$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\varepsilon} e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\bar{f}(r,\theta)}\,d\theta\leqslant\frac{1}{\sin\varepsilon}. \tag{6}$$

L'inégalité (6) subsiste si l'on y remplace $\bar{f}$ par $-\bar{f}$. On a donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)|\bar{f}(r,\theta)|}\,d\theta<\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\bar{f}(r,\theta)}\,d\theta+ \tag{7}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\bar{f}(r,\theta)}\,d\theta\leqslant\frac{2}{\sin\varepsilon}.$$

On a pour presque tout θ la relation: $\bar{f}(r,\theta)\to\bar{f}(\theta)$ et en tenant compte de la proposition connue de M. Fatou on déduit de (7) l'inégalité (5).

c. q. f. d.

5. Lemme β. *La condition nécessaire et suffisante pourqu'une série*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{8}$$

soit celle de Fourier d'une fonction intégrable, est que pour toute fonction bornée $h(x)$ $(0\leqslant x<2\pi)$.

$$h(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx) \tag{9}$$

la série

$$\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n) \tag{10}$$

soit sommable $(C,1)$.

Cette proposition est connue [1]). La nécessité est évidente. Voici les principes de la démonstration de la suffissance. Désignons par $\sigma_n(x)$ les moyennes arithmétiques de la série (8). Comme, d'après l'hypothèse, la limite

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\sigma_n(x)\,h(x)\,dx$$

existe pour toute fonction $h(x)$ bornée, on en conclut, d'après un théorème de M. Hahn [2]), que

$$\int_0^{2\pi}|\sigma_n(x)|\,dx=O(1),$$

donc, la série (8) s'obtient par la différentiation formelle de $\mathfrak{S}(F)$, où $F(x)$ est à variation bornée. On démontre ensuite que $F(x)$ est absolument continue [3]).

c. q. f. d.

Nous appelons la série (10) celle de Parseval pour les séries (8) et (9). Comme la série de Parseval formée pour les séries conjuguées aux (8) et (9) ne diffère de (10) que par le terme $\frac{1}{2}a_0\alpha_0$, on peut énoncer le lemme β sous la forme suivante:

Lemme β'. *La condition nécessaire et suffisante pour que la série (8) soit celle de Fourier d'une fonction intégrable, est que la série de Parseval formée pour les séries conjugués à (8) et à (9) soit sommable $(C,1)$ quelle que soit la fonction bornée $h(x)$.*

[1]) H. Steinhaus, Sur les développements orthogonaux, Bull. de l'Acad. Polonaise, 1926, p. 11—39.

[2]) H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatshefte für Math. und Phys. 32 (1922) pp. 1—88, spéc. p. 44.

[3]) H. Hahn, loc. cit. p. 45 sq.

6. Soit $\varphi(t)$ une fonction non négative, définie pour $t \geqslant 0$. Nous dirons que la fonction $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ appartient à L_φ si

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f|)\, dx < \infty.$$

Lemme γ. *La condition nécessaire et suffisante pour que la série* (8) *soit celle de Fourier d'une fonction appartenant à L_φ, où $\varphi(t)$ $(t \geqslant 0)$ est une fonction non négative, convexe, finie et vérifiant pour $x \to \infty$ la condition $\frac{\varphi(x)}{x} \to \infty$, est que*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|\sigma_n|)\, dx = O(1), \tag{11}$$

où σ_n sont les moyennes arithmétiques de la série (8).

Cette proposition a été démontré par M. H. Young [1]), qui a fait d'ailleurs quelques conditions superflues relatives à la fonction φ. La démonstration s'appuye sur l'inégalité de Jensen [2]) pour les intégrales:

$$\varphi\left[\frac{\int_a^b f(t)\,p(t)\,dt}{\int_a^b p(t)\,dt}\right] \leqslant \frac{\int_a^b p(t)\,\varphi(f(t))\,dt}{\int_a^b p(t)\,dt}$$

où $p(t) \geqslant 0$.

7. La condition et nécessaire. En effet, en désignant par $K_n(t)$ le noyau non négative de M. Fejér, on a

$$\sigma_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x+t)\, K_n(t)\, dt, \qquad \int_0^{2\pi} K_n(t)\, dt = 1.$$

La fonction convexe $\varphi(t)$ est non décroissante pour $t \geqslant t_0$. Supposons d'abord que $t_0 = 0$.

On a alors:

$$\varphi(|\sigma_n|) \leqslant \varphi\left[\frac{\int_0^{2\pi} |f(x+t)|\, K_n(t)\, dt}{\int_0^{2\pi} K_n(t)\, dt}\right] \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(|f(x+t)|)\, K_n(t)\, dt \tag{12}$$

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|\sigma_n|)\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} dx \int_0^{2\pi} \varphi(|f(x+t)|)\,.\,K_n(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \varphi(|f(t)|)\, dt. \tag{13}$$

Si $t_0 > 0$, on peut écrire

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|\sigma_n|)\, dx = \int_{E_1} + \int_{E_2} = A + B$$

où E_1 désigne l'ensemble de points x dans lesquels $|\sigma_n| \geqslant t_0$, et E_2 l'ensemble complementaire. Pour x appartenant à E_1 on a (12), donc d'après (13), $A = O(1)$. La quantité B est plus petite que $2\pi . \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \varphi(t)$.

8. La condition est suffisante. Désignons par M la borne supérieure des intégrales (11). D'après l'inégalité de Jensen on a

$$\varphi\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\sigma_n|\, dx\right) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(|\sigma_n|)\, dx \leqslant \frac{1}{2\pi} M,$$

donc,

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n|\, dx = O(1).$$

On en conclut que la série (8) s'obtient par la différentation formelle de $\mathfrak{S}(F)$ où $F(x)$ est une fonction à variation bornée. Pour démontrer que $F(x)$ est absolument continue il suffit de prouver ques les fonctions $\int_0^x \sigma_n(t)\, dt$, qui tendent vers $F(x) - F(0)$, sont uniformément absolument continues. En d'autres termes: il suffit de prouver, qu'en désignant par Σ un système arbitraire d'intervalles n'empietants pas l'un sur l'autre, et par $|\Sigma|$ son mesure, on a uniformément pour toutes les valeurs de n:

$$\lim_{|\Sigma| \to 0} \int_\Sigma |\sigma_n(t)|\, dt = 0.$$

De l'inégalité

$$\varphi\left(\frac{1}{|\Sigma|} \int_\Sigma |\sigma_n|\, dx\right) \leqslant \frac{\int_0^{2\pi} \varphi(|\sigma_n|)\, dx}{|\Sigma|} \leqslant \frac{M}{|\Sigma|}$$

[1]) W. H. Young, On successions with subsequences converging to an integral, Proc. London Math. Soc. **24** (1926) pp. 1—20.

[2]) Cf. par exemple: Pólya und Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 1 (1925), Berlin, pp. 53 et 269, problème 75. Les auteurs employent l'intégrale au sens de Riemann, mais comme on voit facilement le théorème subsiste aussi pour l'intégrale de M. Lebesgue.

on obtient

(14) $$\int_{\Sigma} |\sigma_n|\, dx \,.\, \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \leqslant M \quad \text{où} \quad \xi = \frac{\int_{\Sigma} |\sigma_n|\, dx}{|\Sigma|}.$$

Si pour une suite de systèmes Σ_k, tels que $|\Sigma_k| \to 0$ et pour une suite d'indices n_k on avait

(15) $$\lim \int_{\Sigma_k} |\sigma_{n_k}|\, dx > 0, \quad \text{donc} \quad \lim \xi = \infty,$$

on obtiendrait de (14) $\left(\text{en tenant compte de ce que } \frac{\varphi(\xi)}{\xi} \to \infty\right)$ que

$$\lim \int_{\Sigma_k} |\sigma_{n_k}|\, dx = 0$$

ce qui contredit à (15). La série considerée est donc $\mathfrak{S}(f)$, ou $f = F'$. Comme on a presque partout: $\sigma_n \to f$, on obtient de (11). d'après le lemme de M. Fatou que f appartient à L_φ.

9. Supposons de plus $\varphi(0) = 0$ (d'où résulte que φ est non decroissante). On peut se démander si la relation suivante

(15 a) $$\int_0^{2\pi} \varphi(|f - \sigma_n|)\, dx \to 0$$

a lieu. En écrivant

$$|f - \sigma_n| \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x) - f(x+t)|\, K_n(t)\, dt$$

et en répétant le raisonnement de la première partie de la démonstration précédente, on obtiendrait (15 a) si l'on savait de démontrer que

(16) $$\lim_{t \to 0} \int_0^{2\pi} \varphi(|f(x+t) - f(x)|)\, dx = 0.$$

Cependant la relation (16) n'est pas vraie, car l'intégrale sous le signe de limite peut ne pas exister pour une certaine suite de valeurs de t tendant vers zéro, bien que f appartient à L_φ. Toute fois on démontre facilement la relation

(17) $$\lim_{t \to 0} \int_0^{2\pi} \varphi(\tfrac{1}{4}\, |f(x+t) - f(x)|)\, dx = 0.$$

En effet, soit $h(x)$ une fonction bornée telle que

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f - h|)\, dx < \varepsilon.$$

En posant $f = h + g$ et en tenant compte de ce que φ est convexe on a

$$\int_0^{2\pi} \varphi(\tfrac{1}{4}\, |f(x+t) - f(x)|)\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi(\tfrac{1}{2}\, |h(x+t) - h(x)|)\, dx + \\ + \int_0^{2\pi} \varphi(\tfrac{1}{2}\, |g(x+t) - g(x)|)\, dx,$$

où la première intégrale du second membre tend vers zéro [1]) et le second est plus petit que

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|g(x+t)|)\, dt + \int_0^{2\pi} \varphi(|g(x)|)\, dx < 2\varepsilon,$$

d'où résulte (17). En même temps nous avons prouvé que

(17 a) $$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \varphi(\tfrac{1}{4}\, |f - \sigma_n|)\, dx \to 0.$$

10. Rappellons encore une inégalité due a M. Young [2]). Soit $\xi(x)$ $(x \geqslant 0)$ une fonction non négative, non décroissante, telle que $\xi(0) = 0$. Soit $\eta(y)$ la fonction inverse de $\xi(x)$. On a alors pour tout $a, b \geqslant 0$:

(Y) $$ab \leqslant \int_0^a \xi(t)\, dt + \int_0^b \eta(t)\, dt.$$

La fonction ξ peut être discontinue dans certains points $x = x_0$ et dans ce cas pour définir $\eta(y)$ il faut ajouter à la courbe $y = \eta(x)$ les segments: $x = x_0$, $\xi(x_0 - 0) \leqslant y \leqslant \xi(x_0 + 0)$. De même nous pouvons supposer que dans certains intervalles $\xi(x)$ est constante. Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction convexe, non négative et s'éva-

[1]) De nos hypothèse résulte que φ est continue et que pour tout $0 \leqslant x \leqslant a$ on a $\varphi(x) \leqslant Mx$, où $M = M(a)$.

[2]) W. H. Young, On classes of summable functions and their Fourier series, Proc. Royal Soc. (A) 87 (1912), pp. 225—229.

nouissant pour $x=0$. Evidemment $\varphi'(a)$[1]) de même que $\varphi(x)$, est non négative et non décroissante. Soit $\varphi_1(x)$ une fonction définie par les conditions: $\varphi_1(0)=0$, $\varphi_1(x)=\varphi'(x)$ $(x>0)$. Désignons par $\psi(t)$ l'intégrale de 0 à t de la fonction $\psi_1(y)$ — inverse de φ_1. On aura d'après (Y):

$$(\mathrm{Y}_1) \qquad ab \leqslant \varphi(a)+\psi(b).$$

Nous appelons les fonctions φ et ψ — correspondantes.

11. Lemme δ. *Supposons que les fonctions $g(x)$ et $h(x)$ appartiennent respectivement à L_φ et L_ψ, où φ et ψ se correspondent. Soit*

$$(18) \qquad g(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$h(x) \sim \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

On a alors la formule de Parseval

$$(19) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)h(x)\,dx = \frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n+b_n\beta_n), \quad (C,1)$$

la série du second membre étant sommable $(C, 1)$.

Démonstration. De l'inégalité

$$\int_0^{2\pi}|gh|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi}\varphi(|g|)\,dx+\int_0^{2\pi}\psi(|h|)\,dx$$

résulte que le produit gh est intégrable. Désignons respectivement par I et S le premier et le second membre de l'inégalité (19). Posons $g(t)=g'(t)+g''(t)$, où $g'(t)$ est un polynome trigonométrique et

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\tfrac{1}{4}|g''|)\,dt<\varepsilon^2\text{[2]}).$$

[1]) φ' n'existe pas dans un ensemble de points au plus dénombrable.

[2]) D'après (17a) on peut prendre pour $g'(t)$ la moyenne arithmétique (avec l'indice assez élevé) de $\mathfrak{S}(g)$.

En désignant respectivement par a_n', b_n', a_n'', b_n'' les coéfficients de Fourier des fonctions g', g'', on peut écrire l'égalité (19) sous la forme

$$(20) \qquad I'+I''=\left[\frac{a_0'\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\alpha_n+b_n'\beta_n)\right]+$$

$$+\left[\frac{a_0''\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n''\alpha_n+b_n''\beta_n)\right],$$

où I', I'' s'obtient de I eu remplaçant g par g', g''. Evidemment les premiers termes du coté gauche et du côté droit sont égaux entre eux.

Soient σ_n'' les moyennes arithmétiques de la seconde série du côté droit dans (20) et $\sigma_n[h]$ les moyennes arithmétiques de $\mathfrak{S}(h)$. On a

$$|\tfrac{1}{16}(I''-\sigma_n'')| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\tfrac{1}{4}g''\cdot\tfrac{1}{4}(h-\sigma_n[h])|\,dx \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\tfrac{1}{4}|g''|)\,dx+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\tfrac{1}{4}|h-\sigma_n[h]|)\,dx,$$

donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|I''-\sigma_n''| \leqslant \frac{16}{\pi}\varepsilon.$$

Le nombre ε étant aussi petit que l'on veut, la démonstration du lemme est achevée.

Remarque. En particulier, en posant

$$\varphi(x)=e^x-x-1\sim e^x, \quad \psi(x)=(x+1)\lg(x+1)-x\sim x\lg x$$

on obtient le résultat suivant: la formule (19) a lieu, pourvu qu'on a

$$\int_0^{2\pi}e^{|g(x)|}\,dx<\infty, \quad \int_0^{2\pi}|h(x)|\cdot\overset{+}{\log}|h(x)|\,dx<\infty.$$

12. Maintenant nous pouvons démontrer le théorème 1. Supposons qu'il existe une fonction $f(x)$ vérifiant les hypothèses du théorème I et cependant $\overline{\mathfrak{S}}(f)$ n'est pas la série de Fourier. D'après le lemme β', on en déduit l'existence d'une fonction bornée $g(x)$,

telle que la série de Parseval formée pour $\mathfrak{S}(f)$ et $\mathfrak{S}(\tilde{g})$ n'est pas sommable $(C, 1)$. Mais d'après la remarque précédente et le lemme α ce n'est pas possible et le théorème est démontré.

13. Considérons dans l'intervalle $(0, \pi)$ la fonction $f(x) \geqslant 0$. De l'inégalité de M. Young résulte que si $f \overset{+}{\log} f$ est intégrable, la fonction $f.\log \frac{1}{x}$ l'est aussi.

Lemme ε. *Soit $\varepsilon(x)$ une fonction positive, bornée et tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$. On peut construire une fonction intégrable $f(x) \geqslant 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ telle que*

$$(21) \qquad 1^{\circ} \int_0^{\pi} f.\overset{+}{\log} f.\varepsilon(f).dx < \infty, \qquad 2^{\circ} \int_0^{\pi} f.\log\frac{1}{x}dx = \infty,$$

Démonstration. Pour $\varepsilon(x)$ donnée on peut construire une fonction $\eta(x)$ continue avec ses deux dérivées premières, tendant en décroissant vers zéro et telle qu'on a:

$$(22) \qquad \text{a) } \eta(x) > \varepsilon(x), \qquad \text{b) } \left[\log\frac{1}{\eta(x)}\right]' < 1.$$

Il suffit de démontrer le lemme ε modifiée, en y remplaçant $\varepsilon(x)$ par $\eta(x)$. Nous définissons la fonction $f(x)$ en posant dans l'intervalle $(0, \delta)$, où δ est un nombre positif suffisamment petit:

$$(23) \qquad f = -\frac{1}{x\lg^2 x}\cdot\frac{\eta'\left(\lg\lg\frac{1}{x}\right)}{\eta\left(\lg\lg\frac{1}{x}\right)}.$$

Pour x appartenant á l'intervalle (δ, π) nous posons $f(x) = f(\delta)$. On a alors

$$\int_0^{\delta} f.\lg\frac{1}{x}dx = -\int_0^{\delta} x^{-1}.\log^{-1}\frac{1}{x}.\frac{\eta'\left(\log\log\frac{1}{x}\right)}{\eta\left(\log\log\frac{1}{x}\right)} = -\int_{\log\log\frac{1}{\delta}}^{\infty}\frac{\eta'(t)}{\eta(t)}dt = \infty.$$

Désignons par E_1 l'ensemble de points de l'intervalle $(0, \delta)$ dans lesquels on a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \log\log\frac{1}{x}$$

et par E_2 l'ensemble complémentaire. On peut écrire

$$\int_0^{\delta} f.\overset{+}{\log} f.\eta(f)\,dx = \int_{E_1} + \int_{E_2} = A + B,$$

et l'intégrale A est évidemment finie. En tenant compte que pour les x de l'intervalle $(0, \delta)$ on a

$$0 \leqslant f < \frac{1}{x\lg^2 x}, \quad \text{donc} \quad \overset{+}{\log} f < \log\frac{1}{x},$$

on en déduit que pour x appartenant à E_2 on a

$$f.\overset{+}{\log} f.\eta(f) \leqslant f.\log\frac{1}{x}.\eta\left(\log\log\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x\log\frac{1}{x}}.\eta'\left(\log\log\frac{1}{x}\right).$$

Donc

$$B < -\int_{E_2}\frac{\eta'\left(\log\log\frac{1}{x}\right)}{x\log\frac{1}{x}}dx < -\int_0^{\delta}\frac{\eta'\left(\log\log\frac{1}{x}\right)}{x\log\frac{1}{x}}dx < \infty.$$

c. q. f. d.

14. Faisons encore une remarque (qui nous sera utile dans la suite) concernant la fonction $f(x)$ définie par (23): si l'on choisit convenablement la fonction $\eta(x)$ vérifiant (22), la fonction $f(x)$ sera décroissante dans l'intervalle $(0, \delta)$. En effet, considérons une fonction $\zeta(x)$ $(x \geqslant 0)$ continue, tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$, mais assez lentement pour que l'on ait:

1° $\int_0^x \zeta(t)\,dt \geqslant \lg\frac{1}{\varepsilon(x)}$;

2° $x.\zeta(x)$ tend (pour $x \geqslant x_0$) en croissant vers $+\infty$ (pour $x \to \infty$).

Posons

$$\eta(x) = e^{-\int_0^x \zeta(t)\,dt};$$

On démontre facilement l'existence des fonctions $\zeta(x)$ jouissant de propriétés démandées[1]). La fonction $f(x)$ est évidemment monotone dans le voisinage du point $x=0$.

15. Du lemme ε découle immédiatement le théorème 2. En effet, étant donnée la fonction $\varepsilon(x)$, on peut construire une fonction $f(x) \geqslant 0$ $(0 < x \leqslant \pi)$ pour laquelle on a (21). Posons $f(-x) = f(x)$ $(0 < x \leqslant \pi)$. Soit

$$d(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad \text{donc} \quad \bar{d}(x) \sim \lg \frac{1}{|x|} \quad (\text{pour } x \to 0).$$

En désignant par $\bar{\sigma}_n$ les moyennes arithmétiques de $\mathfrak{S}(\bar{d})$, on a, d'après (21, 2°):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\sigma}_n . f \, dx \to \infty.$$

La série de Parseval formée pour $\mathfrak{S}(f)$ et $\mathfrak{S}(\bar{d})$ n'est pas sommable $(C, 1)$, donc $\bar{\mathfrak{S}}(f)$ n'est pas la série de Fourier. D'après la définition de f et les propriétés de η, on voit que $\bar{\mathfrak{S}}(f)$ (qui ne contient que des sinus) converge partout. Si $\bar{f}$ serait intégrable, on avait d'après le théorèmes bien connus d'unicité: $\bar{\mathfrak{S}}(f) = \mathfrak{S}(\bar{f})$ ce qui est impossible[2]).

[1]) On peut par exemple procéder de la manière suivante. Nous pouvons supposer (en majorisant $\varepsilon(x)$ si cela est nécessaire) que la fonction $\frac{1}{\varepsilon(x)}$ possède la dérivée logarithmique $-\frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)} = \left[\log \frac{1}{\varepsilon(x)}\right]'$ positive et tendant vers zéro. Considérons la courbe monotone $y = \varphi(x)$, contenue (pour $x \geqslant x_0$) entre les deux courbes $y = x$, $y = -x . \frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}$ et telle que $\frac{\varphi(x)}{x} \to 0$. Il suffit de poser $\zeta(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$. En effet: 1° $x\zeta = \varphi$ tend en croissant vers $+\infty$; 2° $\int_0^x \zeta(t)\, dt \geqslant -\int_0^x \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} dt = \log \frac{1}{\varepsilon(x)} - \log \frac{1}{\varepsilon(0)} \geqslant \log \frac{1}{\varepsilon(x)}$ (comme le façon dont se comporte $\varepsilon(x)$ dans le voisinage du point $x=0$ n'est pas essentiel, nous pouvons toujous supposer que $\varepsilon(0) \geqslant 1$).

[2]) On peut aussi s'appuyer sur la proposition suivante:

Si $\bar{f}$ est intégrable on a $\bar{\mathfrak{S}}(f) = \mathfrak{S}(\bar{f})$. Cette proposition, démontrée par M. Kolmogoroff (voir Kolmogoroff loc. cit.) se déduit aussi d'un théorème général que voici:

Soit $\varphi(x)$ une fonction positive telle que $\frac{\varphi(x)}{x} \to +\infty$. (pour $x \to +\infty$).

§ 2.

16. Soit $F(x)$ une fonction de période 2π, absolument continue et telle que la fonction $f(x) = F'(x)$ est intégrable de puissance $1+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Comme on déduit immédiatement des inégalités de Hölder et de Hausdorff-Young[1]) la série $\mathfrak{S}(F)$ converge absolument[2]). Cependant on peut démontrer le théorème plus général:

Théorème 3. *Si la fonction $F(x)$, absolument continue et de période 2π vérfie la condition,*

$$\int_0^{2\pi} |f| . \overset{+}{\log} |f| . dx < \infty. \qquad (f = F') \tag{24}$$

la série $\mathfrak{S}(F)$ converge absolument.

Théorème 4. *Quelle que soit la fonction $\varepsilon(x)$ $(x \geqslant 0)$, positive, bornée et tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$, il existe une fonction $F(x)$ absolument continue et de période 2π, telle que $\mathfrak{S}(F)$ ne converge pas absolument, bien que*

$$\int_0^{2\pi} |f| . \overset{+}{\log} |f| . \varepsilon(|f|)\, dx < \infty. \qquad (f = F'). \tag{25}$$

17. Le théorème 3 résulte immédiatement du théorème 1 et du théorème de MM. Hardy et Littlewood[3]), d'après lequel la

Si les valeurs limites $f(e^{i\theta})$ d'une fonction $f(z)$ holomorphe pour $|z| < 1$ sont intégrables de puissance $\alpha > 0$ et si de plus

$$\int_0^{2\pi} \varphi (\overset{+}{\log} |f(r e^{i\theta})|\, d\theta = O(1)$$

on a alors

$$\int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^{\alpha}\, d\theta = O(1)$$

Pour $\varphi(x) = x$ la proposition cesse d'être vraie.

[1]) F. Hausdorff. Eine Ausdehnung der Parsevalschen Satzes über Fourierreihen, Math. Zeitschrift **16** (1923). pp. 163–169.

[2]) Cf. par exemple: L. Tonelli, Sulla convergenza assoluta delle serie di Fourier, Rend. Lincei (6a) **2** (1925), pp. 142–149.

[3]) Hardy and Littlewood. Some new properties of Fourier constants, Math. Ann **97** (1927) pp. 159–209.

série $\mathfrak{S}(F)$ converge absolument si F et $\bar{F}$ sont toutes deux à variation bornée. Nous donnons encore une démonstration du théorème 3, en nous appuyant sur le lemme suivant:

Lemme ζ. *Soit $g(x)$ $(0 \leqslant x < 2\pi)$ une fonction intégrable. Si les coefficients a_n, b_n de $\mathfrak{S}(g)$ vérifient l'inégalité*

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leqslant \frac{1}{n}. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

on a

$$\int_0^{2\pi} e^{c|g(x)|}\, dx < \infty \tag{26}$$

c désignant une constante absolue.

Nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $a_0 = a_1 = b_1 = 0$. En appliquant les inégalités de MM. Young-Hausdorff, on peut écrire pour $k \geqslant 2$:

$$\frac{c^k}{2\pi . k!} \int_0^{2\pi} |g|^k\, dx \leqslant \frac{c^k}{k!} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{k}{k-1}}} \right]^{k-1} \leqslant \frac{c^k}{k!} \cdot \left[\frac{1}{\frac{k}{k-1} - 1} \right]^{k-1} = c^k \cdot \frac{(k-1)^{k-1}}{k!}.$$

On déduit de cette inégalité, d'après la formule de Stirling, qu'il suffit de poser dans l'intégrale (26): $c = \frac{1}{e}$.

18. Supposons maintenant que le théorème (24) n'est pas vrai et désignons par $f(x)$ la fonction vérifiant (24) pour laquelle on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n| + |b_n|}{n} = \infty, \tag{27}$$

a_n, b_n désignant les coefficients de $\mathfrak{S}(f)$. Posons $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = n^{-1} \operatorname{sign} a_n$, $\beta_n = n^{-1} \operatorname{sign} b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Les quantités α_n, β_n sont les coefficients de $\mathfrak{S}(g)$, g vérifiant (26) où $c \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}e}$. Mais d'après le lemme δ, la série (27), qui est celle de Parseval pour $\mathfrak{S}(f)$ et $\mathfrak{S}(g)$ doit être sommable $(C, 1)$, ce qui contredit à (27).

19. Avant de passer à la démonstration du théorème 4 il nous est indispensable d'étudier les coefficients de $\mathfrak{S}(f)$ où f possède quelques propriétés de monotonie.

Lemme η. *Soit $f(x)$ une fonction positive, intégrable et décroissante dans $(0, \pi)$. Soit $f(-x) = f(x)$ $(0 < x \leqslant \pi)$. Posons*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx. \tag{28}$$

La condition nécessaire et suffisante de la convergence de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \tag{29}$$

est que la fonction $f(x) \log \frac{1}{x}$ soit intégrable.

Démonstration. Posons

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4n}} f(x) \cos nx\, dx + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4n}}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = a_n' + a_n''.$$

D'après le second théorème de la moyenne

$$|a_n''| \leqslant \frac{2}{\pi} \cdot f\left(\frac{\pi}{4n}\right) \cdot \frac{2}{n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n''|}{n} \leqslant \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{4n}\right) \cdot \frac{1}{n^2}$$

et comme $f(x)$ est monotone et intégrable la dernière série converge. Donc la convergence de la série (29) ne dépend que de la convergence de la série à termes (positifs) $\frac{a_n'}{n}$ On a:

$$|a_n'| = a_n' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4n}} f(x) \cos nx\, dx \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{4(k+1)}}^{\frac{\pi}{4k}} f(x)\, dx.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'}{n} \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{4(k+1)}}^{\frac{\pi}{4k}} f\left(\frac{\pi}{4(k+1)}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{4(k+1)}\right) \cdot \frac{1}{k(k+1)} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{4(k+1)}\right) \cdot \frac{\log k}{k(k+1)}$$

$$a_n' \geqslant \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4n}} f(x)\, dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n'}{n} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{4k}\right) \cdot \frac{\pi}{4k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{4k}\right) \cdot \frac{1}{k(k+1)} \cdot \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{4k}\right) \cdot \frac{\log k}{k(k+1)}.$$

Maintenant il suffit de remarquer que $f(x) \log \frac{1}{x}$ est positive et décroissante dans certain voisinage du point $x = 0$ et que la convergence chacune des séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{4k}\right) \cdot \frac{\log k}{k(k+1)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{\pi}{4(k+1)}\right) \cdot \frac{\log k}{k(k+1)}$$

est équivalente à l'intégrabilité de la fonction $f \log \frac{1}{x}$ c. q. f. d. [1].

Remarque. Evidemment le lemme subsiste si l'on suppose que $f(x)$ n'est décroissante que dans certain intervalle $(0\ \delta)$, en ajoutant par exemple la condition que f est bornée dans (δ, π). Ceci résulte du fait bien connu qu'en divisant le n'ième terme de $\mathfrak{S}(g)$ — où $g(x)$ est bornée — par n, on obtient la série absolument convergente.

20. Démonstration du théorème 4. D'après le lemme ε, pour la fonction donnée $\varepsilon(x)$, on peut construire une fonction $f(x)$ $(0 < x \leqslant \pi)$ positive et décroissante dans certain intervalle $(0, \delta)$, et qui vérifie les relations (21). En posant $f(-x) = f(x)$ $(0 < x \leqslant \pi)$ et

[1] La proposition analogue subsiste pour les fonctions impaires. Supposons que $g(x)$ est une fonction positive, intégrable et décroissante dans $(0, \pi)$. Posons $g(-x) = -g(x)$ $(0 < x \leqslant \pi)$ et soit

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Le raisonnement analogue à celui appliqué dans la démonstration du lemme η prouve que la série $\sum_1^{\infty} \frac{|b_n|}{n}$ converge. L'évaluation plus précise de constantes prouve en même temps que la proposition réciproque est également vraie, et l'on obtient ainsi le théorème suivant: *Soit $g(x)$ une fonction positive (ou bornée inférieurement) et décroissante dans $(0, \pi)$. Posons $g(-x) = -g(x)$ $(0 < x \leqslant \pi)$. Supposons de plus que la fonction $x\,g(x)$ est intégrable, de façon qu'on peut formellement developper $g(x)$ en série de Fourier:*

$$g(x) \sim \sum b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin nx\, dx.$$

La condition nécessaire et suffissante pour que la fonction f soit intégrable est que la série $\sum \frac{|b_n|}{n}$ soit convergente.

$$Ax + \int_0^x f(t)\, dt = F(x), \qquad (-\pi < x < \pi)$$

on obtient, d'après le lemme η, la fonction démandée. (A désignant une constante convenable).

§ 3.

Théorème 5. *Si $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ vérifie la condition $|f| \leqslant 1$, on a*

$$(30) \qquad \int_0^{2\pi} e^{c|s_n|} dx \leqslant M, \qquad \int_0^{2\pi} e^{c|\bar{s}_n|} dx \leqslant M,$$

où c et M sont des constantes absolues positives et s_n, $\bar{s}_n$ désignent respectivement les sommes partielles de $\mathfrak{S}(f)$ et $\overline{\mathfrak{S}}(f)$.

Pour la démonstration il suffit d'écrire:

$$s_n = \frac{\sin nx}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \frac{dt}{2 \operatorname{tg} \frac{x-t}{2}} - \frac{\cos nx}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) . \sin nt \frac{dt}{2 \operatorname{tg} \frac{x-t}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos n(x-t)\, dt = A + B + C$$

et de tenir compte que A, B, sont respectivement, aux facteurs bornés près, des fonctions conjuguées à $f(t) \cos nt$ et $f(t) \sin nt$. Donc, d'après le lemme α, on a

$$e^{c|s_n|} \leqslant e^{c|A| + c|B| + c} \leqslant \frac{e^c}{2} [e^{\frac{c}{2}|A|} + e^{\frac{c}{2}|B|}],$$

$$\int_0^{2\pi} e^{c|s_n|}\,dx \leqslant \frac{e^c}{2}\left[\int_0^{2\pi} e^{\frac{c}{2}|A|}\,dx + \int_0^{2\pi} e^{\frac{c}{2}|B|}\,dx\right] = O(1)$$

pourvu que $c < \frac{\pi}{4}$. De même on prouve la seconde des inégalités (30).

22. Le théorème 5 peut être enoncé sous la forme plus précise que voici:

Théorème 5′. *Si $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$ vérifie la condition $|f| \leqslant 1$, on a*

(31) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{c'|f-s_n|}\,dx \to 1, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{c'|\bar{f}-\bar{s}_n|}\,dx \to 1$$

où s_n et $\bar{s}_n$ sont les sommes partielles de $\mathfrak{S}(f)$ et $\mathfrak{S}(\bar{f})$ et c' est une constante absolue.

Pour la démonstration il suffit de s'appuyer sur l'inégalite $e^x - 1 \leqslant x e^x$ $(x \geqslant 0)$ et ensuite d'appliquer l'inégalité de Schwarz. En appliquant l'inégalité plus générale de Hölder, on obtient qu'on peut prendre pour c' le nombre arbitraire $< \frac{\pi}{4}$.

23. Soit $f(x)$ une fonction intégrable sur $(0, 2\pi)$ et $s_n[f]$ les sommes partielles de $\mathfrak{S}(f)$. On sait qu'en général la relation

(32) $$\int_0^{2\pi} |f - s_n[f]|\,dx \to 0$$

n'a pas lieu. Cependant on peut prouver le théorème suivant:

Théorème 6. *Si la fonction f vérifie la condition* (24), *on a* (32).

En désignant par $h(x)$ la fonction $\operatorname{sign} s_n$, on peut écrire en utilisant l'inégalité de M. Young:

(33) $$\int_0^{2\pi} |s_n[f]|\,dx = \int_0^{2\pi} s_n[f] . h(x)\,dx = \int_0^{2\pi} f . s_n[h]\,dx =$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{c'} f . s_n[c'h]\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{1}{c'}|f|\right)dx + \int_0^{2\pi} \psi(|s_n[c'h]|)\,dx,$$

où $\varphi(x) = (x+1)\lg(x+1) - x$, $\psi(x) = e^x - x - 1$; c' est la constante de la relation (31). Comme $\psi(x) \leqslant e^x - 1$ $(x \geqslant 0)$, la dernière intégrale dans (33) tend vers zéro,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |s_n[f]|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} [(c'^{-1}|f| + 1)\lg(c'^{-1}|f| + 1) - |f|]\,dx.$$

Posons $f = f_1 + f_2$ où f_1 est continue. On a alors

$$\int_0^{2\pi} |f - s_n[f]|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} |f_1 - s_n[f_1]|\,dx + \int_0^{2\pi} |f_2|\,dx + \int_0^{2\pi} |s_n[f_2]|\,dx,$$

(34) $$\varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |f - s_n[f]|\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} (c'^{-1}|f_2| + 1)\lg(c'^{-1}|f_2| + 1)\,dx$$

et le second terme dans (34) peut être aussi petit que l'on veut si l'on choisit convenablement la fonction f_2 [1]).

[1]) L'exemple de la série

$$\sum \frac{\cos nx}{(\log n)^{1-\delta}} \qquad (0 < \delta < 1)$$

prouve que la relation (32) n'est pas en général vraie si l'on suppose seulement que $|f| . \overset{+}{\log}{}^{1-\varepsilon} |f|$ est intégrable $(0 < \varepsilon < 1)$.

Probablement il existe le théorème analogue au théorème 4.