der Kontinuen $\overline{V}_k . K$ höchstens abzählbar [1]) und nach dem Hilfssatze 1 mit der Menge der Punkte von $V_k . K$, wo eine lokale Zerschneidung der Ebene in $n > 2$ Gebiete erfolgt, übereinstimmt. Demnach ist die Menge der lokalen Zerschneidungspunkte in $n > 2$ Gebiete wegen (7) auch für $K - A$, und wegen der vorausgezetzten Abzählbarkeit von A, auch für das ganze K höchstens abzählbar. w. z. b. w.

[3]) K. Menger, *Über reguläre Baumkurven*, Math. Ann. Bd. 96. S. 576. vergl. auch W. L. Ayres, *Concerning continuous curves*... Ann. of Math.. Vol. 28, S. 406.

Über die Halbstetigkeit des Flächenmasses [1]).

Von

Julius Schauder (Lwów).

In letzter Zeit sind verschiedene Arbeiten erschienen, welche die Halbstetigkeit des Flächenmasses behandeln. In vorliegender Note möchte ich nun, an meine Vorarbeiten anschliessend, eine Methode entwickeln [1]), die die Halbstetigkeit des Jansen'schen sowie des Gross'chen Flächenmasses zeigen soll. Ich knüpfe zu diesem Zwecke an meine in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit über stetige Abbildungen [2]) an, wo ich den Begriff des topologischen Indexes definiert habe [3]), und beweise den folgenden

Hilfssatz. *Es sei*

$$x = \varphi_n(u, v), \quad y = \psi_n(u, v) \tag{1}$$

eine Folge von stetigen Abbildungen Φ_n des Quadrates Q_0 in der Ebene u, v auf Mengen, die in der x, y Ebene gelegen sind und welche gegen die Grenzabbildung Φ

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \tag{2}$$

gleichmässig konvergieren. Von der Grenzabbildung setzen wir weiter voraus, dass die Menge $M \subset Q_0$ derjenigen Punkte $P \varepsilon Q_0$, in welchen der Index entweder nicht definiert ist [4]) oder den Wert Null

[1]) Nach einer brieflichen Mitteilung an Herrn Rado, Februar 1928.

[2]) J. Schauder: Über stetige Abbildungen, Fund. Math. Band XII.

[3]) Siehe die unter 2) zitierte Arbeit, insbesondere Seite 53.

[4]) Insbesondere kann der Index am Rande des Quadrates nicht definiert werden; die Voraussetzungen des Hilfssatzes enthalten also auch als Bedingung, dass der Rand in eine Nullmenge übergehen soll. In jedem einzelnen Falle, wo wir den Hilfssatz anwenden wollen, müssen wir infolgedessen zuerst beweisen, dass das Bild des Randes eine Nullmenge ist.

besitzt, infolge der Abbildung Φ in eine Nullmenge $\Phi(M)$ übergeht. Dann gilt

$$|\Phi(Q_0)| \leqq \liminf_{n=\infty} |\Phi_n(Q_0)| \text{ [5]}. \tag{3}$$

Wohlgemerkt, diese einschränkende Voraussetzungen machen wir nur für die Grenzabbildung Φ, wogegen die Abbildungen Φ_n nur der einen Bedingung unterworfen sind, dass sie stetig sind. Diese einschränkenden Annahmen (für die Grenzabbildung Φ) sind z. B. erfüllt [2]), wenn Φ „lipschitzisch" ist, d. h. wenn beide Funktionen

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \tag{4}$$

je einer lipschitz'schen Bedingung genügen und wir erhalten das folgende Korollar zu unserem Hilfssatze:

Korollar: *Wenn die stetigen Abbildungen Φ_n gegen eine lipschitz'sche Abbildung Φ gleichmässig konvergieren, so gilt*

$$|\Phi(Q_0)| \leqq \liminf_{n=\infty} |\Phi_n(Q_0)| \text{ [5]}.$$

Beweis des Hifssatzes. Es sei M die Menge derjenigen Punkte P, in welchen entweder a.) der Index (in Bezug auf die Grenzabbildung Φ) nicht definiert ist oder b). der Index existiert aber den Wert Null hat.

Dann ist nach Voraussetzung die Bildmenge $\Phi(M)$ eine Nullmenge

$$|\Phi(M)| = 0 \text{ [5]}. \tag{5}$$

In allen Punkten P von $Q_0 - M$ ist also der Index $i_P \neq 0$. Es ist

$$\Phi(Q_0) \subset \Phi(M) + \Phi(Q_0 - M). \tag{6}$$

Somit infolge von (5)

$$|\Phi(Q_0)| = |\Phi(Q_0 - M)|. \tag{7}$$

Es sei jetzt $P \,\varepsilon\, Q_0 - M$, dann ist

$$i_P \neq 0, \tag{8}$$

woraus — nach der Definition des Indexes i_P — folgt, dass man um den Punkt P einen Kreis k so wählen kann, dass die Ordnung m

[5]) Mit $|\ |$ bezeichnen wir, wenn dadurch keine Zweideutigkeit entsteht, das Lebesgue'sche Mass einer Menge.

des Bildpunktes $\Phi(P)$ in Bezug auf die Bildkurve $\Phi(k)$ [6]) von Null verschieden ist

$$m = i_P \neq 0. \tag{9}$$

Nun konvergieren die Abbildungen Φ_n gleichmässig gegen Φ. Also gilt in symbolischer Schreibweise

$$\lim_{n=\infty} \Phi_n(k) = \Phi(k). \tag{10}$$

Daraus folgt, dass von einem gewissen n angefangen, die Ordnung m_n des Punktes $\Phi(P)$ in Bezug auf $\Phi_n(k)$ gleich m ist [7]), also

$$m_n = m = i_P \neq 0; \quad n > N. \tag{11}$$

Sei jetzt K die durch den Kreis k (in der Ebene u, v) begrenzte Kreisscheibe. Der Rand k dieser Kreischeibe geht in die Kurve $\Phi_n(k)$ über und es ist die Ordnung des Punktes $\overline{P} = \Phi(P)$ in Bezug auf $\Phi_n(k)$ — nach dem vorhergesagten — von Null verschieden. Nach Satz II [8]) meiner oben zitierten Arbeit [2]) folgt daraus, dass

$$\overline{P} = \Phi(P) \,\varepsilon\, \Phi_n(K) \subset \Phi_n\, Q_0); \quad n > N \tag{12}$$

für jedes genügend grosse n. Da man nun die Beziehung (12) für jeden Punkt $P \,\varepsilon\, Q_0 - M$ beweisen kann, so folgt endlich

$$\Phi(Q_0 - M) \subset \operatorname*{Lim\,inf}_{n=\infty} \Phi_n(Q_0) \tag{14}$$

also endlich wegen (5)

$$|\Phi(Q_0)| = |\Phi(Q_0 - M)| \leqq \liminf_{n=\infty} \Phi_n(Q_0) \qquad \text{w. z. b. w.} \tag{15}$$

Diesen Hilfssatz wende ich nun zum Beweise der Halbstetigkeit des Flächenmasses, z. B. des Jansen'schen Flächenmasses J an. Zu diesem Zwecke braucht man nicht seine genaue Definition zu kennen, es genügt zu wissen, dass es folgenden Axiomem genügt [9]).

[6]) die topologische Ordnung.

[7]) Denn die Ordnung ist eine ganze Zahl und sie ändert sich stetig mit der Kurve.

[8]) Der Satz kann wie folgt ausgesprochen werden: Der Rand k der Kreisscheibe K gehe infolge der Abbildung Ψ in die Kurve $\Psi(k)$ in der x, y Ebene über. Hat dann der Punkt $\overline{P}$ der x, y Ebene in Bezug auf $\Psi(K)$ eine Ordnung, die von Null verschieden ist, so gehört $\overline{P}$ zum Bilde $\Psi(K)$ der Kreisscheibe. Man wende diesen Satz auf $\Psi = \Phi_n$ an.

[9]) Vgl. J. Schauder, The theory of surface measure, insb. Seite 4, 5. Fund. Math. Band VIII.

Es ist $J(E)$ für jede Menge E des Raumes definiert und genügt den vier Caratheodory'schen Massaxiomen. Weiter erfüllt es die spezifischen Flächenaxiome:

1) für jede Menge E gilt

$$J(E) \geqq \sqrt{|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2} \quad (16)$$ [10]).

2) Sei $\{E^{in}\}$ eine Folge von Einteilungen der Menge E in fremde Teilmengen

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E^{in}; \qquad \text{für} \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

mit nach Null konvergierenden Durchmessern. Dann gilt

$$\lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|E_x^{in}|^2 + |E_y^{in}|^2 + |E_z^{in}|^2} = J(E). \quad (18)$$

Es sei jetzt E eine Fläche, d. h. ein eineindeutiges [11]), stetiges Bild $\Psi(Q_0)$ des Quadrates Q_0 der u, v Ebene. Es liege die Fläche E im x, y, z Raume. Wir nehmen an, dass das Flächenmass $J(E)$ endlich ist. Teilen wir das Quadrat Q_0 in Teilquadrate Q^i, indem wir zu den Axen u, v Parallele ziehen. Es bezeichne allgemein l eine solche Teilungsgerade, die entweder zur u- oder zur v- Axe parallel verläuft. Dieser Geraden entspricht als Bild auf der Fläche die Menge $\Psi(l)$. Nun beweist man ganz leicht, dass bei entsprechender Wahl dieser Geraden für jede solche Teilungsgerade l

$$J[\Psi(l)] = 0 \quad (19)$$

wird, wie dicht auch die Einteilung verlangt wurde [12]). Umsomehr folgt also aus (19) nach dem ersten Flächenaxiome

$$|\Psi(l)_x| = |\Psi(l)_y| = |\Psi(l)_z| = 0. \quad (20)$$

[10]) Mit E_x bezeichnen wir die Projektion der Menge E auf die Ebene $x=0$; eine analoge Definition gilt für E_y, E_z.

[11]) diese einschränkende Voraussetzung machen wir nur vorläufig und werden uns später von ihr befreien.

[12]) Es gilt der folgende allgemeinere Satz: Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Geraden, die in der u, v Ebene zu einer festen Richtung parallel sind. Dann kann nur für höchstens abzählbar viele dieser Geraden ihre Bildmenge $\Psi(l)$ ein von Null verschiedenes Flächenmass besitzen.

Somit kann man sagen, dass bei unserer speziellen Einteilung die Ränder der Teilquadrate Q^i sich auf Ebenen $x=0$, $y=0$, $z=0$ in Nullmengen projizieren. Bezeichnen wir also mit q^i das Innere von Q^i, so gilt

$$\Psi(q^i) \subset \Psi(Q^i) \subset \Psi(Q_0) = E \quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Psi(q^i) \subset \sum_{i=1}^{\infty} \Psi(Q^i) \subset E$$

$$J\left[\sum_{i=1}^{\infty} \Psi(q^i)\right] = \sum_{i=1}^{\infty} J[\Psi(q^i)] = J[E] \qquad \text{(nach 20)}$$

Satz I. *Voraussetzung a) Die stetigen Flächen E_m konvergieren gleichmässig gegen die Fläche E, wobei die Flächen E_m durch die Funktionen*

$$x = \varphi_m(u, v), \quad y = \psi_m(u, v), \quad z = \chi_m(u, v); \quad u, v \varepsilon Q_0$$

gegeben sind. Sei Ψ_m des Zeichen für diese Abbildung.

b) Über die Grenzfläche E, der die Abbildung Ψ entspricht

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v); \quad z = \chi(u, v)$$

setzen wir noch voraus, dass jedes Funktionenpaar (x, y) (y, z) (z, x) uns auf entsprechende Ebenen $(x=0;\ y=0;\ z=0)$ Abbildungen liefert, welche einzeln den Bedingungen des Hilfssatzes genügen. Dann folgt

$$J(E) \leqq \liminf_{m=\infty} J(E_m). \quad (22)$$

Dieser Satz schliesst z. B. in sich das

Korollar. *Wenn die stetigen Flächen gegen eine lipschitz'sche Fläche konvergieren, so folgt*

$$J(E) \leqq \liminf_{m=\infty} J(E_m).$$

Beweis. Wir teilen das Quadrat Q_0 in Teilquadrate Q^i, wobei wir uns im voraus so einrichten können, dass den Rändern der Q^i „Nullmengen" entsprechen. Wir treffen die Verabredung, dass jeder Randpunkt nur einem Q^i zugeordnet wird. Infolgedessen haben wir es mit einer Zerlegung des Quadrates Q_0 zu tun, woraus eine entsprechende Zerlegung der Flächen E_m bzw. E in „Teilflächen E_m^i bzw. E^i [13]) folgt Für jedes vorgegebene ε können wir diese Zerlegung so dicht einrichten, dass speziell für die Grenzfläche die Beziehung

$$(23)\qquad J(E)-\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|E_x^i|^2+|E_y^i|^2+|E_z^i|^2} \leqq J(E)$$

gilt. Aus den Voraussetzungen des Satzes und der Wahl der Teilungsquadrate zufolge schliessen wir, dass jede der folgenden Abbildungsfolgen

$$(24)\qquad Q^i \rightarrow [\Psi_m(Q^i)]_x; \quad Q^i \rightarrow [\Psi_m(Q^i)]_y; \quad Q^i \rightarrow [\Psi_m(Q^i)]_z$$

den Bedingungen des Hilfssatzes im Quadrate Q^i genügt. Es gilt also

$$(25)\qquad |E_z^i| \leqq \liminf_{m=\infty} |E_{m,z}^i| \quad \text{u. s. w.}$$

was die Beziehung

$$(26)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|E_x^i|^2+|E_y^i|^2+|E_z^i|^2} \leqq$$

$$\leqq \liminf_{m=\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|E_{m,x}^i|^2+|E_{m,y}^i|^2+|E_{m,z}^i|^2} \leqq \liminf_{m=\infty} J(E_m)$$

nach sich zieht.

Aus (23) und (26) schliessen wir

$$(27)\qquad J(E)-\varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|E_x^i|^2+|E_y^i|^2+|E_z^i|^2} \leqq \liminf_{m=\infty} J(E_m)$$

und da (27) für jedes ε bestehen soll, so folgt endlich

$$(28)\qquad J(E) \leqq \liminf_{m=\infty} J(E_m) \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Wir haben vorlaüfig vorausgesetzt, dass die Parameterdarstellungen eineindeutig sind. Ich betone nun ausdrücklich, dass man sich von dieser Bedingung sehr leicht befreien kann.

[13]) Es ist

$$\Psi_m(Q^i) = E_m^i; \quad \Psi(Q^i) = E^i.$$

Sind die Parameterdarstellungen nur eindeutig und stetig, so zerlege man den Definitionsbereich — d. h. das Quadrat Q_0 — in Teilquadrate Q^i und definiere $J(E)$ als

$$(29)\qquad J(E) = \lim \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{|E_x^i|^2+|E_y^i|^2+|E_z^i|^2}; \quad E^i = \Psi(Q^i)$$

bei immer dichter werdender Einteilung. Der Satz I gilt dann in unveränderter Fassung.

Wir bemerken nebenbei, dass dann dies Flächenmass zwar keine additive, aber immer noch eine im Sinne des Herrn Banach [14]) beschränkte, normale Mengenfunktion darstellt.

Es sei jetzt die Grenzfläche E lipschitzisch, d. h. alle Funktionen φ, ψ, χ sollen je einer lipschitz'schen Bedingung genügen.

Dann folgt aus den Untersuchungen des Herrn Banach, Rademacher und meinen [15]), dass unabhängig davon, ob die Parameterdarstellung eineindeutig oder nur eindeutig ist, $J(E)$ sich wie folgt darstellen lässt

$$(30)\qquad J(E) = \iint_{Q_0} \sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2}\, du\, dv$$

wobei $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}, \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}, \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$ die Funktionaldeterminanten der entsprechenden Funktionen bedeuten.

Nehmen wir endlich auch die Flächen E_m als lipschitzisch an, so erhalten wir infolge dieser Überlegungen den

[14]) St. Banach, Sur une classe de fonctions d'ensemble, Fund. Math. Band VI, S. 170—188, insb. 171.

[15]) St. Banach: a) Sur une classe de fonctions d'ensemble, Fund. Math. VI insb. S. 183. Satz 12. S. 184. Satz 13.

b) Sur les lignes rectificiables et les surfaces dont l'aire est finie Fund. Math. VII Seite 225—236.

Rademacher, Über partiellle und totale Differenzierbarkeit Math. Ann. 1919–1920.

J. Schauder: The theory of surfase measure, Fund. Math. VIII. insb. Seite 33—37.

Obwohl manche dieser Untersuchungen sich auf eineindeutige Abbildungen beziehen, so lässt sich doch der allgemeine Fall auf dieselbe Art und Weise behandeln, wenn wir nur den Begriff des Flächenmasses in der hier dargelegten Weise verallgemeinern.

Satz II [16]. *Wenn die lipschitz'schen Flächen*

$$x = \varphi_m(u, v), \quad y = \psi_m(u, v); \quad z = \chi_m(u, v)$$

gegen eine lipschitz'sche Fläche

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

gleichmässig konvergieren, dann gilt

$$\iint\limits_{Q_0} \sqrt{\left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}\right]^2}\, du\, dv \leqq$$

$$\leqq \liminf_{m=\infty} \iint\limits_{Q_0} \sqrt{\left[\frac{D(\varphi_m, \psi_m)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\psi_m, \chi_m)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(\chi_m, \varphi_m)}{D(u, v)}\right]^2}\, du\, dv \text{ [17]}.$$

[16] Vgl. T. Rado: Über das Flächenmass rektifizierbarer Flächen. Math. Ann. Band 100.

[17] Diese überlegungen behalten ihre Gültigkeit für den n-dimensionalen Fall.

Sur un type infini de dimensions qui est localement fini.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Dans une note récemment parue [1]) M. K. Kunugui, en résolvant une question proposée par M. Fréchet [2]) a prouvé qu'il existe des espaces, dont les types de dimensions sont infinis et inférieurs à celui de l'espace (Ω) de M. Hilbert.

Un tel espace est, d'après M. Kunugui, la partie (ω) de l'espace (Ω) formée de tous les points de cet espace n'ayant qu'un nombre fini (ou nul) des coordonnées non nulles.

Le but de cette note est de construire *un espace E à un nombre infini de dimensions, tel que $dE < d\omega$.*

Les points de notre espace E seront déterminés par un nombre fini de coordonnées (réelles), ce nombre pouvant varier avec le point considéré.

La distance de deux points de E

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{et} \quad Y(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad \text{où} \quad m \leqslant n,$$

sera définie par la formule

$$\varrho(X, Y) = n - m +$$

$$+ \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2 + y_{m+1}^2 + \ldots + y_n^2}.$$

Les points de E à m coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ forment un sous-ensemble E_m de E qui est évidemment superposable avec l'espace cartesien R_m à m dimensions.

[1]) *C. R.* t. 187, p. 876—878 (12 Novembre 1928).

[2]) M. Fréchet: *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 78.