Or, d'après (14), on a

$$\text{card}\,[P_\xi(p_n)P_\eta(p_n)] \leqslant \aleph_0 \quad \text{et} \quad \text{card}\,[Q_\xi(q_n)\,Q_\eta(q_n)] \leqslant \aleph_0,$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$; la formule (16) donne donc

$$\text{card}\,(X_\xi X_\eta) \leqslant \aleph_0. \quad (\text{pour } \xi \neq \eta)$$

Nous avons ainsi démontré que les termes de la série (13) ont, deux à deux, un ensemble au plus dénombrable de points communs.

Soit ξ un indice donné $< \varphi$. D'après la propriété de l'ensemble P, P_ξ, en tant que sous-ensemble non dénombrable de P, est de mesure extérieure positive. Les nombres (7) formant un ensemble dense dans tout intervalle, il en résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} P_\xi(p_n)$ est un ensemble, dont le complémentaire est de mesure intérieure nulle [1].

Or, d'après la propriété de l'ensemble Q, Q_ξ, en tant que sous-ensemble non dénombrable de Q, est de deuxième catégorie. Les nombres (8) formant un ensemble dense dans tout intervalle, il en résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} Q_\xi(q_n)$ est un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle.

D'après (11) et (12) il en résulte tout de suite que les ensembles X_ξ ($\xi < \varphi$) sont de deuxième catégorie dans tout intervalle et que leurs complémentaires sont de mesure intérieure nulle.

La décomposition (13) satisfait donc aux conditions de notre théorème qui est ainsi démontré.

[1] En effet, on démontre sans peine le théorème suivant: Si T est un ensemble linéaire de mesure extérieure positive, et si $p_1, p_2, p_3, \ldots$ est une suite infinie de nombres réels, dense dans tout intervalle, le complémentaire de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} T(p_n)$ est de mesure intérieure nulle.

Über approximativ stetige Funktionen von zwei (und mehreren) Veränderlichen.

Von

J. Ridder (Baarn).

In der folgenden Mitteilung wird die Definition der approximativ stetigen Funktionen einer Veränderlichen übertragen auf den Fall von zwei (und mehreren) Veränderlichen, derartig daß die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionenklasse dabei behalten bleiben. Wir werden nur den Fall von zwei Veränderlichen betrachten; die Übertragung bei mehreren Veränderlichen ist darauf evident.

§ 1. Eine reelle Funktionen $f(x, y)$, die in der Umgebung eines Punktes (ξ, η) definiert ist, heißt an der Stelle (ξ, η) *approximativ stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathfrak{M}(\xi, \eta; \varepsilon)$ der Punkte (x, y), für die

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

ist, im Punkte (ξ, η) die *innere* Dichte 1 hat.

Das soll bedeuten:

$$\liminf_{m(J)=0} \frac{m_i[\mathfrak{M}(\xi, \eta; \varepsilon) . J]}{m(J)} = 1.$$

wobei J ein Quadrat mit Mittelpunkte (ξ, η) —, $\mathfrak{M}.J$ der Durchschnitt der Mengen $\mathfrak{M}$ und J und $m_i[\mathfrak{M}.J]$ das *innere* Maß (L) des Durchschnittes bedeutet.

§ 2. **Satz I.** *Jede in einem (beschränkten) Gebiete G definierte, approximativ stetige Funktion ist in G meßbar (und endlich).*

Der Beweis verläuft wie im linearen Fall; siehe E. Kamke, *Zur Definition der approximativ stetigen Funktionen*, Fund. Math., t. X, (1927).

Satz II. *Eine in G meßbare Funktion ist approximativ stetig in (ξ, η), wenn sie stetig ist in (ξ, η) auf einer Menge $\mathfrak{M}$, welche die Dichte 1 in (ξ, η) hat; und umgekehrt.*

Die Dichte heiße α in (ξ, η), wenn

$$\liminf_{m(J)=0} \frac{m[\mathfrak{M}.J]}{m(J)} = \alpha$$

ist (vgl. § 1 für die Bedeutung der Buchstaben).

Beweis wie im linearen Fall; siehe A. Denjoy, *Sur les fonctions dérivées sommables*, Bull. Soc. Math. (1915), S. 166—168. Man gebrauche Quadrate mit Mittelpunkte (ξ, η), welche sich in (ξ, η) zusammenziehen.

Satz III. *Jede in einem (beschränkten) Gebiete G definierte approximativ stetige Funktion hat die Eigenschaft, daß bei willkürlichem α die Menge $E_1[f > \alpha]$ in ihren Punkten die Dichte 1 hat und ebenfalls die Menge $E_2[f < \alpha]$. Umgekehrt ist eine endliche Funktion, welche beiden Bedingungen genügt, in G approximativ stetig.*

Für den Beweis siehe A. Denjoy, l. c., S. 168 u. 169.

Bemerkung: In denjenigen Punkten von G, wo die Dichte der Menge $E_1[f > \alpha]$ nicht 0 oder 1 ist, ist $f(x, y) = \alpha$.

Satz IV. *Jede in einem (beschränkten) Gebiete G definierte, meßbare Funktion, welche fast überall in G endlich ist, ist fast überall in G approximativ stetig.*

Für den Beweis siehe A. Denjoy, l. c., S. 170 u. 171 oder W. Sierpiński, *Démonstration de quelques théorèmes f. sur les fonctions mesurables.* Fund. Math. III (1922), S. 320 [1]).

§ 3. Wir müssen hier einige Betrachtungen über Intervallfunktionen einfügen.

$\Phi(J)$ sei definiert in jedem Intervall, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen und das einem beschränkten Gebiete G der Ebene (mit Koordinaten x und y) angehört. Sie sei additiv *in beschränktem Sinne* und stetig, d. h. in jedem Punkte (x, y) des Gebietes konvergiert $\Phi(J)$ immer nach Null, falls J eine Folge den Punkt als inneren oder Randpunkt enthaltender Intervalle durchläuft, deren Flächenmaß nach Null konvergiert; die Intervalle brauchen sich also nicht immer in den Punkt (x, y) zusammenzuziehen.

[1]) Vgl. auch W. Sierpiński, *Sur une généralisation de la notion de la continuité approximative*, Fund. Math. IV (1923).

Die obere und untere Derivierten in (x, y) werden auf folgende Weise eingeführt. Wir betrachten Quadrate Q, welche den Punkt (x, y) als Schnittpunkt der Diagonalen enthalten. In jedem abgeschlossenen Quadrate Q mit Seitenlänge L werden wieder nur solche Quadrate q betrachtet, *deren Seitenlängen l der Ungleichheit $\frac{l}{L} \geqq \frac{1}{4}$ genügen.* Die obere und untere Derivierten in (x, y), $D^+_{(x,y)} \Phi(J)$ bzw. $D^-_{(x,y)} \Phi(J)$ sollen nun definiert werden als

$$\lim_{m(q)=0,\ m(Q)=0} \sup \frac{\Phi(q)}{m(q)} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{m(q)=0,\ m(Q)=0} \inf \frac{\Phi(q)}{m(q)},$$

wobei q alle (in Q liegenden) Quadrate darstellt, die der genannten Bedingung genügen.

§ 4. **Satz:** *Wenn Φ eine im abgeschlossenen Quadrate Q additive Intervallfunktion darstellt und $\Phi(Q) = 0$ ist, wenn ferner an jeder Stelle (x, y) des abgeschlossenen Q eine einzige, endliche oder bestimmt unendliche Derivierte existiert, so gibt es wenigstens eine Stelle am Rande oder im Innern von Q, an welcher die (einzige) Derivierte Null ist.*

Im Falle Φ in Q oder in einem Unterintervall von Q identisch Null ist, so ist der Satz evident. Sonst gibt Teilung von Q in vier Quadrate entweder daß in diesen Quadraten Φ wieder Null ist oder daß zwei dieser Quadrate Q_1 und Q_2 entgegengesetzte Werte von Φ ergeben. Im ersten Falle gibt fortgesetzte Vierteilung der Quadrate schließlich auch zwei Quadrate Q_1 und Q_2 mit entgegengesetztem Werte von Φ und mindestens einem Punkte gemeinsam. Vierteilung in Quadrate von Q_1 und Q_2 liefert sogleich oder nach genügsamer Fortsetzung wieder mindestens zwei Quadrate Q_3 und Q_4, in denen Φ entgegengesetzte Werte annimmt und die einen Punkt oder eine Seite gemeinsam haben. Sofortfahrend konvergieren die paarweise zusammengehörigen Gruppen von Quadraten zu einem Grenzpunkt (x, y). In jeder Umgebung von (x, y) liegen Quadrate q (im Sinne von § 3) mit positivem und negativem Werte von Φ. Also ist in diesem Punkte $D^+\Phi \geqq 0$ und $D^-\Phi \leqq 0$, somit $D\Phi = 0$.

§ 5. Wie von Darboux bei Punktfunktionen einer Veränderlichen [oder bei linearen Intervallfunktionen] so läßt sich auch hier zeigen:

Satz. *Wenn die stetige, additive Intervallfunktion Φ an jeder Stelle des offenen Intervalls J eine einzige Derivierte besitzt, welche in den*

Punkten (x_1, y_1) *und* (x_2, y_2) *die Werte* α *bzw.* β *annimmt, so nimmt die Derivierte in* J *jeden zwischen* α *und* β *gelegenen Wert an* [1].

Ist γ ein Wert, der zwischen α und β liegt, so existieren zwei Quadrate q_1 und q_2 von gleichem Maße und auf dieselbe Weise orientiert zu (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2), derartig daß der Wert γ auch zwischen $\frac{\Phi(q_1)}{m(q_1)}$ und $\frac{\Phi(q_2)}{m(q_2)}$ liegt.

Betrachten wir nun die Strecke, welche (x_1, y_1) und (x_2, y_2) verbindet. Zu jedem ihrer Punkte gehört ein in derselben Weise liegendes Quadrat q und ein Bruch $\frac{\Phi(q)}{m(q)}$. Dieser ist, als Punktfunktion betrachtet, eine auf der Strecke stetige Funktion und nimmt daher in einem zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) liegenden Punkt den Wert γ an. Das zugehörige Quadrat q_3 hat also die Eigenschaft, daß $\frac{\Phi(q_3)}{m(q_3)} = \gamma$ oder $\Phi(q_3) - \gamma m(q_3) = 0$ ist. Nach § 4 gibt es im abgeschlossenen Quadrate q_3 wenigstens eine Stelle, an der die additive Intervallfunktion $\Phi(J) - \gamma m(J)$ eine Null-Derivierte besitzt, also $D\Phi = \gamma$ ist [2].

§ 6. Bei den approximativ stetigen Funktionen haben wir nun weiter die folgenden Sätze.

Satz V. *Jede in einem (beschränkten) Gebiete* G *definierte, approximativ stetige Funktion, welche in jedem in* G *liegenden, abgeschlossenen Bereiche* B *beschränkt ist, ist die (einzige) Derivierte einer additiven Intervallfunktion* $\Phi(J)$.

Hierbei sind die Derivierten zu definieren wie in § 3.

Für den Beweis siehe A. Denjoy, l. c., S. 172 u. 173.

Satx VI. *Eine in einem (beschränkten) Gebiete* G *definierte, approximativ stetige Funktion* $f(x, y)$, *welche in* G *die Werte* α *und* β *annimmt, nimmt in* G *auch jeden zwischen* α *und* β *liegenden Wert* γ *an.*

Es genügt offenbar den Satz zu beweisen für den Fall eines offenen Intervalls (achsenparallelen Rechtecks) J.

Nehmen wir an, daß ein bestimmter, zwischen α und β liegender

[1]) Das Intervall darf auch als abgeschlossen betrachtet werden. Dann muß, wenn beide Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf dem Rande liegen, der Beweis etwas abgeändert werden.

[2]) Weitere Eigenschaften von additiven Intervallfunktionen wird man finden in einer im Nieuw Archief (Amsterdam) erscheinenden Mitteilung: *Über stetige, additive Intervallfunktionen in der Ebene und ihre Derivierten.*

Wert γ in keinem Punkte von J angenommen würde. Dann existierten zwei Mengen $E_1[f < \gamma]$ und $E_2[f > \gamma]$, sodaß $E_1 + E_2 = J$ wäre. Das Maß des Durchschnittes $E_1 . I$ wobei I ein willkürliches, in J liegendes, abgeschlossenes Intervall darstellt, ist eine additive, stetige Intervallfunktion; so auch das Maß von $E_2 . I$. Nun hat die Menge E_1 nach Satz III in jedem ihrer Punkte die Dichte 1 und in jedem der Punkte von E_2 die Dichte 0. Man sieht leicht, daß dadurch die Intervallfunktionen im $(E_1 . I)$ auf E_1 die (einzige) Derivierte [1]) 1 und auf E_2 die (einzige) Derivierte 0 hat. Somit würde die Derivierte im offenen Intervall J nur die Werte 0 und 1 annehmen können, im Widerspruch zu dem Satze des § 5. Also nimmt $f(x, y)$ im offenen Intervall J jeden Wert γ zwischen α und β an.

Satz VII. *Nimmt die approximativ stetige Funktion in* G *die Werte* α *und* β *and* $(\alpha < \beta)$, *so hat die Menge* $E[\alpha < f(x) < \beta]$ *positives Maß.*

Für den Beweis, siehe A. Denjoy, l. c., S. 181.

Satz VIII. *Eine in einem (beschränkten) Gebiete* G *approximativ stetige Funktion* $f(x, y)$ *gehört zur ersten Baireschen Klasse* [2]).

Jede Funktion der ersten Baireschen Klasse ist punktiert unstetig auf jeder perfekten Menge und umgekehrt. Daraus folgt daß die-

[1]) Im Sinne von § 3.

[2]) Nach einer brieflichen Bemerkung des Herrn S. Saks läßt sich Satz VIII auch einfacher beweisen als im Texte:

„Soit $f(x, y)$ une fonction approximativement continue (au sens du § 1).

Soit $f_n(x, y)$ la fonction déterminée de la manière suivante:

$$
(1) \quad \begin{cases} f_n(x, y) = f(x, y), & \text{lorsque: } -n \leqq f(x, y) \leqq n \\ = -n, & \text{"} \quad -n > f(x, y) \\ = +n, & \text{"} \quad n < f(x, y). \end{cases}
$$

En posant encore pour chaque intervalle K:

$$
F(K) = \int\int_K f_n(x, y)\, dx\, dy,
$$

on obtient une fonction d'intervalle, $F(K)$, additive et continue. $f_n(x, y)$ étant bornée et continue approximativement, est la dérivée symétrique de $F(K)$, et — par conséquent — de la 1e classe au sens de M. Baire. Or, on sait que, si pour toute valeur de n, la fonction $f_n(x, y)$, déterminée par (1), est de la 1e classe au sens de Baire, la fonction $f(x, y)$ l'est aussi, ce qui achève la démonstration, qui ne suit d'ailleurs qu'une idée bien connue de M. Denjoy.

..., cette méthode ne peut pas être appliquée à la démonstration du théorème du § 7".

jenigen Punkte einer perfekten Menge M, wo die Oszillation einer derartigen Funktion auf M mindestens α (positiv) sei nirgends dicht auf M liegen (notwendig und hinreichend).

Wäre also $f(x, y)$ nicht Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen, so existierte eine perfekte Menge P in G, in deren Punkten die Oszillation größer wäre als eine feste, positive Zahl 2ω. In jedem Punkte (x, y) von P existiert der untere und der obere Limes von $f(x, y)$ *auf* P. Sie definieren auf P die untere und obere Limesfunktion, $\varphi(x, y)$ bzw. $\Phi(x, y)$. Die Menge P ist aufzufassen als Summe einer abzählbaren Folge von Mengen E_0, E_1, E_{-1}, E_2, $E_{-2}, \ldots$, E_k, $E_{-k}, \ldots$ und der Menge $E_{-\infty}$. Hierbei ist auf E_j:

$$j\omega \leqq \varphi(x, y) < (j+1)\omega$$

und auf $E_{-\infty}$:

$$\varphi(x, y) = -\infty.$$

Mindestens eine Menge E_m ist überall dicht auf P oder auf einer in einem bestimmten Intervall I liegenden, perfekten Untermenge P_1 von P (P_1 hat Punkte im Innern und vielleicht auch auf dem Rande von I).

Es sei m endlich. Dann hat die Funktion $f_1(x, y) = f(x, y) - (m+1)\omega$ in jedem Punkte von E_m eine relativ zu P definierte, untere Limesfunktion $\varphi_1(x, y) < 0$ und $\geqq -\omega$. Die relativ zu P definierte, obere Limesfunktion $\Phi_1(x, y)$ von $f_1(x, y)$ ist dadurch auf E_m überall $> \omega$. Die Mengen $H_1[f_1 < 0]$ und $H_2[f_1 > \omega]$ sind also beide überall dicht auf P_1.

Die Menge H_1 hat nach Satz III in jedem ihrer Punkte die Dichte 1. Es existiert eine abzählbare Menge von Punkten $(x_1, y_1)(x_2, y_2)\ldots$, welche zu H_1 gehören und auf P_1 überall dicht liegen. Es sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ eine nach Null konvergierende Folge positiver Zahlen. Dann existiert zu (x_k, y_k) ein Quadrat Q_k, so daß für den Durchschnitt $H_1 . Q_k$:

$$\frac{m(H_1 . Q_k)}{m(Q_k)} > 1 - \varepsilon_k$$

ist. Die Quadrate Q_k können immer so genommen werden, daß ihr Maß nach Null konvergiert für $k = \infty$. Nach einem Lemma von Denjoy[1]) liefern nun die Punkte von P_1, welche im *Innern* von

[1]) *Sur la totalisation des nombres derivés non sommables.* Ann. Ec. Norm. Sup. (1916), S. 199, Fußn. Vgl. H. Looman, *Sur la totalisation* etc., Fund. mat. IV (1923), S. 276, Fußn. — Der Beweis für den linearen Fall läßt sich sinngemäß auf den Fall mehrerer Veränderlichen übertragen.

unendlich vielen Q_k liegen, ein „résiduel" R_1 auf P_1 [1]). Daraus folgt, daß in allen Punkten von R_1 die obere Derivierte der stetigen, additiven Intervallfunktion $m(H_1 . I)$, wobei I ein willkürliches Intervall, den Wert 1 hat.

Auch zu H_2 gehört ein „résiduel" R_2 auf P_1, wo die obere Derivierte von $m(H_2 . I)$ immer gleich 1 ist.

Die Mengen H_1 und H_2 sind einander fremd. In den Punkten des Durchschnitttes $(R_1 . R_2) = R$, welche auch ein „résiduel" ist, hätten dadurch $m(H_1 . I)$ und $m(H_2 . I)$ beide eine untere Derivierte $= 0$ und eine obere Derivierte $= 1$. Da jedoch nach Satz III H_1 in seinen eigenen Punkten die Dichte 1 hat und somit $m(H_1 . I)$ eine einzige Derivierte $= 1$, könnte auf R nicht $f_1 < 0$ sein. Auf gleiche Weise zeigt sich, daß auch $f_1 > 0$ auf R unmöglich ist; so auch $f_1 < \omega$ und $f_1 > \omega$. Wir gelangen also zu einem Widerspruch.

Noch übrig bleibt der Fall $m = -\infty$. Da $f(x, y)$ in G endlich ist, wäre dann auf P_1 die Oszillation $2\omega = +\infty$ in jedem Punkte von P_1. Daraus folgt, daß für jedes ganze, positive oder negative k (Null einbegriffen) die Punkte von P_1, in denen $f(x, y) < k$ ist, auf P_1 überall dicht liegen. Da die abzählbare Reihe der Untermengen $E_0(f > 0)$, $E_1(f > 1)$, $E_{-1}(f > -1), \ldots$ von P_1 alle Punkte von P_1 enthalten, so muß wenigstens eine dieser Mengen E_n auf P_1 oder einer in einem abgeschlossenen Intervall liegenden, perfekten Untermenge P_2 von P_1 überall dicht liegen. Die obigen Schlüsse behalten nun ihre Gültigkeit, wenn man statt der Mengen H_1 und H_2 die Untermengen $M_1[f > n]$ und $M_2[f < n-1]$ von G betrachtet[2]).

§ 7. Schlußbemerkungen: Wir definieren in der Ebene zwei weitere Funktionenklassen.

Im Punkte (ξ, η) ziehe man die Parallelen zu den Koordinatenachsen. Diese teilen die Umgebung von (ξ, η) in vier Teile, welche wir in einer bestimmten Ordnung 1—4 numerieren wollen. J sei ein *Quadrat*, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen, das (ξ, η) auf dem Rande enthält und das dem Teile (k) der Umgebung angehört.

A. $\mathfrak{M}_1(\xi, \eta; \varepsilon)$ sei bei positivem ε die Menge derjenigen Punkte (x, y) in der Teilumgebung (k), für die

[1]) D. h. eine Menge, deren Komplementärmenge zu P_1 eine Menge erster Kategorie (auf P_1) ist.

[2]) Der Beweis ist dem des H. Denjoy im linearen Fall nachgebildet. Vgl. Bull. Soc. Math. (1915), S. 181—184.

$$f(x, y) > f(\xi, \eta) - \varepsilon$$

ist, und $\mathfrak{M}_2(\xi, \eta; \varepsilon)$ sei die Menge aus (k), für die

$$f(x, y) < f(\xi, \eta) + \varepsilon$$

ist.

Dann soll $f(x, y)$ *vorwiegend stetig in* (ξ, η) *in die* (k) *Richtung* [1]) sein, wenn für jedes positive ε:

$$\liminf_{m(J)=0} \frac{m_i[\mathfrak{M}_1(\xi, \eta; \varepsilon) \cdot J]}{m(J)} > \frac{1}{2}$$

und

$$\liminf_{m(J)=0} \frac{m_i[\mathfrak{M}_2(\xi, \eta; \varepsilon) \cdot J]}{m(J)} > \frac{1}{2}$$

ist.

Ist in allen Punkten eines Gebietes $f(x, y)$ vorwiegend stetig in mindestens eine (nicht notwendig immer konstante) Richtung, so ist $f(x, y)$ in G meßbar [2]).

B. In der Umgebung von (ξ, η) existiere eine stetige, additive Intervallfunktion $\Phi(J)$ und eine Punktfunktion $\varphi(x, y)$. $\mathfrak{M}_3(\xi, \eta; \varepsilon)$ sei bei positivem ε die Menge derjenigen Punkte (x, y) in der Teilumgebung (k), für die in den zugehörigen Intervallen I [d. h. in den Intervallen mit den gegenüberliegenden Eckpunkten (ξ, η) und (x, y)]:

$$\frac{\Phi(I)}{m(I)} > \varphi(\xi, \eta) - \varepsilon$$

ist. Und $\mathfrak{M}_4(\xi, \eta; \varepsilon)$ sei die Menge derjenigen Punkte aus (k), für die in den zugehörigen Intervallen I:

$$\frac{\Phi(I)}{m(I)} < \varphi(\xi, \eta) + \varepsilon$$

ist.

Dann soll $\varphi(x, y)$ *in* (ξ, η) *vorwiegend Derivierte von* $\Phi(J)$ *in die* (k). *Richtung* [3]) heißen, wenn für jedes positive ε:

$$\liminf_{m(J)=0} \frac{m[\mathfrak{M}_3(\xi, \eta; \varepsilon) \cdot J]}{m(J)} > \frac{1}{2}$$

und

[1]) Vgl. A. Denjoy, Bull. Soc. Math. (1915), S. 183.

[2]) Siehe Kamke, l. c., S. 432 u. 433.

[3]) Vgl. A. Denjoy, Ann. Ec. Norm. Sup. (1916), S. 198, Fußn.

$$\liminf_{m(J)=0} \frac{m[\mathfrak{M}_4(\xi, \eta; \varepsilon) \cdot J]}{m(J)} > \frac{1}{2}$$

ist.

Die Beweismethode, für den Satz VIII gebraucht, liefert nun auch:

Jede in einem (beschränkten) Gebiete G definierte Funktion $g(x, y)$, welche: a) in G in eine konstante Richtung vorwiegend stetig ist, oder: b) in G in eine konstante Richtung vorwiegend Derivierte einer stetigen, additiven Intervallfunktion ist, gehört zur ersten Baireschen klasse [1]).

Die Funktionen beider Klassen werden auch jeden zwischen oberer und unterer Schranke liegenden Wert in G annehmen, wenn sie der folgenden Bedingung genügen: in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Gebiete, das einen willkürlichen Punkt (ξ, η) von G als Randpunkt hat, läßt sich eine Folge von inneren Punkten $\{x_n, y_n\}$ anweisen, so daß $f(\xi, \eta) = \lim_{x_n = \xi, y_n = \eta} f(x_n, y_n)$ ist. Dies ist eine unmittelbare Folge eines Satzes von W. H. Young [2]).

[1]) Die Bedingungen a) und b) sind noch auf verschiedene Weise abzuändern. — Der Beweis ist auch möglich durch wirkliche Bildung einer Folge von nach $g(x, y)$ konvergierenden, stetigen Funktionen auf die von H. Looman für den linearen Fall angegebene Methode; siehe *Sur deux catégories remarquables de fonctions*, Fund. mat. V (1924).

[2]) Siehe W. H. Young, *On functions of two or more variables*, Mess. of Math. XXXIX (1909).

3. IX. 1928.