Über endlich-hoch zusammenhängende stetige Kurven.

Von

Paul Alexandroff (Moskau).

Ein im kleinen zusammenhängendes Kontinuum, welches höchstens endlich viele enfache geschlossene Linien enthält, ist, wie leicht ersichtlich, eindimensional [1]), also eine *Kurve* (im Sinne der allgemeinen Dimensionstheorie). Kurven von dieser Art habe ich im fünften Abschnitt meiner Arbeit „*Über kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven*“ [2]) unter dem Namen *endlich-hoch zusammenhängender stetiger Kurven* untersucht. Im vorliegenden Aufsatz will ich einen Satz beweisen, der die Struktur dieser Kurven in einer, wie mir scheint, besonders übersichtlichen und einfachen Form zu charakterisieren erlaubt:

Satz. *Ein Kontinuum C ist dann und nur dann eine endlich-hoch zusammenhängende stetige Kurve, wenn man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige Deformation von C in sich* [3]) *finden kann, die keinen Punkt von C mehr als um ε von seiner ursprünglchen Lage entfernt und deren Endresultat ein eindimensionaler Komplex ist.*

[1]) Siehe Menger, Math. Ann., 96 (1928), SS. 573 und 574 (Fußnote 5c)).

[2]) Math. Ann., 96, SS. 512–554, insbesondere SS. 541–553.

[3]) Unter einer stetigen Deformation von C *in sich* verstehe ich (dem allgemeinen Spachgebrauch entsprechend) eine von einem Parameter t („Zeitparameter“), $0 \leq t \leq 1$, stetig abhängende Schar von stetigen Abbildungen f^t von C auf eine echte oder unechte Teilmenge C^t von C, so daß f^0 die identische Abbildung ist; C^1 wird als Endresultat der Deformation bezeichnet.

Neben Deformationen *in sich* kann man Deformationen einer Menge C in einem (diese Menge umfassenden) Raume R betrachten; in diesem Falle sind die C^t in R, aber im allgemeinen nicht in C enthalten.

Beweis. Es sei C eine endlich-hoch zusammenhängende stetige Kurve. Dann ist, wie ich a. a. O. [2]) bewiesen habe,

(1) $$C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k + J,$$

wobei C_0 ein eindimensionaler Komplex,

(2) $$C_{m+1} = C_m + \sum_{i_1 i_2 \dots i_{m+1}} S_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}}$$

und J eine nulldimensionale aus lauter Endpunkten von C bestehende Menge ist; dabei ist jedes $S_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}}$ entweder die leere Menge, oder ist $S_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}} = \overline{a_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}} b_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}}}$ ein einfacher Bogen, der mit $S_{i_1 i_2 \dots i_m}$ (und sonst mit keinem $S_{j_1 j_2 \dots j_{m'}}$, $m' \leq m$) den Punkt $a_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}}$ (und keinen anderen Punkt) gemeinsam hat; es ist überdies stets $a_{i_1 i_2 \dots i_m} \neq a_{i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}} \neq b_{i_1 i_2 \dots i_m}$.

Was die Menge J betrifft, so ist für jeden Punkt ξ derselben (falls überhaupt $J \neq 0$ ist) eindeutig eine unendliche Folge von Indizes

(3) $$i_1, i_2, \dots, i_m, \dots$$

unter der Bedingung

(4) $$\lim_{m \to \infty} a_{i_1 i_2 \dots i_m} = \xi$$

definiert, wobei zwei verschiedenen Folgen von dieser Gestalt niemals ein und derselbe Punkt von J entsprechen kann. So kann man alle Punkte von J als Punkte $\xi_{i_1 i_2 \dots i_m \dots}$ deuten.

Wir bemerken noch, daß die in unserem Satze ausgesprochene Bedingung topologisch invariant ist; dies erlaubt uns, wie leicht ersichtlich, vorauszusetzen, daß die ganze Figur im R^3 liegt, wobei die $S_{i_1 i_2 \dots i_k}$ (soweit sie $\neq 0$ sind) geradlinige Strecken mit Längen $\leq \frac{1}{2^k}$ sind. Endlich ist noch zu bemerken, daß es zu jedem $\alpha > 0$ überhaupt nur endlich-viele $S_{i_1 i_2 \dots i_k}$ geben kann, deren Längen $\geq \alpha$ sind.

Es sei jetzt eine beliebige „*Indexkombination von Range m*“:

(5) $$* = (i_1\ i_2 \ldots\ i_m)$$

und eine positive Zahl ε gegeben. Wir sagen, daß (5) bzw. $S_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ (in bezug auf ε) *wesentlich* ist, wenn man eine Folge

$$i_{m+1},\ i_{m+2}, \ldots,\ in\ inf.$$

finden kann, so daß, wenn $\lambda_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ allgemein die Länge von $S_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ bedeutet,

$$\sum_{h=1}^{\infty} \lambda_{i_1 \ldots i_{m+h}} \geqq \varepsilon$$

ist.

Es gibt höchstens endlich-viele in bezug auf ein gegebenes ε wesentliche Indexkombinationen.

Es seien in der Tat unendlich viele vorhanden. Man wähle p und $q > p$ so groß, daß $\frac{1}{2^{p-1}} < \varepsilon$ und $\frac{1}{2^{q-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Alle wesentlichen Indexkombinationen sind somit von einem Range $< p$ und wir können annehmen, daß unendlich viele davon denselben Rang r haben. Es gibt sodann (vermöge der Wahl der Zahl q) unendlich viele Indexkombinationen

$$*_h = (i_1^h \ldots,\ i_r^h \ldots\ i_q^h)$$

von der Eigenschaft, daß

$$\sum_{\nu=r+1}^{q} \lambda_{i_1^h \ldots,\ i_r^h \ldots i_\nu^h} > \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; daraus folgt aber, daß es ein s, $r < s \leqq q$ gibt so, daß für unendlich viele h

$$\lambda_{i_1^h \ldots,\ i_r^h \ldots\ i_s^h} > \frac{\varepsilon}{2(q-r)}$$

ist, was unmöglich ist, da $(i_1^h \ldots\ i_r^h)$ *verschiedene* Indexkombinationen, und also $S_{i_1^h \ldots,\ i_r^h \ldots\ i_s^h}$ sämtlich verschiede Strecken sind.

Es sei jetzt x irgendein Punkt von C, der weder zu C_0, noch zu einem (in bezug auf ε) wesentlichen $S_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ gehört. Es soll

ein eindeutig definierter Bogen bestimmt werden, der in x beginnt und in einem Punkt $z(x)$ endet, wobei $z(x)$ entweder in C_0 oder in einem wesentlichen $S_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ enthalten ist. Dieser Bogen soll die *Bahn* von x heißen und durch Λ_x bezeichnet werden.

Nun führt zu jedem Punkt $x \subset S_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ein eindeutig bestimmter Weg

$$\Lambda_x^* = \overline{a_{i_1},\ a_{i_1 i_2},\ a_{i_1 i_2 i_3}, \ldots,\ a_{i_1 i_2 \ldots i_m}\ x}$$

(wobei $\overline{a_{i_1} a_{i_1 i_2}} \subset S_{i_1}$, $\overline{a_{i_1 i_2} a_{i_1 i_2 i_3}} \subset S_{i_1 i_2}, \ldots,$ $\overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}} a_{i_1 i_2 \ldots i_m}} \subset$ $\subset S_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}$ und $\overline{a_{i_1 i_2 \ldots i_m} x} \subset S_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ist.

Zwei Fälle sind möglich:

entweder gibt es unter den Indexkombinationen

(6) $$i_1,\ i_1 i_2, \ldots,\ i_1 i_2 \ldots i_{m-1}$$

eine wesentliche, — dann bezeichnen wir durch $k \leqq m-1$ die größte Zahl, für die $(i_1\ i_2 \ldots\ i_k)$ eine (in bezug auf ε) wesentliche Kombination ist, und setzen $z(x) = a_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}}$;

oder sind alle (6) unwesentlich — dann setzten wir $z(x) = a_{i_1}$.

Den zwischen x un $z(x)$ gelegenen Teil des Weges Λ_x^* bezeichnen wir durch Λ_x.

Wenn jetzt $x \subset J$ un zwar $x = \xi_{i_1 i_2 \ldots i_m \ldots}$ ist, so führt zu x ein eindeutig bestimmter Weg

(7) $$\Lambda_x^* = \overline{a_{i_1},\ a_{i_1 i_2}, \ldots,\ a_{i_1, i_2, \ldots, i_m}, \ldots,\ x}.$$

Wenn es unter den in (7) vorkommenden Kombinationen

$$(i_1\ i_2 \ldots\ i_m)$$

eine wesentliche gibt, so gibt es eine größte Zahl k, für die $(i_1\ i_2 \ldots\ i_k)$ noch wesentlich ist, und wir setzen dann $z(x) =$ $= a_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}}$.

Wenn alle in (7) auftredenden Indexkombinationen unwesentlich sind, so setzen wir $z(x) = a_{i_1}$. In beiden Fällen soll Λ_x der Teilbogen $\overline{x\,z(x)}$ von Λ_x^* sein.

Man definiere jetzt wie folgt eine stetige Deformation Δ von C in sich.

I. Alle Punkte von C, die zu C_0 oder zu einem wesentlichen $S_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ gehören, bleiben während der Deformation Δ fest.

II. Alle übrigen Punkte x von C gleiten entlang ihrer Bahnen Λ_x gleichförmig während der Zeiteinheit in die entsprechenden Punkte $z(x)$ hinein.

Da, wie leicht ersichtlich, die Länge jeder Bahn Λ_x endlich, und zwar $< \varepsilon$ ist, kann man von gleichförmiger Bewegung ohne weiteres sprechen. Andererseits folgt aus dem soeben gesagten, daß während der Deformation Δ kein Punkt von C mehr als um ε von seiner ursprünglichen Lage entfernt wird.

Das Endresultat der Deformation Δ ist eine Teilmenge von C, die aus C_0 und aus allen (in bezug auf ε) werentlichen $S_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ besteht; da aber die Anzahl der letzteren endlich ist, ist diese Menge ein Streckenkomplex, womit die erste Hälfte unseres Satzes bewiesen ist.

Der Beweis der zweiten Hälfte beruht auf zwei Hilfssätzen.

Hilfssatz I. *Wenn eine abgeschlossene Menge F bei jedem ε in eine im kleinen zusammenhängende Teilmenge Φ in sich ε-deformiert werden kann, so ist F im kleinen zusammenhängend.*

Beweis. Es sei in Tat ε beliebig gegeben, und

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi$$

ein System von Teilkontinuen von Φ, die eine Überdeckung von Φ bilden und deren Durchmesser sämtlich kleiner als ε sind [4]). Es sei F_i^t die Menge aller Punkte, die für den Wert t des Deformationsparameters als Originalpunkte der Punkte von Φ_i auftreten und F_i die Vereinigungsmenge aller F_i^t (für alle Werte des Deformationsparameters). Die F_i sind abgeschlossene Teilmengen von F; sie überdecken die ganze Menge F; da unsere Deformation eine ε-Deformation und $\delta(\Phi_i) < \varepsilon$ war, so ist $\delta(F_i) < 3\varepsilon$; da endlich Φ_i zusammenhängend war, so ist auch F_i zusammenhängend. Aus dem unter [4]) erwähnten Sierpińskischen Satze folgt somit, daß F im kleinen zusammenhängend ist, w. z. b. w.

[4]) Die Existenz einer solchen Überdeckung folg aus einem bekannten Satze von Sierpiński (Fund. Math. I, (1920), S. 44), der besagt, daß eine abgeschlossene Menge dann und nur dann im kleinen zusammenhängend ist, wenn sie für jedes ε als Vereinigungsmenge von endlich-vielen Kontinuen mit Durchmessern $< \varepsilon$ dargestellt werden kann.

Hilfssatz II. *Es sei C eine* (im dreidimensionalen Raume R^3 gelegene) *einfache geschlossene Linie. Wenn C einer stetigen Deformation Δ* (in R^3) *unterworfen ist, deren Endresultat eine Punktmenge Γ ist, die wenigstens einen Punkt von C nicht enthält, so ist die Spur von C bei der Deformation Δ* [5]) *ein* (in Sinne der allgemeinen Dimensionstheorie) *mindestens zweidimensionales Kontinuum* [6]).

Beweis. Es sei K die Spur von C bei der Deformation Δ. Es gibt einen Punkt $a \subset C - \Gamma$, so daß die Entfermung $\varrho(a, \Gamma)$ eine positive Zahl α ist. Man schlage um a eine Kugel mit dem Radius $\frac{\alpha}{2}$ und wähle ein im Inneren dieser Kugel enthaltenes, mit C im klassischee Brouwerschen Sinne verschlungenes Polygon Π [7]) Es sei $\beta > 0$ die Entfernung zwischen C und Π; man wähle eine positive Zahl $\varepsilon < \beta < \frac{\alpha}{2}$.

Wir nehmen jetzt an, daß K eindimensional ist. Dann kann man K mittels einer Deformation Δ^ε in einen Streckenkomplex K_ε^1 so überführen, daß kein Punkt von K sich während der Deformation Δ^ε mehr als um ε von seiner ursprünglichen Lage entfernt [8]); dabei geht C, bzw. Γ, in eine (im allgemeinen, Singularitäten besitzende) geschlossene Kurve C_ε^1, bzw. Γ_ε^1, über. Da im Laufe unserer Deformation Δ^ε weder C noch Γ das Polygon Π berühren, so *ist C_ε^1 mit Π verschlungen, während Γ_ε^1 mit Π sicher nicht verschlungen ist.* Daraus folgt aber, daß Π mit jedem (eventuell auch)

[5]) Unter der *Spur* eines Punktes x bei einer Deformation Δ verstehe ich die Gesamtheit aller Punkte $f^t(x)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ [3]); die Spur einer Menge ist sodann die Vereinigungsmenge der Spuren aller ihrer Punkte.

[6]) Dieser Satz ist ein Spezialfalt eines in meiner demnächst erscheinenden Arbeit „*Untersuchen über Gestalt und Lage abgeschlossener Mengen*“ bewiesenen Satzes, der ein analoges Ergebnis für geschlossene Komplexe beliebiger Dimension auspricht. Um die Lektüre des vorliegenden Aufsatzes von der soeben zitierten Arbeit unabhängig zu machen, gebe ich hier den Beweis für unseren Spezialfall wieder. Derselbe Beweis gilt auch für n Dimensionen.

[7]) Dies ist stets möglich (siehe z. B. Alexander Tans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), S. 342). Ohne Beweis befindet sich die Konstruktion eines solchen Π zum ersten Mal wohl bei Lebesgue (Comptes Rendus, 27 mars 1911).

[8]) Siehe P. Alexandroff, *Sur la dimension des ensembles fermés,* Comptes Rendus 183 (1926), S. 640; und „Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung“ Math. Ann., Bd. 98.

singulären) zweidimensionalen Komplex, welcher einen aus C_ε^1 und Γ_ε^1 bestehen Rand hat, gemeinsame Punkte haben muß. Nun ist aber K (als singulärer 2-dimensionaler Komplex betrachtet) mit $C+\Gamma$ berandet, und K_ε^1, C_ε^1, Γ_ε^1 sind resp. Bilder von K, C, Γ bei einer und derselben stetigen Abbildung; mit anderen Worten, K_ε^1 kann als ein durch $C_\varepsilon^1+\Gamma_\varepsilon^1$ berandeter singulärer Komplex aufgefasst werden und es muss infolgedessen $K_\varepsilon^1 . \Pi \neq 0$ sein. Letztere Relation ist aber widerspruchsvoll, da sowohl K_ε^1 als auch Π Streckenkomplexe im dreidimensionalen Raume sind, und man durch eine beliebig kleine Verrückung ihrer Endpunkte stets erreichen kann, daß sie zueinander fremd seien.

Der Hilfssatz II ist hiermit bewiesen.

Wir führen jetzt den Beweis unseres Hauptsatzes in wenigen Werten zu Ende.

Es sei in der Tat C ein den Voraussetzungen des Satzes genügendes Kontinuum.

Erstens ist C eindimensional (weil C bei jedem ε in einen eindimensionalen Komplex ε-überführbar ist)[8]) d. h. *C ist ein Kurve.* Auf Grund des bekannten Mengerschen Einbettungssatzes kann man also annehmen, daß C eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes ist[9]).

Zweitens ist *C im kleinen zusammenhängend:* dies folgt in der Tat aus dem Hilfssatz I und des Voraussetzung, daß C bei jedem ε in einen Komplex *in sich* ε übergeführt werden kann.

C ist also eine *stetige Kurve.*

Diese Kurve kann aber unmöglich unendlich viele einfache geschlossene Kurven enthalten, weil bei jeder Deformation von C in sich alle diese Kurven laut des Hilfssatzes II[10]) in sich oder in größere Mengen übergehen müssten, so daß das Endresultat jeder Deformation von C in sich alle diese unendlich-vielen geschlossenen Kurven enthalten müßte und demzufolge unmöglich ein eindimensionaler Komplex sein könnte.

C ist also eine endlich-hoch zusammenhängende stetige Kurve, w. z b w.

[8]) Siehe Menger. Proceed. Kon. Akad. Amsterdam 29 (1926), S 476.

[10]) Der Hilfssatz ist anwendba, weil wir C in den dreidimensionalen Raum eingebettet haben.

Korollar. *Eine ebene stetige Kurve C bestimmt in der Ebene dann und nur dann endlich-viele Gebiete, wenn man zu jedem ε eine stetige Deformation der Kurve in sich finden kann, die keinen Punkt von C mehr als um ε verschiebt und deren Endresultat ein eindimensionaler Komplex ist.*

Dieses Korollar folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Zusammenhangszahl einer ebenen Kurve mit den Anzahl der durch diese Kurve bestimmten beschränkten Gebieten identisch ist.

Fort Lauderdale (Florida), den 3. Januar 1928.