Sur les familles inductives et projectives d'ensembles [1]).

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Nous considérerons des familles formées d'ensembles de points d'un espace euclidien à un nombre fini de dimensions, mais pas nécessairement le même pour tous les ensembles de la famille considérée.

Une famille F d'ensembles sera dite *inductive*, si elle contient les intervalles (à un nombre fini quelconque de dimensions) et si elle contient les sommes et les produits d'une infinité dénombrable d'ensembles de F (appartenant au même espace à un nombre fini quelconque de dimensions) [2]).

On voit sans peine que toute famille inductive contient la famille de tous les ensembles mesurables B qui est la *plus petite* famille inductive.

Voici un autre exemple d'une famille inductive: c'est la famille de tous les ensembles de la forme $PX+Q$, où X est un ensemble donné (d'ailleurs quelconque) et P et Q sont des ensembles mesurables B. On pourrait démontrer que c'est la plus petite famille inductive contenant l'ensemble X [3]).

F étant une famille donnée d'ensembles, nous désignerons par $C(F)$ la famille de tous les ensembles complémentaires aux ensem-

[1]) Présenté au Congrès Intern. des Math. à Bologne, le 5 septembre 1928.

[2]) Cf. la définition de la *propriété inductive* de M. N. Lusin: *Fundamenta Mathematicae* t. X, p. 38.

[3]) M. Tarski a prouvé récemment qu'*il existe* $2^{2^{\aleph_0}}$ *familles inductives d'ensembles de points*: sa démonstration paraîtra dans le vol. XIV de ce journal.

bles de la famille F (le complémentaire de chacun ensemble pris par rapport à l'espace dans lequel il est situé). On voit sans peine que

Si la famille F est inductive, la famille $C(F)$ l'est aussi.

En effet, si la famille F est inductive, tout ensemble mesurable B appartient à F, donc aussi à $C(F)$. Donc $C(F)$ contient tous les intervalles (en tant que mesurables B). Pour prouver que la famille $C(F)$ est inductive il suffit de se rapporter encore aux formules

$$C(E_1+E_2+E_3+\ldots)=CE_1.CE_2.CE_3\ldots$$

et

$$C(E_1E_2E_3\ldots)=CE_1+CE_2+CE_3+\ldots$$

où CE désigne le complémentaire de l'ensemble E).

Nous désignerons par R_m l'espace euclidien à m dimensions, c'est-à-dire l'ensemble de tous les systèmes $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ de m nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

E étant un ensemble situé dans R_m, nous appellerons *projection* de E (sur R_{m-1}) et désignerons par $P(E)$ l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ (de R_{m-1}) pour lesquels il existe un nombre réel x, tel que le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x)$ appartient à E.

On voit sans peine que

$$P(E_1+E_2+E_3+\ldots)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)+\ldots$$

Au lieu de $PP(E)$ nous écrirons $P^2(E)$, et, généralement, nous poserons $P^n(E)=P(P^{n-1}(E))$, pour $n=2, 3, \ldots$

F étant une famille donnée d'ensembles, nous désignerons par $P(F)$ la famille de tous les ensembles $P(E)$, où $E \epsilon F$.

E étant un ensemble situé dans R_m, nous désignerons par $Q(E)$ l'ensemble de tous les points (de R_{m+1}) $(x, x_1, x_2, \ldots, x_m)$, tels que $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \epsilon E$.

F étant une famille donnée d'ensembles, nous désignerons par $Q(F)$ la famille de tous les ensembles $Q(E)$, où $E \epsilon F$.

On voit sans peine que

$$Q(E_1+E_2+E_3+\ldots)=Q(E_1)+Q(E_2)+Q(E_3)+\ldots$$

et que

$$C(Q(E))=Q(C(E)).$$

On voit aussi sans peine qu'on a toujours

$$P(Q(E))=Q(P(E)).$$

Une famille F d'ensembles sera dite *projective*, si

$$P(F) \subset F \quad \text{et} \quad Q(F) \subset F.$$

La plus petite famille inductive et projective d'ensembles est la famille de tous les ensembles (A) (analytiques) de MM. Souslin et Lusin.

Si F est une famille projective, $C(F)$ peut ne l'être pas, p. e. si F est la famille de tous les ensembles (A). Or, on a le suivant

Théorème. *Si F est une famille inductive et projective, la famille $PC(F)$ est aussi inductive et projective.*

C'est la démonstration de ce théorème (dont les conséquences sont importantes pour la théorie des ensembles projectifs) qui est le but de ce Mémoire.

Lemme I. *R_m est une image continue de l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle* (0, 1).

Dém.[1]) L'ensemble H_m de tous les points de R_m, dont les coordonnées sont toutes irrationnelles, est, comme on sait, homéomorphe à l'ensemble M_0 de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$: soient

$$x_1 = \theta_1(t), \quad x_2 = \theta_2(t), \ldots, \quad x_m = \theta_m(t) \qquad (t \in M_0)$$

les fonctions définies et continues dans M_0, établissant cette homéomorphie.

Soient maintenant k un entier, tel que $0 \leqslant k < 2^m$,

$$(1) \quad k = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m)_2 = \alpha_1 . 2^{m-1} + \alpha_2 . 2^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-1} . 2 + \alpha_m$$

— son développement dyadique.

Désignons par M_k l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $\left(\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right)$, et posons, pour $t \in M_k$:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 \sqrt{2} + \theta_1\left(t - \frac{k}{2^m}\right), \quad x_2 = \alpha_2 \sqrt{2} + \theta_2\left(t - \frac{k}{2^m}\right), \ldots, \\ \qquad x_m = \alpha_m \sqrt{2} + \theta_m\left(t - \frac{k}{2^m}\right). \end{cases}$$

[1]) La démonstration de ce lemme pourrait être un peu abrégée, si l'on utilisait la courbe continue de M. Peano remplissant R_m. Il résulte d'ailleurs immédiatement de la théorie des ensembles analytiques.

Désignons par T_k l'ensemble de tous les nombres (2) pour $t \in M_k$: on voit sans peine que

$$(3) \qquad R_m = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_{2^m-1}.$$

En effet, soit $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un point de R_m. Désignons, pour $i = 1, 2, \ldots, m$, par α_i le nombre 1 ou 0, selon que la coordonnée x_i est rationnelle ou non.

Les nombres

$$x_i - \alpha_i \sqrt{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

sont donc tous irrationnels et parsuite il existe un nombre τ de M_0, tel que

$$(4) \qquad x_i - \alpha_i \sqrt{2} = \theta_i(\tau), \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Or, désignons par k le nombre (1), et posons:

$$(5) \qquad t = \frac{k}{2^m} + \tau:$$

τ étant un nombre de M_0, t appartiendra évidemment à M_k et, d'après (4) et (5), nous aurons les formules (2), ce qui prouve (vu la définition de T_k) que le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ appartient à T_k: la formule (3) est ainsi établie.

$M = M_0 + M_1 + \ldots + M_{2^m-1}$ est évidemment l'ensemble de tous les nombres irrationnels de l'intervalle (0, 1).

Soit t un nombre de M: il existe donc un entier (1) bien déterminé (par t), tel que

$$\frac{k}{2^m} < t < \frac{k+1}{2^m}, \quad \text{et} \quad t \in M_k.$$

Posons

$$f_i(t) = \alpha_i \sqrt{2} + \theta\left(t - \frac{k}{2^m}\right), \text{ pour } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Les fonctions $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ seront évidemment définies et continues dans M et (d'après la définition de T_k) l'ensemble de tous les points

$$(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)), \quad \text{pour} \quad t \in M_k$$

sera évidemment l'ensemble T_k, donc, d'après (3), l'ensemble de tous les points

$$(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)), \quad \text{pour} \quad t \in M$$

sera l'ensemble R_m.

Le lemme I est ainsi démontré.

Lemme II. *Si F est une famille inductive et projective, tout ensemble de la famille $C(F)$ est une image continue d'un ensemble de nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$ appartenant à $C(F)$.*

Dém. Soit E un ensemble de la famille $C(F)$, situé dans R_m, et désignons par H l'ensemble de tous les nombres t de M, pour lesquels le point

$$(f_1(t),\ f_2(t), \dots,\ f_m(t))$$

appartient à E (M et $f_i(t)$ ayant les mêmes significations que dans la démonstration du lemme I). Je dis que H appartient à $C(F)$.

Désignons par S l'ensemble de tous les points

$$(t,\ f_1(t),\ f_2(t), \dots,\ f_m(t))$$

de R_{m+1}, où $t \in M$. Les fonctions $f_i(t)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ étant continues dans l'ensemble M (qui est un G_δ), on voit sans peine que l'ensemble S est mesurable B (un G_δ).

D'après $E \in C(F)$, nous avons $CE \in F$, donc, la famille F étant projective, $Q(CE) \in F$. Or, S étant mesurable B, on a $S \in F$, donc, d'après $Q(CE) \in F$, la famille F étant inductive, nous trouvons $S.Q(CE) \in F$, et parsuite (la famille F étant projective)

(6) $$P^m[S.Q(CE)] \in F.$$

Or, je dis que

(7) $$M - H = P^m[S.Q(CE)].$$

En effet, soit $t_0 \in M - H$. D'après la définition de H, nous avons

(8) $$(f_1(t_0),\ f_2(t_0), \dots,\ f_m(t_0)) \in CE;$$

or, $t_0 \in M$, donc, d'après la définition de S:

(9) $$(t_0,\ f_1(t_0),\ f_2(t_0), \dots,\ f_m(t_0)) \in S.$$

Or, d'après (8) et la définition de l'opération Q, nous avons

$$(t_0,\ f_1(t_0),\ f_2(t_0), \dots,\ f_m(t_0)) \in Q(CE),$$

donc, d'après (9):

$$(t_0,\ f_1(t_0),\ f_2(t_0), \dots,\ f_m(t_0)) \in S.Q(CE)$$

et parsuite (d'après la définition de l'opération P):

$$t_0 \in P^m[S.Q(CE)].$$

D'autre part, soit $t_0 \in P^m[S.Q(CE)]$. Il existe donc un point $x_1, x_2, \dots, x_m$ de R_m, tel que

(10) $$(t_0,\ x_1,\ x_2, \dots,\ x_m) \in S.Q(CE).$$

D'après la définition de S, il en résulte que

(11) $$t_0 \in M,$$

et

(12) $$x_1 = f_1(t_0), \quad x_2 = f_2(t_0), \dots, \quad x_m = f_m(t_0);$$

d'après (10) et (12) nous trouvons

$$(t_0,\ f_1(t_0),\ f_2(t_0), \dots,\ f_m(t_0)) \in Q(CE),$$

donc (d'après la définition de l'opération Q):

$$(f_1(t_0),\ f_2(t_0), \dots,\ f_m(t_0)) \in CE,$$

ce qui donne, vu la définition de l'ensemble H:

$$t_0 \in CH,$$

donc, d'après (11):

$$t_0 \in M - H.$$

La formule (7) est ainsi établie. Il en résulte, d'après (6), que $M - H \in F$, donc

(13) $$C(M-H) \in CF.$$

Or, nous avons $H \subset M$, ce qui donne

(14) $$H = M.C(M-H).$$

La famille CF étant inductive (puisque la famille F l'est), et M étant un ensemble mesurable B (donc $\in C(F)$), nous trouvons, d'après (13) et (14): $H \in CF$, c. q. f. d.

Or, d'après la définition de l'ensemble H (et des fonctions $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$), l'ensemble E est une image continue de l'ensemble H (de nombres irrationnels appartenant à l'intervalle $(0, 1)$): la formule $H \in CF$ prouve donc le lemme II.

Lemme III. *Si F est une famille inductive et projective d'ensembles, toute image continue d'un ensemble de la famille $C(F)$ appartient à la famille $PC(F)$.*

Dém. Soit E un ensemble situé dans R_m qui est une image continue d'un ensemble de la famille $C(F)$ (situé dans R_n). Du lemme II résulte tout de suite que E est une image continue d'un ensemble linéaire appartenant à $C(F)$, soit H. Il existe donc m fonctions $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, m)$, définies et continues dans H et telles que E est l'ensemble de tous les points

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)), \quad \text{pour} \quad t \in H.$$

Désignons par T l'ensemble de tous les points de R_m

$$(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t), t), \quad \text{où} \quad t \in H;$$

je dis que l'ensemble T appartient à $C(F)$.

Les fonctions $\varphi_i(t)$ $(i=1, 2, \dots, m)$ étant continues dans H, on a, comme on voit sans peine:

$$T = \overline{T}.Q^m(H), \tag{15}$$

où $\overline{T}$ désigne la fermeture de T (cest-à-dire $\overline{T} = T + T'$), et où $Q^k(H) = Q(Q^{k-1}(H))$, pour $k = 2, 3, \dots, m$.

En effet, on a évidemment $T \subset \overline{T}$, et, pour prouver la formule (15) il suffira de démontres que $\overline{T}.Q^m(H) \subset T$. Soit donc $p(x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1})$ un point de l'ensemble $\overline{T}.Q^m(H)$. D'après $p \in Q^m(H)$, nous avons $x_{m+1} \in H$. Or, de $p \in \overline{T}$ résulte que $p = \lim_{n=\infty} p_n$, où $p_n \in T$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Soit $p_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_{m+1}^{(n)})$: d'après $p_n \in T$ et d'après la définition de T, nous avons $x_{m+1}^{(n)} \in H$ et $x_i^{(n)} = \varphi_i(x_{m+1}^{(n)})$, pour $i = 1, 2, \dots, m$. Or, de $p = \lim_{n=\infty} p_n$ résulte que $\lim_{n=\infty} x_{m+1}^{(n)} = x_{m+1}$, donc, les fonctions φ_i étant continues dans H: $\lim_{n=\infty} x_i^{(n)} = \lim_{n=\infty} \varphi_i(x_{m+1}^{(n)}) = \varphi_i(x_{m+1})$, pour $i = 1, 2, \dots, m$. D'autre part, on a, d'après $\lim_{n=\infty} p_n = p$: $\lim_{n=\infty} x_i^{(n)} = x_i$. On a donc $x_i = \varphi_i(x_{m+1})$, pour $i = 1, 2, \dots, m$, ce qui prouve (d'après $x_{m+1} \in H$) que $p \in T$, c. q. f. d.

Or, la famille F étant projective, on a $Q(F) \subset F$, donc aussi $Q(C(F)) \subset C(F)$ et $Q^m(C(F)) \subset C(F)$: l'ensemble H appartenant à $C(F)$, il en résulte que $Q^m(H) \in C(F)$.

Or, la famille $C(F)$ est inductive (puisque la famille F l'est): l'ensemble $\overline{T}$, comme fermé (donc mesurable B) appartient donc à $C(F)$, et la formule (15) prouve (d'après $Q^m(H) \in C(F)$) que $T \in C(F)$.

D'autre part, de la définition de T résulte sans peine que $P(T) = E$. Notre lemme III est ainsi démontré.

La projection d'un ensemble étant évidemment une image continue de cet ensemble, il résulte tout de suite de notre lemme ce

Corollaire. *Si F est une famille inductive et projective d'ensembles, on a:*

$$PP(C(F)) \subset P(C(F)). \tag{16}$$

Nous allons maintennant à démontrer notre théorème. Soit F une famille inductive et projective. D'après le corollaire du lemme III on a donc la formule (16).

Or, la famille F étant projective, nous avons

$$Q(E) \in F, \quad \text{pour} \quad E \in F,$$

ce qui donne tout de suite

$$CQ(E) \in C(F) \quad \text{pour} \quad E \in F,$$

donc, puisqu'on a toujours $CQ(E) = Q(CE)$:

$$Q(CE) \in C(F), \quad \text{pour} \quad E \in F,$$

d'où

$$PQ(CE) \in PC(F), \quad \text{pour} \quad E \in F,$$

et, puisque toujours $PQ(Z) = QP(Z)$:

$$QP(CE) \in PC(F), \quad \text{pour} \quad E \in F,$$

ce qui donne tout de suite:

$$QP(C(F)) \subset PC(F). \tag{17}$$

Les formules (16) et (17) prouvent que la famille $PC(F)$ est projective.

Pour démontrer notre théorème, il nous reste donc à prouver que la famille $PC(F)$ est inductive.

Soit E un intervalle à m dimensions, c'est-à-dire l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ de R_m, tels que

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

(où a_i et b_i, $i = 1, 2, \dots, m$, sont des nombres réels donnés).

Désignons par H l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, \dots, x_m, 0)$ de R_{m+1}, tels que $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in E$: l'ensemble H sera évidemment mesurable B, donc aussi CH. La famille F étant inductive, il en résulte que $CH \in F$, donc $H \in C(F)$, ce qui donne $P(H) \in P(C(F))$. Or, on a évidemment $P(H) = E$: la formule $P(H) \in P(C(F))$ donne donc $E \epsilon P(C(F))$. Nous avons ainsi démontré que la famille $P(C(F))$ contient tous les intervalles (à un nombre fini quelconque de dimensions).

Soit maintenant E_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ une suite infinie d'ensembles de la famille $PC(F)$, et posons

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots \tag{18}$$

D'après $E_n \epsilon PC(F)$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, nous pouvons poser

$$E_n = P(CH_n), \quad \text{où} \quad H_n \epsilon F, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{19}$$

La famille F étant inductive, il résulte de $H_n \epsilon F$ (pour $n = 1, 2, 3, \dots$) que

$$H_1 H_2 H_3 \dots \epsilon F,$$

donc

$$C(H_1 H_2 H_3 \dots) \epsilon C(F),$$

c'est-à-dire

$$CH_1 + CH_2 + CH_3 + \dots \epsilon C(F),$$

d'où

$$P(CH_1) + P(CH_2) + P(CH_3) + \dots = P(CH_1 + CH_2 + \dots) \epsilon PC(F),$$

c'est-à-dire, d'après (18) et (19), $E \epsilon PC(F)$.

Nous avons ainsi démontré que la famille $PC(F)$ contient les sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles de $PC(F)$.

Soit maintenant E_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ une suite infinie d'ensembles de la famille $PC(F)$, et posons

$$E = E_1 E_2 E_3 \dots \tag{20}$$

Soit n un indice donné. D'après $E_n \epsilon PC(F)$ et d'après le lemme II, E_n est une image continue d'un ensemble X_n de nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$, appartenant à $C(F)$. Il existe donc une fonction $f_n(x)$, définie et continue dans X_n, telle que

$$E_n = f_n(X_n). \tag{21}$$

Soit x un nombre irrationnel de l'intervalle $(0, 1)$,

$$x = \frac{1\,|}{|\nu(1, x)} + \frac{1\,|}{|\nu(2, x)} + \frac{1\,|}{|\nu(3, x)} + \dots \tag{22}$$

— son développement en fraction continue. Posons (pour $n = 1, 2, 3, \dots$):

$$\varphi_n(x) = \frac{1\,|}{|\nu(1.2^{n-1}, x)} + \frac{1\,|}{|\nu(3.2^{n-1}, x)} + \frac{1\,|}{|\nu(5.2^{n-1}, x)} + \dots \tag{23}$$

Les fonctions $\varphi_n(x)$ seront évidemment définies et continues dans l'ensemble N de tous les nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$.

Désignons par N_n l'ensemble de tous les nombres x de N, tels que $\varphi_n(x) \epsilon X_n$. Je dis que $N_n \epsilon C(F)$.

En effet, d'après $X_n \epsilon C(F)$, nous avons $CX_n \epsilon F$, donc, la famille F étant projective, $Q(CX_n) \epsilon F$. Or, désignons par Γ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que

$$x \epsilon N, \quad \text{et} \quad y = \varphi_n(x);$$

la fonction $\varphi_n(x)$ étant continue dans N, on voit sans peine que l'ensemble Γ est un G_δ, donc (la famille F étant inductive): $\Gamma \epsilon F$.

Or, nous avons la formule

$$N - N_n = P[Q(CX_n) . \Gamma]. \tag{24}$$

En effet, si $x_0 \epsilon N - N_n$, on a $x_0 \epsilon N$ et $x_0 \text{ non } \epsilon N_n$, donc (d'après la définition de N_n): $\varphi_n(x_0) \text{ non } \epsilon X_n$, c'est-à-dire $\varphi_n(x_0) \epsilon CX_n$, ce qui donne (vu la définition de l'opération Q): $(x_0, \varphi_n(x_0)) \epsilon Q(CX_n)$, et (vu la définition de Γ): $(x_0, \varphi_n(x_0)) \epsilon \Gamma$, donc $(x_0, \varphi_n(x_0)) \epsilon Q(CX_n) . \Gamma$, et parsuite $x_0 \epsilon P[Q(CX_n) . \Gamma]$.

D'autre part, soit $x_0 \epsilon P[Q(CX_n) . \Gamma]$. Il existe donc un nombre réel y_0, tel que $(x_0, y_0) \epsilon Q(CX_n) . \Gamma$, donc $(x_0, y_0) \epsilon Q(CX_n)$, ce qui donne $y_0 \epsilon CX_n$, et $(x_0, y_0) \epsilon \Gamma$, ce qui donne (vu la définition de Γ) $x_0 \epsilon N$ et $y_0 = \varphi(x_0)$.

Nous avons donc (d'après $y_0 \epsilon CX_n$): $\varphi_n(x_0) \epsilon CX_n$, donc (d'après la définition de N_n): $x_0 \text{ non } \epsilon N_n$, ce qui donne, d'après $x_0 \epsilon N$, $x_0 \epsilon N - N_n$.

La formule (24) est ainsi établie.

D'après $Q(CX_n) \epsilon F$ et $\Gamma \epsilon F$, la famille F étant inductive et projective, on a $P[Q(CX_n) . \Gamma] \epsilon F$: la formule (24) prouve donc que

$$C(N - N_n) \epsilon C(F). \tag{25}$$

Or, d'après $N_n \subset N$, on a évidemment

$$N_n = N . C(N - N_n). \tag{26}$$

La famille F étant inductive, on a $N \epsilon C(F)$, donc, d'après (25), la formule (26) donne (la famille $C(F)$ étant inductive en tant que F): $N_n \epsilon C(F)$, c. q. f. d.

Posons

$$N_0 = N_1 N_2 N_3 \dots; \tag{27}$$

la famille F, et parsuite aussi $C(F)$, étant inductive, et les ensembles N_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ appartenant à $C(F)$, la formule (27) prouve que $N_0^{\circ} \epsilon C(F)$.

Désignons par X_0 l'ensemble de tous les nombres x de N_0, tels que

$$f_n(\varphi_n(x)) = f_1(\varphi_1(x)), \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots;$$

nous aurons donc

$$(28) \qquad f_n(\varphi_n(X_0)) = f_1(\varphi_1(X_0)), \quad \text{pour} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Les fonctions $f_n(\varphi_n(x))$ étant continues dans l'ensemble N_0, on voit sans peine que l'ensemble X_0 est fermé dans N_0. Donc, $X_0 = N_0 . \Phi$, où Φ est un ensemble fermé, donc $\Phi \epsilon C(F)$, ce qui donne, d'après $N_0 \epsilon C(F)$, $X_0 \epsilon C(F)$.

On a maintenant la formule

$$(29) \qquad f_1(\varphi_1(X_0)) = E;$$

pour la démontrer, il suffit de répéter mot-à-mot la démonstration de cette égalité que j'ai donné dans le volume XI de ce journal, p. 124 et 125, formule (5).

L'ensemble X_0 appartenant a $C(F)$ et la fonction $f_1(\varphi_1(x))$ étant continue dans X_0, la formule (29) prouve que l'ensemble E est une image continue d'un ensemble de la famille $C(F)$. D'après le lemme III, l'ensemble E appartient donc à la famille $PC(F)$.

Nous avons ainsi démontré que la famille $PC(F)$ contient les produits d'une infinité dénombrable d'ensembles de $PC(F)$.

Il est ainsi établi que la famille $PC(F)$ est inductive. Or, plus haut nous avons démontré qu'elle est projective. Notre théorème est ainsi démontré complètement.

Voici une application de notre théorème à la théorie des ensembles projectifs de M. N. Lusin.

$\mathcal{F}_0$ désignant la famille de tous les ensembles fermés, posons

$$(30) \quad \mathcal{P}_0 = P(\mathcal{F}_0), \text{ et } \mathcal{C}_{n-1} = C(\mathcal{P}_{n-1}), \; \mathcal{P}_n = P(\mathcal{C}_{n-1}), \text{ pour } n=1,2,3,\ldots$$

Les ensembles appartenant aux familles $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{C}_n$ sont appelés resp. P_n et C_n [1]): ils coïncident avec les ensembles projectifs de classe $\leqslant n$ de M. Lusin [2]).

[1]) Voir p. e. *Fund. Math.* t. XI, p. 121—122.
[2]) *Fund. Math.* t. X, p. 90.

Les ensembles P_0 coïncident avec les ensembles F_σ [1]), donc les ensembles C_0 — avec les G_δ, et parsuite les ensembles P_1 — avec les ensembles (A) (analytiques). Or, la famille $\mathcal{P}_1$ des ensembles (A) est, comme on sait, inductive et projective [2]).

Soit n un nombre naturel, et admettons que la famille $\mathcal{P}_n$ est inductive et projective (ce qui est vrai pour $n=1$). D'après (30), nous avons

$$\mathcal{P}_{n+1} = PC(\mathcal{P}_n)$$

et, en vertu de notre théorème, nous concluons que la famille $\mathcal{P}_{n+1}$ est inductive es projective.

Il en résulte donc, par l'induction, que les familles $\mathcal{P}_n$ sont inductives et projectives pour $n=1, 2, 3, \ldots$ Donc d'après (1), les familles $\mathcal{C}_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ sont inductives (elles ne sont pas, d'ailleurs, projectives). Nous obtenons ainsi les propositions suivantes:

Toute somme et tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles P_n est un ensemble P_n (pour $n=1, 2, 3, \ldots$) [3]).

Toute somme et tout produit d'une infinité dénombrable d'ensembles C_n est un ensemble C_n (pour $n=1, 2, 3, \ldots$).

[1]) Voir *Fund. Math.* t. VII, p. 238.
[2]) *Fund. Math.* t. X, p. 38 et 17.
[3]) Nous avons déjà signalé ce théorème dans le vol. XI de ce journal, p. 126. Voir aussi ma Note dans les *C. R.* t. 185, p. 834 (séance du 24 octobre 1927).