5. Ce qui vient d'être dit montre que l'on peut énoncer encore la proposition suivante, plus particulière, mais qui se rapproche davantage du théorème de Schoenflies: *Une transformation continue et interieure d'un domaine de Jordan, qui est topologique sur la frontière, est une transformation topologique dans tout le domaine.* En effet, la frontière du domaine transformé est alors une courbe simple fermée et M. Schoenflies a démontré, en donnant la réciproque du théorème de Jordan, que tout point d'une telle courbe est accessible de l'intérieur comme de l'exterieur [1]). On pourra donc prendre alors A et B quelconque sur la frontière de d.

[1]) A. Schoenflies: Mathematische Annalen (1906) t. 62. p. 316.

Sur une décomposition du segment.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème: *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe une décomposition de l'intervalle $J=[0\leqslant x\leqslant 1]$ en $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles de mesure extérieure $=1$, de deuxième catégorie dans tout intervalle, et ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs.*

Lemme I [1]). *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et si E est un ensemble linéaire de mesure extérieure positive, il existe un ensemble non dénombrable $H\subset E$, tel que tout sous-ensemble non dénombrable de H est non mesurable (L).*

Dém. De l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ résulte l'existence d'une suite transfinie du type Ω,

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1},\ldots,\ x_\alpha,\ldots,\qquad (\alpha<\Omega) \tag{1}$$

formée de tous les nombres réels.

Or, l'ensemble de tous les ensembles G_δ linéaires de mesure nulle ayant la puissance du continu, il existe aussi (d'après $2^{\aleph_0}=\aleph_1$) une suite transfinie du type Ω,

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3,\ldots,\ \Gamma_\omega,\ \Gamma_{\omega+1},\ldots,\ \Gamma_\alpha,\ldots,\qquad (\alpha<\Omega) \tag{2}$$

formée de tous les ensembles G_δ linéaires de mesure nulle.

α étant un nombre ordinal $<\Omega$, désignons par S_α l'ensemble

$$S_\alpha=\sum_{\xi\leqslant\alpha}\Gamma_\xi \tag{3}$$

— ce sera évidemment un ensemble de mesure nulle (comme somme

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. V, p. 184.

d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure-nulle).

Il en résulte que l'ensemble $E - S_\alpha$ n'est pas vide (puisque $m_e(E) > 0$). Désignons par p_α le premier terme de la suite (1) qui est un point de l'ensemble $E - S_\alpha$, et soit H l'ensemble de tous les points (différents) p_α, où $\alpha < \Omega$: ce sera évidemment un sous-ensemble de E.

Soit N un ensemble quelconque de mesure nulle. Il existe, comme on sait, un ensemble G_δ de mesure nulle, contenant N. D'après la définition de la suite (2), il existe donc un indice $\mu < \Omega$, tel que $N \subset \Gamma_\mu$. Donc, si α est un indice, tel que $p_\alpha \in N$, on a $p_\alpha \in \Gamma_\mu$. Or, d'après la définition de p_α et d'après (3), on a p_α non $\in \Gamma_\xi$ pour $\xi \leqslant \alpha$, et parsuite p_α non $\in \Gamma_\mu$, si $\alpha \geqslant \mu$. L'hypothèse que $p_\alpha \in N$ entraîne donc $\alpha < \mu$, d'où résulte tout de suite (d'après $\mu < \Omega$) que l'ensemble HN est au plus dénombrable.

L'ensemble H a donc en commun avec tout ensemble de mesure nulle un ensemble au plus dénombrable de points. Or, l'ensemble H est non dénombrable, puisque si H était au plus dénombrable (donc de mesure nulle), il existerait un indice α, tel que $H \subset \Gamma_\alpha$ et, d'après (3), on aurait $H \subset S_\alpha$, contrairement aux formules $p_\alpha \in H$ et p_α non $\in S_\alpha$.

Soit maintenant H_1 un sous-ensemble non dénombrable de H. D'après la propriété de l'ensemble H, H_1 ne peut être de mesure nulle. Or, H_1 ne peut être non plus de mesure intérieure positive, puisque alors H_1 et, à plus forte raison, H, contiendrait un ensemble parfait (donc non dénombrable) de mesure nulle, contrairement à la propriété de H. Donc H_1 est non mesurable (L), et notre lemme est démontré.

Il est à remarquer que tout ensemble H jouissant de cette propriété que tout son sous-ensemble non dénombrable est non mesurable (L), est nécessairement de 1^re^ catégorie de M. Baire sur tout ensemble parfait [1]), et on pourrait même démontrer que toute image continue d'un tel ensemble H est, elle aussi, de 1^re^ catégorie sur tout ensemble parfait [2]).

Lemme II. *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *et si* E *est un ensemble linéaire de deuxième catégorie, il existe un ensemble non dénombrable* $H \subset E$, *tel que tout sous-ensemble non dénombrable de* H *est de deuxième catégorie.*

La démonstration de ce théorème est tout à fait analogue à celle du lemme I: il faut seulement s'appuyer sur les faits que tout ensemble de 1^re^ catégorie est contenu dans un ensemble F_σ de 1^re^ catégorie, que l'ensemble de tous les F_σ de 1^re^ catégorie a la puissancce du continu et qu'une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de 1^re^ catégorie est un ensemble de 1^re^ catégorie, et parsuite ne peut pas contenir E (Le rôle de N joue naturelement un ensemble quelconque de 1^re^ catégorie, et le rôle d'un G_δ de mesure nulle — un F_σ de 1^re^ catégorie).

Il est à remarquer que tout ensemble H jouissant de cette propriété que tout son sous-ensemble non dénombrable est de deuxième catégorie, est nécessairement de mesure nulle.

En effet, l'ensemble X de tous les nombres réels est, comme on sait, une somme $X = K + N$ de deux ensembles, dont le premier est de 1^re^ catégorie et le second est de mesure nulle. Donc $H = HK + HN$, où, d'après la propriété de H, HK est au plus dénombrable, et $HN \subset N$ est de mesure nulle, d'où résulte que $m(H) = 0$, c. q. f. d.

On voit encore sans peine que pour que tout sous-ensemble non dénombrable d'un ensemble H donné soit de deuxième catégorie, il faut et il suffit que H ait en commun avec tout ensemble parfait non dense un ensemble au plus dénombrable de points. L'existence de tels ensembles non dénombrables a été démontrée (à l'aide de l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) par M. N. Lusin [1]) et j'ai prouvé [2]) que toute image continue d'un tel ensemble est de mesure nulle.

P étant un ensemble linéaire donné, désignons généralement par $P(r)$ l'ensemble obtenu par une translation de l'ensemble P de longueur r (en direction positive). Divisons tous les nombres réels en classes, en rangeant dans une même classe deux nombres réels dans ce et seulement dans ce cas, si leur différence est rationelle. Dans chacune de ces classes choisissons un nombre: soit E l'ensemble ainsi obtenu: c'est l'ensemble non mesurable bien connu de M. Vitali.

Soit

(4) $$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

[1]) S. Saks: *Fund. Math.* t. XI, p. 277.
[2]) W. Sierpiński: *Bull. Acad. Polonaise*, 1928.

[1]) *Comptes Rendus* t. 158; v. aussi M. Lavrentieff, *Fund. Math.* t. VI, p. 154—155.
[2]) *Fund. Math.* t. XI, p. 302.

une suite infinie, formée de tous les nombres rationnels différents, X — l'ensemble de tous les nombres réels. On aura évidemment

$$(5) \qquad E(r_i)\,.\,E(r_j) = 0, \quad \text{pour} \quad i \neq j,$$

et

$$(6) \qquad X = E(r_1) + E(r_2) + E(r_3) + \ldots$$

X est donc une somme disjointe d'une infinité dénombrable d'ensembles superposables avec E, d'où résulte tout de suite que E est un ensemble de deuxième catégorie.

Divisons l'ensemble (4) en deux ensembles disjoints, denses dans tout intervalle, soit

$$(7) \qquad p_1, p_2, p_3, \ldots$$

et

$$(8) \qquad q_1, q_2, q_3, \ldots$$

Admettons maintenant que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. L'ensemble E étant de mesure extérieure positive et de deuxième catégorie, il existe, d'après le lemme I, un ensemble $P \subset E$, de puissance $2^{\aleph_0}$, tel que tout sous-ensemble non dénombrable de P est non mesurable (L), et, d'après le lemme II, il existe un ensemble $Q \subset E$, de puissance $2^{\aleph_0}$ et tel que tout sous-ensemble non dénombrable de Q est de deuxième catégorie.

J'ai démontré [1]) que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, il existe une décomposition de tout ensemble de puissance du continu en une classe de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles non dénombrables, ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs: soit

$$(9) \qquad P = \sum_{\xi < \varphi} P_\xi$$

une telle décomposition de l'ensemble P, et

$$(10) \qquad Q = \sum_{\xi < \varphi} Q_\xi$$

une telle décomposition de l'ensemble Q (φ désigne ici un nombre ordinal, tel qe $\overline{\varphi} = 2^{2^{\aleph_0}}$)

[1]) *Monatshefte für Math. u. Phys.* Bd. XXXV (1928), p. 241; v. aussi A. Tarski: *Fund. Math.* t. XII, p. 199 (Cor. 20, pour $\alpha = 0$).

Posons maintenant

$$(11) \qquad X_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} [P_\xi(p_n) + Q_\xi(q_n)], \quad \text{pour} \quad 1 < \xi < \varphi,$$

et

$$(12) \qquad X_1 = \Big(X - \sum_{1<\xi<\varphi} X_\xi\Big) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_1(p_n) + Q_1(q_n)]$$

Nous aurons évidemment, d'après (11) et (12):

$$(13) \qquad J = \sum_{\xi<\varphi} J X_\xi.$$

Je dis que (13) est la décomposition de l'intervalle J satisfaisant aux conditions de notre théorème.

Soient ξ et $\eta \neq \xi$ deux indices donnés $< \varphi$. En désignant généralement par card (M) la puissance de l'ensemble M, on aura, d'après les propriétés des décompositions (9) et (10):

$$(14) \qquad \text{card}\,(P_\xi P_\eta) \leqslant \aleph_0, \quad \text{et} \quad \text{card}\,(Q_\xi Q_\eta) \leqslant \aleph_0.$$

On a évidemment, d'après $P \subset E$, $Q \subset E$, (9) et (10):

$$P_\xi \subset E, \quad Q_\eta \subset E,$$

donc

$$(15) \qquad P_\xi(r_n) \subset E(r_n), \quad Q_\eta(r_n) \subset E(r_n), \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

et parsuite, d'après (5), les termes des suites (7) et (8) étant des termes différents de la suite (4):

$$[P_\xi(p_i) + Q_\xi(q_i)]\;[P_\eta(p_j) + Q_\eta(q_j)] = 0,$$

ce qui donne, d'après (11) et (12):

$$X_\xi X_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} [P_\xi(p_n) + Q_\xi(q_n)]\;[P_\eta(p_n) + Q_\eta(q_n)],$$

d'où résulte sans peine, d'après $p_n \neq q_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, et d'après (15) et (5):

$$(16) \qquad X_\xi X_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} [P_\xi(p_n) P_\eta(p_n) + Q_\xi(q_n)\, Q_\eta(q_n)]..$$

Or, d'après (14), on a

$$\text{card}\,[P_\xi(p_n)P_\eta(p_n)] \leqslant \aleph_0 \quad \text{et} \quad \text{card}\,[Q_\xi(q_n)\,Q_\eta(q_n)] \leqslant \aleph_0,$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$; la formule (16) donne donc

$$\text{card}\,(X_\xi X_\eta) \leqslant \aleph_0. \quad (\text{pour } \xi \neq \eta)$$

Nous avons ainsi démontré que les termes de la série (13) ont, deux à deux, un ensemble au plus dénombrable de points communs.

Soit ξ un indice donné $< \varphi$. D'après la propriété de l'ensemble P, P_ξ, en tant que sous-ensemble non dénombrable de P, est de mesure extérieure positive. Les nombres (7) formant un ensemble dense dans tout intervalle, il en résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} P_\xi(p_n)$ est un ensemble, dont le complémentaire est de mesure intérieure nulle [1].

Or, d'après la propriété de l'ensemble Q, Q_ξ, en tant que sous-ensemble non dénombrable de Q, est de deuxième catégorie. Les nombres (8) formant un ensemble dense dans tout intervalle, il en résulte que $\sum_{n=1}^{\infty} Q_\xi(q_n)$ est un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle.

D'après (11) et (12) il en résulte tout de suite que les ensembles X_ξ ($\xi < \varphi$) sont de deuxième catégorie dans tout intervalle et que leurs complémentaires sont de mesure intérieure nulle.

La décomposition (13) satisfait donc aux conditions de notre théorème qui est ainsi démontré.

[1] En effet, on démontre sans peine le théorème suivant: Si T est un ensemble linéaire de mesure extérieure positive, et si $p_1, p_2, p_3, \ldots$ est une suite infinie de nombres réels, dense dans tout intervalle, le complémentaire de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} T(p_n)$ est de mesure intérieure nulle.

Über approximativ stetige Funktionen von zwei (und mehreren) Veränderlichen.

Von

J. Ridder (Baarn).

In der folgenden Mitteilung wird die Definition der approximativ stetigen Funktionen einer Veränderlichen übertragen auf den Fall von zwei (und mehreren) Veränderlichen, derartig daß die wichtigsten Eigenschaften dieser Funktionenklasse dabei behalten bleiben. Wir werden nur den Fall von zwei Veränderlichen betrachten; die Übertragung bei mehreren Veränderlichen ist darauf evident.

§ 1. Eine reelle Funktionen $f(x, y)$, die in der Umgebung eines Punktes (ξ, η) definiert ist, heißt an der Stelle (ξ, η) *approximativ stetig*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathfrak{M}(\xi, \eta; \varepsilon)$ der Punkte (x, y), für die

$$|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

ist, im Punkte (ξ, η) die *innere* Dichte 1 hat.

Das soll bedeuten:

$$\liminf_{m(J)=0} \frac{m_i[\mathfrak{M}(\xi, \eta; \varepsilon) . J]}{m(J)} = 1.$$

wobei J ein Quadrat mit Mittelpunkte (ξ, η) —, $\mathfrak{M}.J$ der Durchschnitt der Mengen $\mathfrak{M}$ und J und $m_i[\mathfrak{M}.J]$ das *innere* Maß (L) des Durchschnittes bedeutet.

§ 2. **Satz I.** *Jede in einem (beschränkten) Gebiete G definierte, approximativ stetige Funktion ist in G meßbar (und endlich).*

Der Beweis verläuft wie im linearen Fall; siehe E. Kamke, *Zur Definition der approximativ stetigen Funktionen*, Fund. Math., t. X, (1927).