Sur les ensembles de dimension faible.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie)

Le but de cette Note est la démonstration de *l'existence pout tout n naturel d'ensembles de dimension n faible.* (schwach n-dimensionale Mengen d'après M. Menger [1]). Pour $n=1$ le problème a été résolu déja en 1921 par M. Sierpiński [2]. Le procédé de construction que je vais donner est une généralisation de celui de M. Sierpiński [2a]).

I. Recherches préliminaires.

1. Les constantes de Urysohn. Soit F un ensemble situé dans un espace R métrique et compact. Déterminons pour $k=1,2,\ldots$ le nombre $d_k(F)$ par les conditions suivantes:

Quel que soit $\varepsilon > d_k(F)$ il existe un système d'ordre k de sous-ensembles de F, *fermés dans* F, recouvrant F et ayant des diamètrès inferieures à ε; par contre un tel système n'existe pas si $\varepsilon < d_k(F)$ [3]).

On a les relations suivantes:

$$(1) \qquad d_k(F) > 0 \quad \text{pour} \quad k \leqq \dim F$$

$$(2) \qquad d_k(F) = 0 \quad \text{pour} \quad k > \dim F.$$

[1]) Menger: *Akad. Anzeiger d. Akademie d. Wissenschaften* Nr. 1, 1928 et *Dimensionstheorie*, 1928, p. 138—150, 309—310. Un ensemble est de dimension n *faible*, si l'ensemble de points où il est de dimension n, est de dimension $n-1$.

[2]) *Fund. Math.* II p. 81—88.

[2a]) Les résultats contenus dans cette Note ont été présenté au Congrès international de Bologne (Septembre 1928).

[3]) Urysohn: *Fund. Math.* VIII p. 352—355. (Urysohn suppose F fermé). Comp. aussi la notion analogue de „Grad der Dimension", introduite par M. Menger, d'une manière permettant d'eviter la metrique (*Dimensionstheorie* p. 179—180).

Pour F fermé (1) et (2) expriment un résultat fondamental de la théorie de Menger-Urysohn; pour F quelconque (1) et (2) presentent un cas particulier d'un théorème de Hurewicz [4]).

D'après une remarque de Hurewicz [5]) on peut dans la définition de $d_k(F)$ remplacer l'expression:

„système d'ordre k de sous-ensembles de F, fermés dans F"

par:

„système d'ordre k de sous-ensembles de F, *ouverts dans* F"

ou encore par:

„*système d'ordre k d'ensembles ouverts dans R*".

L'ensemble somme d'un système d'ordre k d'ensembles ouverts dans R et ayant des diamétres $< \varepsilon$ est evidement un ensemble ouvert dans R et pour lequel la constante d_k est inférieure à ε.

On arrive de cette manière a l'enoncé suivant:

F designant un sous-ensemble d'un espace R métrique et compact, $d_k(F) =$ borne inférieure des nombres $d_k(G)$, attaches aux ensembles ouverts de l'espace R, qui contiennent F [6]).

2. Théorème. *Soit G un domaine connexe du R_n (espace euclidien à n dimensions). A étant un ensemble de dimension $\leqq n-2$, $G-A$ est un semi-continu.*

Par une suite de transformations simples [7]) on peut ramener ce théorème à la proposition suivante:

Soit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ un système de coordonnées cartesiennes, I le paralellepipéde: $0 \leqq \xi_i \leqq 1$, $i=1\ldots, n$, K le domaine $0 < \xi_1 < 1$. *Si l'ensemble $A_1 \subset K$ a un point commun avec chaque continu contenu dans I et contenant les points: $\xi_i = 0$ et $\xi_i = 1$, $i=1,2,\ldots n$ alors $\dim A_1 \geqq n-1$.*

[4]) Hurewicz. *Proc. Akad. Amsterdam* XXX, N° 3, p. 425—426, 429.

[5]) Hurewicz l. c. p. 426.

[6]) Il en résulte l'expression suivante du théorème de Tumarkin-Hurewicz: il existe dans R un ensemble F_1, tel que: 1) F_1 est un G_δ, 2) $F_1 \supset F$, 3) $d_k(F_1) = d_k(F)$. Comp. Tumarkin *Math. Ann.* 98 p. 653, Hurewicz: *Proc. Akad. Amsterdam* XXX, p. 139, Menger: *Dimensionstheorie* p. 118—120.

[7]) Dans certains cas il faudra utiliser des *dilatations*. J'appelle dilatation de centre p_0 une transformation du R_n en soi, qui fait correspondre au point p_0 la sphère fermée $\overline{S(p_0, \lambda)}$ $(\lambda > 0)$, — à tout point $p \neq p^0$ — le point p' situé sur la demi-droite d'origine p^0, passant par p et tel que $\varrho(p_0, p') = \lambda + \varrho(p_0, p)$. Evidemment c'est une homéomorphie entre les ensembles $R_n - p_0$ et $R_n - \overline{S(p_0, \lambda)}$.

Soit G_1 un domaine du R_n contenant A_1. Posons $G_2 = G_1 \times K$. Les deux faces de I: $\xi_1 = 0$ et $\xi_1 = 1$ sont contenu dans l'ensemble fermé $I - G_2$ et appartiennent necessairement à deux composants différents de cet ensemble, — car autrement $I - G_2$, donc à fortiori $I - A_1$ contiendrait un continu, contenant les points: $\xi_i = 0$ et $\xi_i = 1$, $i = 1, 2 \dots n$, contrairement à la supposition. On a par suite une decomposition: $I - G_2 = B_1 + B_2$, telle que B_1 et B_2 sont fermés. $B_1 \times B_2 = 0$, B_1 contient la face $\xi_1 = 0$, B_2 — la face $\xi_1 = 1$ de I.

Construisons, ce qui est evidement possible un domaine $G_3 \supset B_1$, tel que: $\overline{G}_3 \times B_2 = 0$, et posons $L = I \times (\overline{G}_3 - G_3)$. On aura $L \times (B_1 + B_2) = 0$, donc: $L \subset G_2 \subset K$. Il en résulte que L est d'après la terminologie de M. Lebesgue un ensemble — limite d'un J_1, donc d'après le lemme fondamental de M. Lebesgue [3]) on aura:

(3) $$d_{n-1}(L) \geqq 1$$

donc aussi

(4) $$d_{n-1}(G_2) \geqq 1; \quad d_{n-1}(G_1) \geqq 1.$$

G_1 étant un domaine arbitraire contenant A_1, on a d'après les résultats de § 1:

(5) $$d_{n-1}(A_1) \geqq 1; \quad \dim A_1 \geqq n-1 \qquad \text{c. q. f. d.}$$

II. Construction d'un ensemble de dimension n faible.

3. Soit E_0 l'hyperplan $\xi_1 = 0$ du R_{n+1}. Etant donné un point p du R_{n+1}, nous designerons par $\xi_1(p)$ sa première coordonnée et par $\alpha(p)$ sa projection sur E_0. Soit Q un sous ensemble de E_0, $\sigma \leqq \tau$ deux nombres réels. Nous désignonerons par $P(\sigma, \tau; Q)$ l'ensemble de points du R_{n+1} determiné par les relations:

(6) $$\sigma \leqq \xi_1(p) \leqq \tau \qquad \alpha(p) \subset Q$$

Dans le cas $\sigma = \tau$, nous ecrirons au lieu de $P(\sigma, \tau; Q)$ simplement $P(\sigma, Q)$.

4. Soit maintenant Q un paralellepipède (à n dimensions) de E_0, determiné par les inegalités: $\sigma_i \leqq \xi_i \leqq \tau_i$; $i = 2, 3, \dots, n+1$. Considérons les $3n$ paralellepipédes à $n-1$ dimensions situés dans Q:

(7) $$\begin{cases} \xi_i = \sigma_i & \sigma_k \leqq \xi_k \leqq \tau_k \\ \xi_i = \dfrac{\sigma_i + \tau_i}{2} & \sigma_k \leqq \xi_k \leqq \tau_k \\ \xi_i = \tau_i & \sigma_k \leqq \xi_k \leqq \tau_k \end{cases}$$
$$i = 2, 3, \dots, n+1; \qquad k = 2, 3, \dots, n+1, \ k \neq i.$$

Désignons par $\beta(Q)$ l'ensemble-somme de tous ces paralellepipédes. — $\beta(Q)$ contient la frontière de Q et décompose Q en 2^n paralellepipédes à n dimensions, que nous numérotons dans un ordre quelconque. Soient:

(8) $$\gamma_1(Q), \ \gamma_2(Q), \dots, \ \gamma_{2^n}(Q)$$

ces paralellepipèdes. On aura les relations suivantes:

(9) $$\sum_{l=1}^{2^n} \gamma_l(Q) = Q$$

(10) $$\delta(\gamma_l(Q)) = \tfrac{1}{2}\delta(Q)$$

(11) la frontière de $\gamma_l(Q)$ (par rapport à E_0) est contenue dans $\beta(Q)$.

5. Considérons un paralellepipéde S a $n+1$ dimensions determiné par les inégalités: $\sigma_i \leqq \xi_i \leqq \tau_i$ (on suppose que S n'est pas degeneré c. à d. que $\sigma_i < \tau_i$).

En utilisant les notations de **3** on peut ecrire:

(12) $$S = P(\sigma_1, \tau_1; Q)$$

Q ayant même signification que dans **4**. Posons:

(13) $$\varphi(S) = P(\sigma_1, \beta(Q))$$

(14) $$\begin{cases} \psi_{2^{n}r+l}(S) = P\Big[\sigma_1 + (\tau_1 - \sigma_1)\Big(\dfrac{1}{2^{r+1}} + \dfrac{2l-1}{2^{r+n+2}}\Big), \\ \qquad \sigma_1 + (\tau_1 - \sigma_1)\Big(\dfrac{1}{2^{r+1}} + \dfrac{2l}{2^{r+n+2}}\Big); \ \gamma_l(Q)\Big] \end{cases}$$
$$r = 0, 1, \dots, \quad l = 1, 2, \dots, 2^n.$$

Le symbole $\psi_m(S)$ est ainsi defini pour tout nombre m naturel. C'est evidement un paralellepipede à $n+1$ dimensions, de la même nature que S, et contenu dans S.

[3]) v. *Fund. Math.* II p. 255—285, en particulier p. 262—264 et 274—275.

[4]) Cette construction est une généralisation de celle de M. Sierpiński (l. c. [2])); comp. aussi les remarques de M. Menger (*Dimensionstheorie* p. 309—310).

6. Désignons par S_0 le paralellepipède $0 \leqq \xi_i \leqq 1$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Posons:

$$\begin{cases} S_{m_1} = \psi_{m_1}(S_0) \\ S_{m_1, m_2, \dots, m_j, m_{j+1}} = \psi_{m_{j+1}}(S_{m_1, m_2, \dots, m_j}) \end{cases} \tag{15}$$

$$T_j = \sum S_{m_1, m_2, \dots, m_j} \quad m_1, m_2, \dots m_j = 1, 2 \dots \tag{16}$$

$$U_1 = \prod_{j=1}^{\infty} T_j \tag{17}$$

$$U_2 = \varphi(S_0) + \sum \varphi(S_{m_1, \dots, m_j}) \quad j = 1, 2, \dots; m_1, m_2, \dots, m_j = 1, 2, \dots, \tag{18}$$

$$U = U_1 + U_2. \tag{19}$$

Je dis que U est l'ensemble cherché.

III. Démonstration que U est de dimension n faible.

7 [10]. Je dirais que le continu C *traverse* le paralellepipède $P(\sigma, \tau, Q)$ si C a des points communs avec chacune des faces: $\xi_1 = \sigma$, $\xi_1 = \tau$ et si $C \subset P(\sigma, \tau; Q)$.

Si C traverse $P(\sigma, \tau; Q)$ et si $\sigma \leqq \bar{\sigma} < \bar{\tau} \leqq \tau$, alors C contient un sous-continu C^* qui traverse $P(\bar{\sigma}, \bar{\tau}; Q)$.

8. *Si le continu C traverse $S = P(\sigma_1, \tau_1; Q)$ et si $C \times \varphi(S) = 0$, alors il existe un continu $C_1 \subset C$ et un entier m, tels que C_1 traverse $\psi_m(S)$.*

Soit r_1 un entier tel que $\frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1}} < \varrho(C, \varphi(S))$. D'après **7** C contient un continu C_0, qui traverse $P\left(\sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1+1}}, \sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1}}; Q\right)$. Désignons par $\alpha(C_0)$ la projection de C_0 sur E_0. On a:

$$\alpha(C_0) \subset Q = \sum_{i=1}^{2^n} \gamma_i(Q) \tag{20}$$

on peut donc déterminer un entier l_1 tel que: $\alpha(C_0) \times \gamma_{l_1}(Q) \neq 0$. Je dis que l'on a necessairement:

$$\alpha(C_0) \subset \gamma_{l_1}(Q). \tag{21}$$

[10]) Comp. pour la suite ma note: Sur la decomposition d'un domaine etc. *Fund. Math.* III p. 65—75 en particulier p. 72—74.

En effet, supposons le contraire. C_0 contient alors un point p' tel que $\alpha(p')$ est contenu dans la frontière de $\gamma_{l_1}(Q)$ donc dans $\beta(Q)$ (d'après **4** (11)).

Le point p'' determiné par $\xi_1(p'') = \sigma_1$ et $\alpha(p'') = \alpha(p')$ est contenu dans $\varphi(S)$.

Comme $p' \subset C_0 \subset P\left(\sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1+1}}, \sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1}}; Q\right)$; on aura:

$$\sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1+1}} \leqq \xi_1(p') \leqq \sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1}} \tag{22}$$

$$\varrho(C_0, \varphi(S)) \leqq \varrho(p', p'') = |\xi_1(p') - \xi_1(p'')| \leqq \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1}} \tag{23}$$

contrairement à la signification de r_1. Donc (21) est demontré. — Il en résulte que C_0 traverse $P\left(\sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1+1}}, \sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1}}, \gamma_{l_1}(Q)\right)$. Donc d'après **7** il existe un continu $C_1 \subset C_0 \subset C$ qui traverse le paralellepipède:

$$\left| \begin{aligned} & P\left[\sigma_1 + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1+1}} + \frac{(\tau_1 - \sigma_1)(2 l_1 - 1)}{2^{r_1+n+2}}; \sigma_1 + \right. \\ & \left. + \frac{\tau_1 - \sigma_1}{2^{r_1+1}} + \frac{(\tau_1 - \sigma_1) 2 l_1}{2^{r_1+n+2}}; \gamma_{l_1}(Q)\right] = \psi_{2^n r_1 + l_1}(S) \end{aligned} \right. \tag{24}$$

c. q. f. d.

9. *Si le continu C traverse S_0, on a: $C \times U \neq 0$.*

Supposons que l'on a $C \times U_2 = 0$. Alors en vertu de **8** nous pouvons former une suite d'entiers $\{m_j'\}$ et une suite de continus $\{C_j\}$, de manière que:

$$C_1 \subset C; \quad C_{j+1} \subset C_j \tag{25}$$

$$C_j \text{ traverse } S_{m_1', m_2', \dots, m_j'}. \tag{26}$$

Comme, d'après (26) $C_j \subset S_{m_1', m_2', m_j'}$ et $\prod_{j=1}^{\infty} C_j$ n'est pas vide, les C_j étant fermés, il en résulte

$$\prod_{j=1}^{\infty} C_j \subset C \tag{27}$$

$$\prod_{j=1}^{\infty} C_j \subset \prod_{j=1}^{\infty} S_{m_1', m_2', \dots, m_j'} \subset \prod_{j=1}^{\infty} T_j = U_1 \subset U \tag{28}$$

$$C \times U \neq 0 \tag{29}$$

c. q. f. d.

10. Soit G_0 l'intérieur du paralellepipède $-\lambda < \xi_1 < 1+\lambda$; $0 < \xi_k < 1$, $k = 2, 3, \ldots, n+1$. (λ nombre positif). Soient q_1, q_2 deux points de G_0 tels que $\xi_1(q_1) < 0$; $\xi_1(q_2) > 1$.

Considerons uu continu $D \subset G_0$ tel que $q_1 + q_2 \subset D$. En utilisant **7** on voit que D contient un continu D_1 qui traverse S_0. Donc d'après **9**:

(30) $$U \times D \neq 0.$$

L'ensemble $G_0 - U \supset q_1 + q_2$, mais ne contient aucun continu contenant ces deux points. Donc G_0 étant un domaine connexe du R_{n+1}, $G_0 - U$ n'est pas un semi-continu.

Il s'ensuit en vertu de **2** *que* $\dim U = n$.

11. *On a pour tout point* $p \subset U_1$ *la relation*:

(31) $$\dim_p U = 0.$$

La démonstration de (31) est la même, que dans le cas de l'ensemble de M. Sierpiński [11]). Elle est basée d'abord, sur l'inegalité (10) et la définition (14) qui entraînent:

(32) $$\delta(\psi_m(S)) \leqq \tfrac{1}{2}\delta(S)$$

(33) $$\delta(S_{m_1, m_2, m_j, m_{j+1}}) \leqq \frac{1}{2}\delta(S_{m_1, m_2, \ldots, m_j}) \leqq \frac{1}{2^{j+1}}\delta(S_0) = \frac{\sqrt{n}}{2^{j+1}}$$

donc:

(34) $$\lim_{j=\infty} \delta(S_{m_1, m_2, \ldots, m_j}) = 0.$$

D'autre part, on a, en posant $\psi_m(S) = P(\sigma', \tau'; Q^*)$ pour $m_1 \neq m$ les inégalités:

(35) $$\varrho(\psi_m(S), \quad \psi_{m_1}(S)) \geqq \tau' - \sigma'$$

(36) $$\varrho(\psi_m(S), \quad \varphi(S)) \geqq \tau' - \sigma'.$$

En tenant compte de ce que:

(37) $$S_{m_1, m_2 \ldots, m_j m_{j+1}} \subset S_{m_1, m_2, \ldots, m_j}$$

(38) $$S_{m_1, m_2, \ldots, m_j} \supset \varphi(S_{m_1, m_2, \ldots, m_j})$$

on verifié facilement que, l'on a, en posant $S_{m_1, m_2, \ldots, m_j} = P(\sigma'', \tau'', Q^{**})$:

(39) $$\varrho[(U \times S_{m_1, m_2, \ldots, m_j}), \quad U - (U \times S_{m_1, m_2, \ldots, m_j})] \geqq \tau'' - \sigma'' > 0$$

c. à d. l'ensemble $U \times S_{m_1, m_2, \ldots, m_j}$ est a la fois fermé et ouvert dans U.

[11]) v. Menger: *Dimensionstheorie* p. 140.

On voit en tenant compte de (34), (16), (17), que tout point $p \subset U_1$ est contenu dans des ensembles de diamètre arbitrairement petit, qui sont á la fois fermés et ouverts dans U. Donc $\dim_p U = 0$ c. q. f. d.

12. Désignons par U^n l'ensemble de points p de U, tels que $\dim_p U = n$. D'après **11** on aura $U^n \subset U_2$. Mais l'ensemble $\beta(Q)$ défini dans **5** est de dimension $n-1$, est il en est de même pour l'ensemble $\varphi(S)$ (qui est, comme $\beta(Q)$ — la somme de $3n$ paralellepipédes à $n-1$ dimensions). De plus $\varphi(S)$ est fermé. — Donc U_2 étant l'ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés de dimension $n-1$ est aussi de dimension $n-1$. Il en résulte que $\dim U^n = n-1$ [12]).

13. D'après **10** et **12** on a;

(40) $$\dim U = n; \quad \dim U^n = n - 1$$

donc U *est de dimension* n *faible* c. q. f. d.

[12]) Comme U est de dimension n, on ne peut pas avoir $\dim U^n < n-1$, d'après le théorème fondamental de M. Menger, (v. *Dimensionstheorie* p. 135).

Varsovie 20/X 1928.