La condition (*N*) et l'intégrale de MM. Denjoy-Perron.

Par

S. Saks (Varsovie).

1. **Notations.** Soit $F(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Si E est un ensemble quelconque agrégé à cet intervalle, nous désignerons par $F(E)$ l'ensemble des valeurs admises par $F(x)$ pour les valeurs $x \in E$. On dit que la fonction $F(x)$ vérifie la condition (N) de M. Lusin [1]) lorsque à tout ensemble de mesure nulle correspond l'ensemble $F(E)$ de la même mesure.

On sait que, si la fonction $F(x)$ est une intégrale indéfinie au sens de M. Lebesgue (c.-à-d. est absolument continue), où — plus généralement — au sens de M. Denjoy, elle satisfait nécéssairement à la condition (N). La réciproque n'est pas évidemment vraie. La question s'impose donc quelles conditions supplémentaires doit vérifier la dérivée, où, plus généralement, un nombre dérivé d'une fonction satisfaisant à la condition de M. Lusin pour que cette fonction soit une intégrale indéfinie au sens de M. Lebesgue, où à celui de M. Denjoy.

Dans cet ordre d'idées, M. Menchoff et moi, nous avons prouvé [2]), il y a quelques années, le théorème suivant: *si un nombre dérivé (médian)* [3]) *d'une fonction continue jouissant de la propriété* (N) *est sommable,* $f(x)$ *est absolument continue.*

[1]) Lusin. *L'intégrale et la série trigonométrique*, (*Thèse*, en russe). Moscou. 1915. p. 109.

[2]) Menchoff. *Sur la représentation conforme, Math. Ann.*, t. 95, 1926. Saks. *Fund. Math.*, t. VII, 1925, p. 290, et *Sur une certaine classe de fonctions d'ensemble, Bull. Ac. Pol.* (*A*), 1926.

[3]) un nombre λ s'appelle un dérivé médian d'une fonction $f(x)$ au point x_0 s'il existe une suite de points x_n telle que $x_n \to x_0$ et $\lim \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lambda$.

Je vais dans cette Note compléter cet énoncé et, en particulier, l'étendre à l'intégrale au sens de MM. Denjoy-Perron.

2. Je commence par prouver deux propositions auxiliaires.

Lemme 1 *). $F(x)$ *étant une fonction continue dans* (a, b) *et* $\{H_n\}$ *une suite non-croissante d'ensembles fermés situés dans* (a, b), *on a*

$$\prod_{n=1}^{\infty} F(H_n) = F\left(\prod_{n=1}^{\infty} H_n\right). \tag{1}$$

Démonstration. Soit $y_0 \in \prod_{n=1}^{\infty} F(H_n)$. Il existe donc pour chaque $n = 1, 2, \ldots,$ un point $x_n \in H_n$ tel que

$$F(x_n) = y_0. \tag{2}$$

Soit x_0 un point limite de la suite $\{x_n\}$. On a évidemment

$$x_0 \in \prod_{n=1}^{\infty} H_n$$

et en vertu de (2), $F(x)$ étant continue,

$$y_0 = F(x_0);$$

donc

$$y_0 \in F\left(\prod_{n=1}^{\infty} H_n\right),$$

et parsuite:

$$\prod_{n=1}^{\infty} F(H_n) \subset F\left(\prod_{n=1}^{\infty} H_n\right).$$

D'autre part, il est évident que pour chaque fonction F et chaque suite $\{H_n\}$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} F(H_n) \supset F\left(\prod_{n=1}^{\infty} H_n\right).$$

L'égalité (1) est ainsi démontrée.

Lemme 2. $F(x)$ *étant une fonction continue dans un intervalle* $\bar{\delta}$ [4]) $= (a, b)$ *et* H *un ensemble fermé contenu dans le même intervalle, on a*

*) Cf. W. Sierpiński, *Fund. Math.*, t. V, p. 156—157.

[4]) nous conviendrons dans la suite de désigner par le symbole $\bar{\delta}$ des inter-

$$(3)\qquad F(b)-F(a)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}[F(b_n')-F(a_n')]+\text{mes}\,F(H),$$

où $\{(a_n', b_n')\}$ désigne la suite des intervalles contigus à H tels que

$$F(b_n')\geqslant F(a_n').$$

Démonstration. Soit $F_1(x)$ la fonction continue identique à $F(x)$ pour les points a, b et pour tous les points de l'ensemble H, et linéaire dans les intervalles contigus à H.

Désignons par $\{\delta_n''=(a_n'', b_n'')\}$ la suite des intervalles ouverts contigus à H et tels que

$$F_1(b_n'')<F_1(a_n'').$$

On a pour chaque n:

$$F_1(b)-F_1(a)\leqslant\text{mes}\,F_1\left(\bar\delta-\sum_{k=1}^{n}\delta_k''\right).$$

Or, δ_k'' étant des intervalles ouverts, les ensembles $\bar\delta-\sum\limits_{k=1}^{n}\delta_k''$ sont fermés, et, en vertu du lemme précédent:

$$F_1(b)-F_1(a)\leqslant\text{mes}\,F_1\left(\bar\delta-\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n''\right)$$

$$\leqslant F_1(H)+\sum_{n=}^{\infty}[F_1(b_n')-F_1(a_n')].$$

On peut évidemment remplacer dans la relation précédente la fonction F_1 par F, et on obtient ainsi l'inégalité (3).

3. Théorème 1. *Si pour une fonction continue $F(x)$ jouissant de la propriété (N), on a presque partout*

$$(1)\qquad \underline{F}(x)\,[5]\leqslant u(x),$$

où $u(x)$ est une fonction sommable,

valles fermés (c.-à-d. les extrémités incluses) et par δ des intervalles ouverts (c.-à-d. les extrémités exclues).

[5]) $\underline{F}(x)$ désigne la dérivée inférieure, c.-à-d. le plus petit des quatre dérivés extrêmes de Dini de la fonction $F(x)$.

$F(x)$ est une fonction absolument continue, c.-à-d. l'intégrale indéfinie au sens de M. Lebesgue.

Démonstration. Soit $\bar\delta=(a, b)$ un intervalle quelconque et ε un nombre positif. Désignons, pour chaque entier i, par E_i l'ensemble des points x de l'intervalle (a, b) où

$$(2)\qquad \frac{\varepsilon i}{\text{mes}\,\bar\delta}\leqslant u(x)<\frac{\varepsilon(i+1)}{\text{mes}\,\bar\delta}.$$

On peut supposer évidemment que la fonction $u(x)$ est positive. Donc, $u(x)$ étant sommable

$$(3)\qquad \text{mes}\left(\bar\delta-\sum_{i=0}^{\infty}E_i\right)=0.$$

Faisons correspondre à chaque E_i un ensemble ouvert O_i de manière que

$$(4)\qquad E_i\subset O_i$$

$$(5)\qquad \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\,\text{mes}\,(O_i-E_i)\leqslant\text{mes}\,\bar\delta.$$

En vertu de l'hypothèse (1), et de (2), presque tout point $x\,\varepsilon\,E_i$ appartient aux intervalles $\delta_x=(a_x, b_x)$ aussi petits que l'on veut, et tels que

$$f(b_x)-f(a_x)<\frac{\varepsilon(i+1)}{\text{mes}\,\bar\delta}\,\text{mes}\,\delta_x.$$

En appliquant donc à ces intervalles le théorème connu de M. Vitali, on obtient, en tenant compte de (3) et (4), une suite double des intervalles ouverts et disjoints, $\delta_i^k=(a_i^k, b_i^k)$ satisfaisant aux conditions suivantes

$$(6)\qquad \delta_i^k\subset O_i$$

$$(7)\qquad f(b_i^k)-f(a_i^k)<\frac{\varepsilon(i+1)}{\text{mes}\,\bar\delta}\,\text{mes}\,\delta_i^k.$$

$$(8)\qquad \text{mes}\left(\bar\delta-\sum_{i,k=1}^{\infty}\delta_i^k\right)=0.$$

Posons $H=\bar\delta-\sum\limits_{i,k=1}^{\infty}\delta_i^k$. H est évidemment un ensemble fermé et, en vertu de (8), de mesure nulle. La fonction F vérifiant la condition (N), on a

$$\operatorname{mes} F(H) = 0,$$

et en appliquant à la fonction $F(x)$ le lemme précédent, on obtient

$$F(b) - F(a) \leqslant \sum_{i,k}{}' [F(b_i^k) - F(a_i^k)] + \operatorname{mes} F(H)$$
$$\leqslant \sum_{i,k}{}' [F(b_i^k) - F(a_i^k)],$$

où la sommation Σ' s'étend à tous les intervalles (a_i^k, b_i^k) pour lesquels

$$F(b_i^k) \geqslant F(a_i^k).$$

On en conclut, en vertu de (7), (6), (5) et (2)

$$F(b) - F(a) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon(i+1)}{\operatorname{mes} \bar{\delta}} \operatorname{mes} \delta_i^k$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} \bar{\delta}} \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \sum_{k=k}^{\infty} \operatorname{mes} \delta_i^k$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} \bar{\delta}} \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \operatorname{mes} O_i$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} \bar{\delta}} \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \operatorname{mes} E_i + \frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} \bar{\delta}} \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \operatorname{mes} (O_i - E_i)$$
$$\leqslant \int_a^b u(x)\, dx + 2\varepsilon.$$

Donc, ε étant un nombre positif quelconque, il vient

$$F(b) - F(a) \leqslant \int_a^b u(x)\, dx,$$

pour chaque intervalle (a, b).

$F(x)$ est parsuite une fonction à variation bornée; or, toute fonction à variation bornée qui jouit de la propriété (N), est absolument continue [6]). Notre énoncé est donc démontré complètement.

[6]) c'est une conséquence immédiate du théorème cité au début de cet article (§ 1) et aussi du théorème suivant de M. Denjoy (*Sur la totalisation*, Chap. I.

Signalons encore le cas particulièrement simple du théorème que nous venons de prouver: *une fonction continue jouissant de la propriété* (N) *et admettant presque partout la dérivée inférieure (supérieure) non-positive (non-négative), est une fonction absolument continue et, parsuite, est non-croissante (non-décroissante* [7])).

4. Avant de pousser plus loin, nous prouverons le suivant

Lemme 3. Soient $F(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et jouissant de la propriété (N), $M(x)$ une fonction majorante (au sens de Perron [8])) de sa dérivée inférieure $\underline{F}(x)$ et, ensuite, H un ensemble parfait agrégé à (a, b); supposons que

1° si (α, β) est un sous-intervalle de (a, b) ne contenant pas dans son intérieur de points de H

$$F(\beta) - F(\alpha) \leqslant M(\beta) - M(\alpha); \tag{1}$$

Ann. Éc. Norm. Sup. (3°), t. 33, 1916, p. 192): *pour qu'une fonction continue soit une totale (intégrale D) indéfinie, il faut et il suffit qu'elle soit à variation généralisée bornée et qu'elle vérifie la condition* (N).

Une fonction $F(x)$ est à variation généralisée bornée (le terme est du à M. Lusin, l. c. [1]) p. 62 et C. R. 23. X. 1912) lorsque tout ensemble parfait contient une portion P où la série des oscillations de $F(x)$ sur les segments contigus possède la somme finie. Cf. aussi Denjoy, l. c. p. 163 (note [1])).

[7]) cet énoncé, pour le cas où un des nombres dérivés de Dini *de côté fixe* est non-positif, m'a été signalé par M. Zygmund. La méthode très simple de la démonstration de M. Zygmund, ne se prête pas pourtant à être appliquée au cas général.

[8]) Une fonction $M(x)$ est dite une majorante d'une fonction $\lambda(x)$ lorsque en chaque point x

$$M(x) > -\infty \quad \text{et} \quad M(x) \geqslant \lambda(x).$$

Lorsque une fonction $\lambda(x)$ possède dans un intervalle (a, b) des fonctions majorantes $M(x)$ la borne inférieure des nombres $M(b) - M(a)$ s'appelle l'intégrale supérieure au sens de M. Perron de $\lambda(x)$ dans (a, b). On définit d'une manière analogue des fonctions minorantes et l'intégrale inférieure au sens de Perron. Si les deux intégrales d'une fonction $\lambda(x)$ existent, leur valeur commune s'appelle l'intégrale au sens de M. Perron de $\lambda(x)$, et $\lambda(x)$ est dite une fonction intégrable. (*Voir*: Perron, *Sitzgsber. Heidelberg Ak. Wiss.* 1914 (A), 14. Abh., pp. 1—16: Cf. aussi: Rosenthal, *Neuere Untersuchungen über Funktionen reeller Veränderlichen*, 1927, p. 1074.

L'équivalence des notions de l'intégrale de M. Perron et de celle (au sens restreint) de M. Denjoy a été établie indépendamment par MM. Alexandroff (*Math. Zeitschr.* t. 20, 1924, p. 213), et Looman (*Math. Ann.* t. 93. 1925, p. 153).

2°. si $x \in H$, on a, pour tout point y de (a, b)

$$\frac{M(y) - M(x)}{y - x} > -K, \tag{2}$$

où K est un nombre fixe ne dépendant ni de y, ni de x.

Dans ces hypothèses, l'inégalité (1) est valable pour *chaque* sous-intervalle (α, β) de (a, b).

Démonstration. Il suffit évidemment de prouver l'inégalité (1) pour le cas où l'intervalle (α, β) coïncide avec (a, b).

Soit, à cet effet, $F_1(x)$, resp. $M_1(x)$, la fonction continue admettant pour a, b, et tous les points de H les mêmes valeurs que $F(x)$, resp. $M(x)$, et linéaire dans les intervalles contigus à H.

En vertu de (1), on a pour chaque intervalle (α, β) contigu à H

$$F_1(\beta) - F_1(\alpha) = F(\beta) - F(\alpha) \leqslant M(\beta) - M(\alpha) = M_1(\beta) - M_1(\alpha). \tag{3}$$

Pareillement, il s'ensuit facilement de (2) que

$$\frac{M_1(y) - M_1(x)}{y - x} > -K$$

pour chaque couple de points x, y de l'intervalle (a, b). La fonction $M_1(x) + Kx$ est donc non-décroissante, et l'on a:

$$M_1(b) - M_1(a) \geqslant \int_a^b M_1'(x)\, dx. \tag{4}$$

D'autre part, en vertu de (2), la série des oscillations de $M(x)$ sur les intervalles contigus à H, converge; il en est donc de même, d'après (1), des oscillations des fonctions $F(x)$, $F_1(x)$ et $F(x) - F_1(x)$. Or, la fonction $F(x) - F_1(x)$ s'annulle pour tous les points de H, et, parsuite, en vertu d'un théorème connu [9]), elle a presque partout

[9]) *toute fonction à variation généralisée bornée admet presque partout la dérivée unique et finie* (*voir*: Lusin, l. c. [1]), p. 69 et l. c. [6]); Denjoy, l. c. [6]) p. 168, note [1]).

On peut d'ailleurs prouver aisément la proposition dont nous profitons dans le texte, de la manière suivante: soit $F(x)$ une fonction continue dans (a, b) s'annulant pour les points d'un ensemble parfait H. Désignons par $\{\delta_n\}$ la suite des intervalles ouverts contigus à H; soit, pour tout n, m_n l'oscillation de $F(x)$ sur δ_n. Supposons que la série $\sum_n m_n$ converge.

Soit maintenant $F_1(x)$ et $F_2(x)$ les fonctions s'annulant aux points de H et égales à m_n, resp. à $-m_n$, dans les intervalles correspondants δ_n. Les fonctions

en H la dérivée nulle, c.-à.-d. presque partout dans H

$$F'(x) = F_1'(x);$$

tout pareillement,

$$M'(x) = M(x),$$

en presque tout point de H.

$M(x)$ étant une majorante de $F(x)$, il s'en suit presque partout en H,

$$F_1'(x) = F'(x) \leqslant M'(x) = M_1'(x).$$

Or, en vertu de (3) l'inégalité

$$F_1'(x) \leqslant M_1'(x)$$

a évidemment lieu dans chaque intervalle contigu à H, donc d'après le précédent, presque partout dans (a, b).

La fonction $M_1'(x)$ étant sommable et la fonction $F_1(x)$ jouissant (en même temps que $F(x)$) de la propriété (N), on peut appliquer à ces fonctions le théorème 1; il en résulte que $F_1(x)$ est absolument continue, donc, en tenant encore compte de (4) que

$$F(b) - F(a) = F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b F_1'(x)\, dx \leqslant \int_a^b M_1'(x)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant M_1(b) - M_1(a) = M(b) - M(a).$$

Notre lemme est ainsi démontré.

5. Soit $M(x)$ une majorante (au sens de Perron) de la dérivée inférieure d'une fonction continue $F(x)$. Nous dirons qu'un point x est singulier si dans chaque voisinage de ce point il y a des intervalles (α, β) tels que

$$F(\beta) - F(\alpha) > M(\beta) - M(\alpha).$$

ainsi définies sont évidemment à variation bornée, donc presque partout dérivables. Elles admettent parsuite en presque tout point de H la dérivée nulle, et l'on a en presque tout point de H:

$$0 = F_1'(x) \geqslant \overline{F}^{+}(x) \geqslant \underline{F}^{+}(x) \geqslant F_2'(x) = 0,$$
$$0 = F_1'(x) \leqslant \overline{F}^{-}(x) \leqslant \underline{F}^{-}(x) \leqslant F_2'(x) = 0.$$

où $\overline{F}^{+}$, $\overline{F}^{-}$ etc. désignent resp. quatre dérivés extrêmes de Dini. Il en résulte aussitôt qu'on a presque partout en H

$$\overline{F}^{+}(x) = \overline{F}^{-}(x) = \ldots = F'(x) = 0.$$

On voit aisément que, si pour un intervalle (a, b)

(1) $$F(b) - F(a) > M(b) - M(a),$$

l'ensemble des points singuliers de cet intervalle est non-vide et parfait [10].

6. **Théorème 2.** *Si la dérivée inférieure d'une fonction continue $F(x)$ jouissant de la propriété (N), possède une majorante, $F(x)$ est une intégrale indéfinie au sens de Denjoy-Perron.*

Démonstration. Soit $M(x)$ une majorante de la dérivée inférieure de $F(x)$. Nous allons prouver d'abord que, pour tout intervalle (a, b):

(1) $$F(b) - F(a) \leqslant M(b) - M(a).$$

En effet, supposons, par impossible, que pour un certain intervalle (a, b)

$$F(b) - F(a) > M(b) - M(a).$$

Désignons par H l'ensemble de points singuliers (relativement aux fonctions $F(x)$ et $M(x)$) de (a, b). D'après le § précédent cet ensemble est non-vide et parfait. Or, la fonction $M(x)$ est une majorante au sens de Perron et, par conséquent, sa dérivée inférieure est partout $> -\infty$ [11]. Il existe donc un intervalle $\bar{\delta}$ contenu dans (a, b) et un nombre fixe K tels qu'en posant $H_1 = H.\bar{\delta}$:

(2) H_1 est un ensemble parfait,

(3) $$\frac{M(y) - M(x)}{y - x} > -K,$$

pour tout point $x \in H_1$ et tout point $y \in \bar{\delta}$.

D'autre part, en vertu du § 6, pour tout sous-intervalle (α, β) de $\bar{\delta}$ ne contenant pas de points de l'ensemble H_1, on a:

(4) $$F(\beta) - F(\alpha) \leqslant M(\beta) - M(\alpha),$$

donc, en raison du lemme 3, qu'on peut appliquer ici en vertu de (2) et (3), l'inégalité (4) est valable pour tout sous-intervalle de $\bar{\delta}$.

Or, l'intervalle $\bar{\delta}$ contenant dans son intérieur de points singuliers, nous aboutissons ainsi à une contradiction qui justifie l'inégalité (1).

La fonction $M(x)$ étant à variation bornée généralisée [12], il résulte de suite de cette inégalité que la fonction $F(x)$ est aussi à variation bornée généralisée. Il s'en suit, la fonction $F(x)$ vérifiant encore la condition (N), qu'elle est une intégrale indéfinie au sens de Denjoy-Perron [13].

7. Il s'ensuit immédiatement du théorème du § précédent la proposition suivante qui présente la généralisation du théorème 1 à l'intégrale de Denjoy-Perron.

Théorème 3. *Si pour une fonction continue $F(x)$ jouissant de la propriété (N), on a presque partout*

(1) $$\underline{F}(x) \leqslant u(x),$$

où $u(x)$ est une fonction intégrable au sens de Denjoy-Perron, $F(x)$ est une intégrale indéfinie au même sens.

Démonstration. On peut supposer toujours, en posant event. dans un ensemble de mesure nulle $u(x) = +\infty$, que la relation (1) a lieu pour toute valeur de x. $u(x)$ étant une fonction intégrable D.-P., elle possède des fonctions majorantes qui sont, à la fois, (en raison de (1), des majorantes de $F(x)$. Notre énoncé se fait donc une conséquence immédiate du théorème précédent.

[10]) La démonstration du théorème 2 a été appuyée d'abord sur la théorie des nombres transfinis. C'est pour éviter l'induction transfinie qu'on a introduit ici la notion de point singulier.

[11]) *voir* [8]).

[12]) *voir* [6]).

[13]) *voir* [6]).