Über eine Umkehrung des Jordan'schen Kurvensatzes.

Von

Casimir Zarankiewicz (Warszawa).

Der bekannte Kurvensatz von C. Jordan lautet: Jede Punktmenge, die umkehrbar eindeutiges und stetiges Abbild des Kreises ist, teilt die Ebene in zwei Gebiete deren gemeinsame Grenze sie ist. Man weiss, dass der Satz keine eigentliche Umkehrung zulässt. A. Schoenflies[1]) versteht unter einer geschlossenen Kurve ein jedes Kontinuum, welches die Ebene in zwei Gebiete zerschneidet und die gemeinsame Grenze dieser Gebiete ist; ein homöomorphes Bild einer Kreislinie pflegt er als einfache geschlossene Kurve zu bezeichnen. L. E. J. Brouwer[2]) hat Beispiele von geschlossenen Kurven gegeben, die sehr komplizierte topologische Struktur haben; es hat sich dabei herausgestellt, dass geschlossene Kurven existieren, welche unzerlegbare Kontinua (continus indécomposables) sind. Um zu beweisen, dass irgend eine geschlossene Kurve K eine einfache ist, muss man K noch einigen zusätzlichen Bedingungen unterwerfen. A. Schoenflies hatte z. B. die „allseitige Erreichbarkeit" in jedem Kurvenpunkt postuliert und es ist ihm gelungen zu beweisen, dass eine solche geschlossene Kurve eine einfache ist.

Man kann aber die Sache von einem ganz anderen Standpunkte aus betrachten, falls man nicht mehr die Annahme macht, dass es sich um eine geschlossene Kurve handelt und wenn man zu lokalem Zerschneidungsvermögen übergeht. In einer früheren Arbeit[3])

[1]) A. Schoenflies. *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*, Zweiter Teil. Leipzig 1908, S. 119, 178 ff

[2]) L. E. J. Brouwer, *Zur Analysis Situs*, Math. Ann. Bd. 68. S. 423.

[3]) C. Zarankiewicz, *Sur les coupures locales faites par les continus*, Bull. Acad. Polon. Scienc., Cracovie 1927, S. 217.

habe ich bewiesen, dass wenn man vom Kontinuum C voraussetzt, dass es in jedem seiner Punkte die Ebene lokal in genau zwei Teilgebiete zerschneidet (ohne zu postulieren, dass es eine geschlossene Kurve ist), so ist C eine einfache geschlossene Kurve, wenn es beschränkt, oder eine topologische Gerade, wenn es unbeschränkt ist.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist die Voraussetzungen des oben genannten Satzes zu verschwächen, also der Beweis des folgenden noch allgemeineren Satzes.

Satz. (α). *Ein beschränktes ebenes Kontinuum welches in jedem seiner Punkte die Ebene lokal in eine endliche und konstante Anzahl von Gebieten zerschneidet, ist eine einfache geschlossene Kurve.*

(β). *Ein unbeschränktes Kontinuum von der gleichen Eigenschaft ist eine topologische Gerade (d. h. homöomorph einer Geraden).*

Ein Kontinuum, welches diese Voraussetzungen erfüllt, muss nirgendsdicht sein, weil in einem inneren Punkte einer Menge überhaupt keine lokale Zerschneidung stattfindet. Der Beweis des Satzes folgt also unmittelbar aus dem Hauptsatze dieser Arbeit und aus dem oben zitierten Satze von mir.

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz 1. *In jedem seiner Punkte von der Ordnung n[1]) zerschneidet jede Baumkurve die Ebene lokal genau in n Gebiete[2]).*

Beweis. Es sei p ein Punkt von der Ordnung n welcher der Baumkurve B angehört. Mann weiss[3]) dass in jeder Umgebung von p eine einfache geschlossene Kurve K mit dem Innern J existiert, die folgende Bedingungen erfüllt:

(1) $K . B$ *enthält genau n Punkte*

(2) $(K + J) . B$ *ist ein Kontinuum*

(3) $p \subset J$.

[1]) Ein Punkt p eines Kontinuums heisst nach K. Menger (*Grundzüge einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. Bd. 95. S. 279) von der Ordnung n, wenn n die kleinste natürliche Zahl ist von der Eigenschaft: es existieren beliebig kleine Umgebungen von p, deren Begrenzungen die Mächtigkeit n haben.

[2]) Ein Kontinuum K zerschneidet in seinem Punkte p lokal die Ebene genau in n Gebiete, wenn jede genügend kleine Umgebung von p durch K in mindestens n Gebiete zerschitten wird, wobei es aber beliebig kleine Umgebungen von p gibt die genau in n Gebiete zerschnitten sind.

[3]) C. Zarankiewicz, *Sur les coupures locales faites par les continus*, Bull. Acad. Polon. Cracovie, 1927. S. 207, Satz 3, Bedingungen (1) — (5).

Das Kontinuum (2), als Teilkontinuum einer Baumkurve, ist selbst eine Baumkurve [1]); des wegen zerschneidet es die Ebene nicht [2]). Nach einem Satze von S Straszewicz [3]) wird also das abgeschlossene Gebiet $J+K$ durch $(K+J).B$ genau in n Gebiete zerschnitten, w. z. b. w.

Hilfssatz 2 *Ist eine Jordan'sche Kurve K in einem seiner Punkte x lokal keine Baumkurve, so ist x ein Punkt der lokalen Zerschneidung der Ebene durch K in unendlichviele Gebiete.*

Beweis. Wegen der Voraussetzung enthält das Kontinuum K nach einem Satze von G. T. Whyburn [4]) eine Folge von einfachen geschlossenen Kurven mit nach Null abnehmenden Durchmessern, welche den Punkt x als Häufungspunkt besitzt. Man kann also eine Folge von Gebieten U_n und einfachen geschlossenen Knrven $C_n \subset K$ bestimmen, die folgenden Bedingungen unterworfen ist:

(4) *U_n liegt im Innern von C_n aber im Aussern von jedem C_k wo $k>n$*

(5) *U_n liegt in der Komplementärmenge von K*

(6) $$\operatorname{Lim} U_n = x$$

In der Tat, da K nirgendsdicht in der Ebene ist, so ist (5) immer realisierbar: um (6) zu erfüllen, brauchen wir nur die Gebiete U_n genügend klein und in genügender Nähe von x zu wählen. Sind U_k für $k \leqslant n$ schon bestimmt, so existiert nach Whyburn eine einfache geschlossene Kurve C welche so nahe dem Punkte x liegt, dass sie die Gebiete $U_1, U_2, \dots U_n$ im Aussern hat: es genügt also als U_{n+1} ein beliebiges Gebiet zu wählen welches im Innern von C liegt, den Punkt x nicht am Rande enthält, und die Bedingungen (5) und (6) erfüllt: damit ist gezeigt, dass auch (4) immer realisiert werden kann.

Sind U_i und U_j zwei Gebiete der oben definierten Folge und $i<j$, so sind sie mittels einer einfachen geschlossenen Kurve. nämlich C_j, voneinander getrennt, da nach unseren Festzetzungen U_i im Aussern, U_j aber im Innern von C_j liegt. Die Gebiete U_n gehören somit stets verschiedenen Komponenten der Komplementärmenge von K an; da sie sich aber wegen (6) im Punkte x häufen, so ist x ein lokaler Zerschneidungspunkt in unendlichviele Gebiete, w. z. b. w.

[1]) S. Mazurkiewicz, *Un théorème sur les lignes de Jordan*, Fund. Math. t. II. S. 123.

[2]) S. Mazurkiewicz, *Sur les continus homogènes*, Fund. Math. t. V, S. 138.

[3]) S. Straszewicz, *Über die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*, Fund. Math. t. VII. S. 175.

[4]) G. T. Whyburn, *Concerning Menger regular curves*, Fund. Math. t. XII. S. 277.

Hauptsatz. Voraussetzung: *K ist eine ebene Kurve [1]), welche höchstens abzählbarviele Punkte enthält, in welchen eine lokale Zerschneidung der Ebene in unendlichviele Gebiete stattfindet.* **Behauptung:** *1) Die Kurve K, sowie ihre sämtlichen Teilkontinua, sind Jordan'sche Kurven. 2) K enthält höchstens abzählbarviele Punkte, in welchen eine lokale Zerschneidung der Ebene in mehr als 2 Gebiete stattfindet.*

Beweis. 1) Das Kontinuum K enthält kein Konvergenzkontinuum [2]), da, wie ich früher bewiesen habe, jeder auf einem Konvergenzkontinuum liegeder und dem K angehöriger Punkt, höchstens zwei Punkte ausgenommen, ein lokaler Zerschneidungspunkt in unendlichvielen Gebiete is. Enthält K aber kein Konvergenzkontinuum, so ist es wie man weiss [3]), mit seinen sämtlichen Teilkontinua eine Jordan'sche Kurve.

2) Sei A die, laut der Voraussetzung, höchstens abzählbare Menge der Punkte von K, wo eine lokale Zerschneidung der Ebene in unendlichviele Gebiete erfolgt. Nach dem Hilfssatze 2 ist also die Menge $K-A$ in jedem ihrer Punkte lokal eine Baumkurve.

Nach allgemeinen Sätzen [4]) der Mengenlehre, existiert eine abzählbare Familie von Gebieten V_k von den Eigenschaften:

(7) $$\sum_{k=1}^{\infty} V_k \supset K-A,$$

(8) $$\overline{V}_k . K \text{ ist eine Baumkurve.}$$

Wegen (8) ist die Menge der Punkte von der Ordnung $n>2$

[1]) D. h. ein 1-dimensionales, also in der Ebene, ein nirgendsdichtes Kontinuum.

[2]) vergl. C. Zarankiewicz, *Über eine topologische Eigenschaft der Ebene*, Fund. Math. t. XI. S. 21, ff.

[3]) C. Zarankiewicz, *Sur les points de division...*, Fund. Math. t. IX. S. 134.

[4]) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, S. 272.

der Kontinuen $\overline{V}_k . K$ höchstens abzählbar [1]) und nach dem Hilfssatze 1 mit der Menge der Punkte von $V_k . K$, wo eine lokale Zerschneidung der Ebene in $n > 2$ Gebiete erfolgt, übereinstimmt. Demnach ist die Menge der lokalen Zerschneidungspunkte in $n > 2$ Gebiete wegen (7) auch für $K - A$, und wegen der vorausgezetzten Abzählbarkeit von A, auch für das ganze K höchstens abzählbar. w. z. b. w.

[3]) K. Menger, *Über reguläre Baumkurven*, Math. Ann. Bd. 96. S. 576. vergl. auch W. L. Ayres, *Concerning continuous curves*... Ann. of Math.. Vol. 28, S. 406.

Über die Halbstetigkeit des Flächenmasses [1]).

Von

Julius Schauder (Lwów).

In letzter Zeit sind verschiedene Arbeiten erschienen, welche die Halbstetigkeit des Flächenmasses behandeln. In vorliegender Note möchte ich nun, an meine Vorarbeiten anschliessend, eine Methode entwickeln [1]), die die Halbstetigkeit des Jansen'schen sowie des Gross'chen Flächenmasses zeigen soll. Ich knüpfe zu diesem Zwecke an meine in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit über stetige Abbildungen [2]) an, wo ich den Begriff des topologischen Indexes definiert habe [3]), und beweise den folgenden

Hilfssatz. *Es sei*

$$(1) \qquad x = \varphi_n(u, v), \quad y = \psi_n(u, v)$$

eine Folge von stetigen Abbildungen Φ_n des Quadrates Q_0 in der Ebene u, v auf Mengen, die in der x, y Ebene gelegen sind und welche gegen die Grenzabbildung Φ

$$(2) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

gleichmässig konvergieren. Von der Grenzabbildung setzen wir weiter voraus, dass die Menge $M \subset Q_0$ derjenigen Punkte $P \varepsilon Q_0$, in welchen der Index entweder nicht definiert ist [4]) oder den Wert Null

[1]) Nach einer brieflichen Mitteilung an Herrn Rado, Februar 1928.

[2]) J. Schauder: Über stetige Abbildungen, Fund. Math. Band XII.

[3]) Siehe die unter 2) zitierte Arbeit, insbesondere Seite 53.

[4]) Insbesondere kann der Index am Rande des Quadrates nicht definiert werden; die Voraussetzungen des Hilfssatzes enthalten also auch als Bedingung, dass der Rand in eine Nullmenge übergehen soll. In jedem einzelnen Falle, wo wir den Hilfssatz anwenden wollen, müssen wir infolgedessen zuerst beweisen, dass das Bild des Randes eine Nullmenge ist.