Satz II [16]. *Wenn die lipschitz'schen Flächen*

$$x = \varphi_m(u, v), \quad y = \psi_m(u, v); \quad z = \chi_m(u, v)$$

gegen eine lipschitz'sche Fläche

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

gleichmässig konvergieren, dann gilt

$$\iint\limits_{Q_0} \sqrt{\left[\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\psi,\chi)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\chi,\varphi)}{D(u,v)}\right]^2}\, du\, dv \leqq$$

$$\leqq \liminf_{m=\infty} \iint\limits_{Q_0} \sqrt{\left[\frac{D(\varphi_m,\psi_m)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\psi_m,\chi_m)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\chi_m,\varphi_m)}{D(u,v)}\right]^2}\, du\, dv \; {}^{17)}.$$

[16] Vgl. T. Rado: Über das Flächenmass rektifizierbarer Flächen. Math. Ann. Band 100.

[17] Diese überlegungen behalten ihre Gültigkeit für den n-dimensionalen Fall.

Sur un type infini de dimensions qui est localement fini.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans une note récemment parue [1] M. K. Kunugui, en résolvant une question proposée par M. Fréchet [2] a prouvé qu'il existe des espaces, dont les types de dimensions sont infinis et inférieurs à celui de l'espace (Ω) de M. Hilbert.

Un tel espace est, d'après M. Kunugui, la partie (ω) de l'espace (Ω) formée de tous les points de cet espace n'ayant qu'un nombre fini (ou nul) des coordonnées non nulles.

Le but de cette note est de construire *un espace E à un nombre infini de dimensions, tel que $dE < d\omega$.*

Les points de notre espace E seront déterminés par un nombre fini de coordonnées (réelles), ce nombre pouvant varier avec le point considéré.

La distance de deux points de E

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{et} \quad Y(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \text{où} \quad m \leqslant n.$$

sera définie par la formule

$$\varrho(X, Y) = n - m +$$
$$+ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2 + y_{m+1}^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Les points de E à m coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ forment un sous-ensemble E_m de E qui est évidemment superposable avec l'espace cartesien R_m à m dimensions.

[1] *C. R.* t. 187, p. 876 878 (12 Novembre 1928).

[2] M. Fréchet: *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 78.

On a donc $dE \geqslant dR_m$, pour $m = 1, 2, 3, \ldots$, c'est-à-dire l'espace E a un type infini de dimensions.

Or, nous avons évidemment

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots, \tag{1}$$

les termes de (1) étant disjoints. Je dis que les ensembles E_k sont ouverts dans E. En effet, il résulte tout de suite de la définition de la distance dans l'espace E que si $X \epsilon E_k$, et si Y est un point de E, tel que $\varrho(X, Y) < 1$, on a $Y \epsilon E_k$. L'espace E est donc *localement euclidien* (le type local de dimensions de E est donc fini en tout point X de E, pouvant varier avec le point X).

Or, l'espace (ω) ne jouit pas de cette propriété. En effet, il résulte tout de suite de la définition de l'espace (ω) que, pour tout point p de (ω) et tout nombre positif ε, l'ensemble de tous les points q de (ω), tels que

$$(p, q) < \varepsilon$$

(où (p, q) désigne la distance entre p et q dans (ω)) contient, pour $m = 1, 2, 3, \ldots$, un ensemble superposable avec une hypersphère m-dimensionnelle de rayon ε.

La dimension locale de (ω) n'est donc finie en aucun point de (ω). Il en résulte que

$$dE \neq d\omega. \tag{2}$$

D'autre part, considérons la suite infinie de points de (ω)

$$p_n(2n, 0, 0, 0, \ldots), \quad \text{où} \quad n = 1, 2, 3, \ldots;$$

nous avons évidemment

$$(p_i, p_k) \geqslant 2, \quad \text{pour} \quad i \neq k.$$

L'indice n étant donné, désignons par Q_n l'ensemble de tous les points

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, \ldots)$$

de (ω), tels que

$$(p, p_n) < 1.$$

On voit sans peine que l'ensemble Q_n, en tant que superposable avec l'intérieur d'une hypersphère à n dimensions, est homéomorphe avec l'espace R_n, donc à l'ensemble E_n.

Posons

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots, \tag{3}$$

les ensembles Q_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont évidemment disjoints et ouvers dans Q. Pareillement, les termes de la série (1) sont disjoints et ouverts dans E. Les termes correspondants de (1) et (3) étant homéomorphes, on en déduit facilement que les ensembles E et Q sont homéomorphes.

L'espace E est donc homéomorphe à un sous-ensemble de (ω), d'où résulte que $dE \leqslant d\omega$, donc, d'après (2):

$$dE < d\omega, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Or, on peut démontrer qu'*il n'existe aucun ensemble H, tel que*

$$dH < dE \tag{4}$$

et

$$dH \geqslant dR_n, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

En effet, admettons qu'un tel ensemble H existe. D'après (4), H est homéomorphe à un sous-ensemble S de E et, d'après (1), on a

$$S = SE_1 + SE_2 + SE_3 + \ldots \tag{6}$$

Les termes de la somme (1) étant disjoints et ouverts dans E, nous concluons tout de suite que les termes de la somme (6) sont disjoints et ouverts dans S.

D'après (5), R_n est homéomorphe a un sous-ensemble H_n de H, donc, à un sous-ensemble S_n de S, et on a, d'après $S \subset E$ et (1):

$$S_n = S_n E_1 + S_n E_2 + S_n E_3 + \ldots \tag{7}$$

et les termes de la somme (7) sont disjoints et ouverts dans S_n.

Désignons par k_n le plus petit indice k tel $S_n E_{k_n} \neq 0$ (un tel indice k_n existe, puisque $S_n \neq 0$). L'ensemble $S_n E_{k_n}$ étant ouvert dans S_n et non vide, et S_n étant homéomorphe à R_n, nous concluons sans peine que $S_n E_{k_n}$ contient un ensemble, soit T_{k_n}, homéomorphe à R_n. Or, E_{k_n} étant superposable avec R_{k_n}, il en résulte tout de suite (d'après $T_{k_n} \subset E_{k_n}$) que $k_n \geqslant n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$). Par conséquent, il existe une suite infinie croissante des indices $r_1, r_2, r_3, \ldots$, telle que $k_{r_1} < k_{r_2} < k_{r_3} < \ldots$

L'ensemble $T_{k_{r_n}}$ est homéomorphe à R_{r_n} et on a $k_{r_n} \geqslant r_n \geqslant n$: il en résulte tout de suite que $T_{k_{r_n}}$ contient un ensemble U_n homéomorphe à R_n.

Posons

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots \tag{8}$$

Nous avons $U_n \subset T_{k_{r_n}} \subset S_{r_n} E_{k_{r_n}} \subset S E_{k_{r_n}}$, et $k_{r_n} < k_{r_{n+1}}$ (pour $n = 1, 2, 3, \dots$): les termes de la somme (6) étant disjoints et ouverts dans S, il résulte de (8) que les termes de la somme (8) sont disjoints et ouverts dans U. Or, U_n, en tant que homéomorphe à R_n, est homéomorphe à E_n: il en résulte donc, de de (1) et (8), que les ensembles E et U sont homéomorphes.

Or, de $U_n \subset S$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, et de (8), résulte que $U \subset S$. Nous avons donc $dE \leqslant dS$, donc (S étant homéomorphe à H): $dE \leqslant dH$, contrairement à (4).

Notre assertion est ainsi démontrée.

Or, il est à remarquer qu'on pourrait sans peine construire des espaces, dont les types de dimensions sont intermédiaires entre dE et $d\omega$.

D'autre part, on pourrait démontrer l'existence des ensembles H dont les types de dimensions ne sont pas finis, et tels que $dH < dE$.

En effet, M. Mazurkiewicz a démontré [1]) l'existence, pour tout n naturel, d'un ensemble G_δ, soit M_n, situé dans R_n, punctiforme et non homéomorphe à aucun sous-ensemble de R_{n-1}. Or, R_n étant superposable avec E_n, il existe un sous-ensemble de N_n de E_n, superposable avec M_n, et on voit sans peine que l'ensemble $H = N_1 + N_2 + N_3 + \dots$ jouit des propriétés désirées.

[1]) *Fund. Math* t. X, p. 311.

Remark on the generalised Bernstein's theorem.

By

Stanisław Ulam (Lwów).

Bernstein's theorem, that from $2\mathfrak{m} = 2\mathfrak{n}$ follows $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, for every pair of cardinal numbers was recently generalised in the following way [1]):

Let a set E be twice decomposed into two equivalent parts:

$$E = M + N = P + Q, \quad MN = 0 = PQ$$

and let φ and ψ be one-one correspondances between M and N and P and Q respectively, then the sets M and Q can be decomposed into *four* disjunctive subsets:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

such that:

$$Q_1 = \alpha_1(M_1), \quad Q_2 = \alpha_2(M_2), \quad Q_3 = \alpha_3(M_3), \quad Q_4 = \alpha_4(M_4),$$

where α_i ($i = 1 \dots 4$) are four functions belonging to the group P created by combining the functions φ and ψ. (The first of them are:

$$0 = \text{Identity}, \quad \varphi, \ \psi, \ \varphi\psi, \ \psi\varphi, \ \varphi\psi\varphi, \ \psi\varphi\psi, \ \text{etc.})$$

I shall prove, that in this theorem the number *four* cannot be diminished [2]). I shall define indeed a set E, two subsets M and Q and two one-one correspondances between M and $E - M$ and Q

[1]) See C. Kuratowski, *Fund. Math.* VI. p. 240—243, D. König *Math. Ann.* 77, and *Fund. Math.* VIII. See also Banach and Tarski, *Fund. Math.* VI, where use is made of this theorem.

[2]) This problem was raised in the Seminary of Prof. C. Kuratowski.