Sur un théorème topologique.

Par

S. Stoïlow (Cernauti, Roumanie).

1. Une transformation topologique[1]) étant appliquée à un domaine d de Jordan, M. Schoenflies a démontré[2]) que le transformé D de d se confond avec le domaine de Jordan limité par la transformée de la frontière de d.

Il résulte de ce théorème que la notion de *région*[3]) est un invariant pour les transformations topologiques[4]). D'autre part toute transformation continue fait correspondre à un *continu* quelconque un continu ou un point unique. Une classe très vaste de transformations continues a donc pour invariant le continu. Toute transformation continue de plan à plan, ayant pour invariants les notions de *région* et de *continu*, sera dite une *transformation interieure*[5]). Le théorème de Schoenflies peut alors s'énoncer ainsi: *toute transformation topologique est une transformation intérieure telle que les points frontière de tout domaine de Jordan se transforment en points frontière du transformé de ce domaine.*

Nous allons démontrer une proposition qui est (du moins en ce qui concerne les points intérieurs) une sorte de réciproque généralisée du théorème précédent. En voici l'énoncé:

[1]) transformation biunivoque et bicontinue.

[2]) Goettinger Nachrichten (1898) p. 282.

[3]) domaine ouvert.

[4]) Cette condition est plus restrictive que l'invariance de la notion de *domaine* (fermé).

[5]) Cette dénomination est justifiée par l'invariance de la notion de *point intérieur*.

Etant donné un domaine borné simplement connexe quelconque d et son transformé D obtenu par une transformation interieure telle que:

1° à tout point frontière de d corresponde un point frontière de D,

2° à deux points fixes distincts A et B de l'intérieur de D correspondent, dans d, respectivement p et q points seulement;

on peut affirmer qu'à tout point interieur à D correspondent, alors, au plus $p+q-1$ points dans d.

Si l'on prend, en particulier, $p=q=1$, cette proposition est la réciqroque du théorème de Schoenfies.

2. La démonstration s'appuie sur le lemme[1]) que voici:

Considérons une transformation interieure de d en D qui fasse correspondre à la frontière de d celle de D (première condition de plus haut). Soit $\overline{AB}$ un segment de droite (d'extremités A et B) entièrement situé à l'interieur de D; soit a un point arbitrairement choisi parmi ceux qui, dans d, correspondent à A. Dans ces conditions *il existe un arc simple de Jordan ayant une extremité en a entièrement situé dans d, tel que le transformé de cet arc (par la transformation donnée) est $\overline{AB}$ et que cette transformation est topologique* ***sur l'arc***[2]).

Appelons *domaine maximum* (Δ, a) (relatif à un domaine Δ situé dans D et comprenant le point A transformé de a) un domaine obtenue par la réunion des deux ensembles suivants:

1° L'ensemble ouvert des points accessibles à partir de a par des chemins continus tels que les transformés de ces chemins restent à l'interieur de D.

2° La frontière de cet ensemble.

Deux remarques résultent presque immédiatement de cette définition:

1° Si a' est un point intérieur à (Δ, a). le domaine (Δ, a') se confond avec (Δ, a).

2° Le domaine (Δ, a) a pour transformé le domaine Δ.

La première est une conséquence directe de la définition. La seconde s'établit facilement: si le transformé de (Δ, a) n'occupait qu'une partie de Δ, il y aurait un point frontière de ce transformé qui serait point interieur de Δ. Or ce point ne peut provenir de la transformation d'un point frontière de (Δ, a) car alors celui-ci pourrait

[1]) Ce lemme est une partie d'un théorème que j'ai énoncé ailleurs.

[2]) Nous dirons encore que l'arc se *transforme topologiquement* en $\overline{AB}$.

s'étendre au delà et, par conséquent, ne serait plus domaine maximum; il ne peut pas provenir, non plus, d'un point interieur de (Δ, a), car alors la transformation ne serait pas intérieure.

Un tel point frontière du domaine transformé de (Δ, a) ne saurait donc exister.

Ceci étant, soit M un point quelconque de $\overline{AB}$. Nous déterminerons M par la valeur du paramètre: $t = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ qui lui correspond et qui varie de 0 à 1. Soit n un entier positif quelconque. Divisons le segment $\overline{AB}$ en 2^n parties égales, non empiétantes, sous-segments de $\overline{AB}$. Soit Δ_n^k $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$ le rectangle obtenu, en faisant décrire au centre du carré d'aire $\frac{\overline{AB}^2}{2^{2n+2}}$ et dont deux côtés sont parallèles à $\overline{AB}$, le k-ième sous-segment de $\overline{AB}$. L'ensemble des Δ_n^k forme un rectangle dépendant de n et tendant vers AB quand n augmente indéfiniment. Ils contiennent tous $\overline{AB}$ à leur interieur et sont contenus l'un dans l'autre. Pour n fixe, deux Δ_n^k n'ont de point commun que si les indices k diffèrent par une unité seulement.

Considérons une suite de domaines maxima ainsi formée: le domaine (Δ_n^1, a); puis, a_1 étant un point du domaine précédent correspondant au point $t = \frac{1}{2^n}$, le domaine (Δ_n^2, a_1) [1]); puis, a_2 étant un point de ce dernier domaine qui correspond à $t = \frac{2}{2^n}$, le domaine (Δ_n^3, a_2); et ainsi de suite jusqu'à ce que l'indice supérieur devienne égal à 2^n on aura aussi une suite de domaines: $\delta_n^1, \delta_n^2, \ldots, \delta_n^{2^n}$, ou δ_n^k est un domaine maximum de Δ_n^k (même valeur de k). Chacun des δ_n^k n'a de point commun qu'avec δ_n^{k-1} et δ_n^{k+1}. Nous appelerons une telle suite *une chaine* $\{\delta_n^k\}$; a sera dit l'*origine* de la chaine. Nous allons établir quelques propriétés des chaines $\{\delta_n^k\}$.

Il n'y a qu'un nombre fini de chaines. En effet on peut entourer chaque point a_1 d'un cercle assez petit pour que le transformé de ce cercle soit tout entier dans Δ_n^2. L'ensemble des a_1 étant fermé, ces cercles peuvent être remplacés par un nombre fini d'entre eux,

[1]) Un point a_1 au moins existe comme le montre la remarque 2° de plus haut, car $t = \frac{1}{2^n}$ est interieur à Δ_n^1. Le point $t = \frac{1}{2^n}$ est aussi interieur à Δ_n^2.

d'après le théorème de Borel-Lebesgue. Or, d'après la remarque 1° de plus haut, deux domaines (Δ_n^2, a_1) correspondant à des a_1 qui sont dans le même cercle sont identiques. Il n'y a donc qu'un nombre fini de (Δ_n^2, a_1) distincts et, le raisonnement pouvant se repéter pour (Δ_n^3, a_2) etc., on voit que les chaines distinctes sont en nombre fini.

Toute chaine $\{\delta_{n+p}^k\}$ [1]) *est interieure à une chaine $\{\delta_n^k\}$.* Montrons le d'abord pour $p = 1$. Soit a l'origine de la chaine $\{\delta_{n+1}^k\}$. Je prendrai pour δ_n^1 le domaine (Δ_n^1, a). Ce δ_n^1 contient évidemment δ_{n+1}^1 et δ_{n+1}^2. Soient a' les points qui, dans δ_{n+1}^2, correspondent à $t = \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^{n+1}}$. Parmi les a' il en est un, soit a_1', qui est origine de la portion de chaine: $\delta_{n+1}^3, \delta_{n+1}^4, \ldots, \delta_{n+1}^{2^{n+1}}$. Je prendrai pour δ_n^2 le domaine (Δ_n^2, a_1'). Dans ce domaine se trouvent δ_{n+1}^3 et δ_{n+1}^4. Nous sommes ici vis-à-vis de: a_1', δ_n^2, δ_{n+1}^3 et δ_{n+1}^4 dans les mêmes conditions où nous l'étions tout-à-l'heure vis-à-vis de: a, δ_n^1, δ_{n+1}^1 et δ_{n+1}^2. On pourra donc construire $\delta_n^3, \delta_n^4, \ldots, \delta_n^{2^n}$, chacun de ceux ci contenant deux domaines δ_{n+1}^k, dans l'ordre des indices supérieurs croissants. Donc la chaine $\{\delta_{n+p}^k\}$ est comprise dans une chaine $\{\delta_{n+p-1}^k\}$ et celle-ci dans une chaine $\{\delta_{n+p-2}^k\}$. Finalement $\{\delta_{n+p}^k\}$ est dans une certaine chaine $\{\delta_n^k\}$.

Deux chaines $\{\delta_n^k\}$ distinctes ne peuvent contenir la même chaine $\{\delta_{n+p}^k\}$. En effet, si $\{\delta_{n+p}^k\}$ est contenue dans une chaine $\{\delta_n^k\}$, les 2^{n+p} domaines de $\{\delta_{n+p}^k\}$ se répartissent, dans l'ordre des k croissants, en 2^n groupes de 2^p domaines chacun et le groupe dont le numéro d'ordre est m $(m = 1, 2, \ldots 2^n)$ est entièrement situé dans δ_n^m. Or deux domaines δ_n^m ayant même $k = m$ et appartenant à deux chaines $\{\delta_n^k\}$ distinctes sont domaines maximums du même domaine Δ_n^m et une remarque faite plus haut sur les domaines maximums montre que ces deux domaines ne peuvent avoir de point interieur commun sans se confondre.

Puisque les deux demaines δ_n^m des deux chaines $\{\delta_n^k\}$ contiennent tous deux les mêmes domaines δ_{n+p}^k (ceux du m-ième groupe) ils se confondent donc et les deux chaines $\{\delta_n^k\}$ aussi.

Ces propositions préliminaires concernant les chaines montrent d'abord qu'une chaine $\{\delta_{n+p}^k\}$ étant donnée, on peut construire une suite de chaines: $\{\delta_{n+p}^k\}, \{\delta_{n+p-1}^k\}, \{\delta_{n+p-2}^k\}, \ldots, \{\delta_1^k\}$, chacune entièrement suitée dans la suivante. Si, après cela, on considère toutes les

[1]) p est un entier positif quelconque.

chaines $\{\delta_1^k\}$, toute autre chaine doit être contenue dans l'une de ces chaines: Comme le nombre de celles-ci et fini, *il y a au moins une chaine* $\{\delta_1^k\}$ *contenant une infinite de chaines*, parmi lesquelles il y a d'ailleurs nécéssairement des chaines de tout ordre. Choissons une chaine $\{\delta_1^k\}$ satisfaisant à cette condition. A l'interieur de celle-ci sont situées un nombre fini de chaines $\{\delta_2^k\}$, dont l'une au moins contient des chaines en nombre infini et de tout ordre. Choisissons une telle chaine $\{\delta_2^k\}$ et continuons ainsi indéfiniment. On formera une suite de chaines:

$$\{\delta_1^k\},\ \{\delta_2^k\},\dots,\ \{\delta_n^k\},\dots$$

dont chacune contient à son interieur la suivante.

La partie commune à toutes les chaines de cette suite est un continu σ, qui se transforme (par la transformation interieure donnée) en $\overline{AB}$. En effet σ contient au moins un point qui se transforme en A et au moins un point qui se transforme en B, car toute chaine contient de tels points et l'ensemble de ces points est fermé dans chaque chaine. σ contient donc deux points distincts et par conséquent est un continu. Il doit se transformer en un continu situé sur $\overline{AB}$ et ce continu transformé doit contenir les points extrèmes de $\overline{AB}$; il doit donc occuper tout le segment $\overline{AB}$. Je dis que la transformation est topologique *sur* σ. Si non il y a sur σ deux points distincts p_1 et p_2 conduisant au même point P de $\overline{AB}$. Dans toute chaine de la suite de plus haut, p_1 et p_2 sont situés dans le même δ_n^k, ou dans deux δ_n^k consécutifs (dont les k diffèrent par une unité), sans quoi les transformés de ces δ_n^k n'auraient pas de point commun. Soit γ_n le domaine formé par l'ensemble de ces deux δ_n^k (ou par le δ_n^k qui contient p_1 et p_2). γ_n se transforme en deux rectangles Δ_n^k consécutifs (ou en un seul rectangle Δ_n^k), donc toujours en un domaine Γ_n qui tend vers P quand n augmente indéfiniment. La partie commune de tous les γ_n (n entier positif quelconque) est un continu [1]), partie de σ, et ce continu doit se transformer tout entier en la partie commune de tous les Γ_n, c'est-à-dire en P. Mais ceci est contraire à la définition des transformations interieures. Les points p_1 et p_2 ne peuvent donc être distincts. Comme, d'autre part, la transformation est continue dans un sens et que σ est borné, cette transformation est bicontinue, donc topologique

[1]) Cette partie commune doit en effet contenir p_1 et p_2 qui sont distincts.

sur σ. Le continu σ est alors évidemment un arc simple comme le segment $\overline{AB}$.

3. Nous allons maintenant revenir à l'énoncé du Nº 1 en considérant les domaines D et d de cet énoncé. Soit H un point quelconque interieur à D, distinct de A et de B. Soit Σ' une ligne polygonale simple joignant H et A, entièrement située à l'intérieur de D et ayant un nombre fini de côtés. Soit Σ'' une ligne analogue entre H et B et telle que Σ' et Σ'' n'aient d'autre point commun que H. De sorte la ligne polygonale Σ résultant de la réunion de Σ' et de Σ'' sera simple.

Supposons maintenant que, contrairement à l'énoncé, il y ait dans d, un nombre $p+q$ points h_k ($k=1, 2,\dots\ p+q$) se transformant chacun en H. Nous allons montrer que cela est impossible. De h_1 part un arc simple, d'après le lemme du numéro précédent, situé dans d, se transformant en le premier côté HI de Σ' et de façon que la transformation donnée est topologique sur cet arc. Cet arc aboutit en un point i qui se transforme en I. De i part un autre arc simple correspondant de la même façon au second côté de Σ' et qui n'a évidemment en commun avec le premier arc que le point i.

En continuant ainsi, on aura un arc simple σ_1' se transformant topologiquement en Σ'. On aura de même un arc simple σ_1'' partant toujours de h_1 et se transformant topologiquement en Σ'', les arcs σ_1' et σ_1'' n'ayant en commun que le point h_1. Il forment ensemble un arc simple σ_1 se transformant topologiquement en Σ. Si on remplace maintenant h_1 par $h_2, h_3,\dots, h_{p+q}$, successivement, on aurra $p+q$ arcs simples: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,\dots, \sigma_{p+q}$, se transformant chacun topologiquement en Σ et ayant chacun pour extremités un point a_k ($k=1, 2,\dots, p$) de ceux qui correspondent à A et un point b_k ($k=1, 2,\dots, q$) de ceux qui correspondent à B, dans le domaine d.

Supposons d'abord que tous les points a_k et b_k soient tels qu'en chacun d'eux aboutissent au moins deux arcs σ_k distincts. Partons alors d'un de ces points a_{k_1} sur un arc σ_{k_1} ayant une extremité en a_{k_1}. L'autre extremité de σ_{k_1} est un point b_{k_2}. De b_{k_2} continuons notre chemin sur un autre arc σ_{k_2}, ayant ce dernier point pour extrémité, arc distinct de σ_{k_1}. Cet arc aboutira en a_{k_3} et on continuera ainsi jusqu'à ce que l'on arrive la première fois à un point a_k ou b_k déja rencontré sur notre chemin; ceci arrivera nécessairement puisque ces points sont en nombre fini. On pourra alors détacher de la suite de σ_k ainsi construite, une suite composée de σ_k, mis bout à bout, tous distincts et telle que le dernier arc de la suite aboutisse au point initial. Supposons, pour fixer les idées, que ce point initial soit a_1; de a_1 part σ_1 qui aboutit en b_2; de b_2 part σ_2 qui aboutit en a_3 et ainsi de suite jus'qu'à σ_μ qui part de b_μ et aboutit en a_1. Sur chacun des σ_k de cette suite se trouve un point h_k $(k=1,2,\dots\mu)$ et ces points sont distincts. σ_1 et σ_2 peuvent avoir en commun un autre point que b_2 soit c_1, mais alors tous les points de σ_1 et de σ_2 compris entre c_1 et b_2 sont communs. En effet s'il n'en etait pas ainsi on pourrait détacher de σ_1 et de σ_2 deux arcs n'ayant en commun que leurs deux extremités. Ces deux arcs formeraient une courbe simple fermée. Le domaine de Jordan ainsi determiné fait partie de d, car celui ci est à connexion simple. Son transformé serait donc dans D et comme la transformation est interieure, ce transformé devrait avoir tous ces points frontière sur Σ. Celui ci étant simple et ouvert, cela est impossible. Tous les points compris entre b_2 et c_1 sur σ_1 sont donc aussi sur σ_2. Par conséquent h_1 et h_2 sont exterieurs à l'arc commun b_2c_1 sur chacun des arcs σ_1 et σ_2. Supprimons cet arc commun sauf le point c_1. Soit $\bar{\sigma}_1$ et $\bar{\sigma}_2$ les arcs ainsi réduits qui n'ont plus en commun que c_1. L'arc σ_3 part de a_3 (où aboutit $\bar{\sigma}_2$) et sa partie commune avec σ_2 va de a_3 à un point c_2 situé sur σ_2 entre a_3 et h_2 et sur σ_3 entre a_3 et h_3. Cette partie commune fait donc partie de $\bar{\sigma}_2$ sans l'épuiser. Supprimons la et soient $\bar{\bar{\sigma}}_2$ et $\bar{\sigma}_3$ les arcs réduits. $\bar{\bar{\sigma}}_2$ et $\bar{\sigma}_3$ n'ont pas de point commun autre que c_2, mais $\bar{\sigma}_3$ pourra avoir un point, commun avec $\bar{\sigma}_1$. S'il en est ainsi nous arrêterons $\bar{\sigma}_3$ au premier point de rencontre avec $\bar{\sigma}_1$ et nous aurons formé ainsi une courbe simple fermée avec des portions des σ_k. S'il en est pas ainsi on continuera sur $\bar{\sigma}_3$ l'opération identique à celle qui a été effectuée sur $\bar{\sigma}_2$ et au about de μ opérations au plus on devra arriver à une courbe simple fermée. Il y a donc toujours une courbe simple fermée constituée par des portions de σ_k. Mais on a vu plus haut que cela est impossible. On ne peut donc avoir des arc σ_k tels qu'en chaque point a_k et b_k aboutissent au moins deux de ces arcs.

Supposons maintenant qu'il y ait des points a_k ou b_k qui soient extremité d'un seul, ou d'aucun arc σ_k.

Supprimons ces points avec les σ_k qui y aboutissent. On aura ainsi supprimé au moins autant de points que d'arcs. Il pourra se faire que, ces suppressions effectuées, il y ait d'autres points qui par rapport aux arcs non supprimés soient maintenant dans les conditions des points qui ont été plus haut supprimés. On continuera par de nouvelles suppressions. On se trouvera alors au bout d'un nombre fini d'opérations dans l'un des deux cas suivants: 1° on sera arreté à un moment donné et alors tous les points non supprimés seront extremité d'au moins deux arcs σ_k non supprimés. Dans ce cas le raisonnement fait plus haut montre que cela conduit à une impossibilité. 2° on arrivera à supprimer tous les points a_k et b_k et tous les arcs σ_k. Je vais montrer que cela est encore impossible si le nombre des arcs est $p+q$ comme nous l'avons admis. En effet à chaque opération qui consiste à effectuer un certain nombre de suppressions de points et d'arcs, le nombre de points supprimés sera au moins égal au nombre d'arcs supprimes. Or à la dernière opération on supprimera certainement plus de points que d'arcs. Il faudrait donc, pour que l'on arrivât à épuiser les points et les arcs, que le nombre de ces derniers fût plus petit que $p+q$.

Le théorème est ainsi démontré.

4. Si l'un des points A et B, est situé sur la frontière de D, mais est *accessible de l'interieur de D*, on pourrait dans le raisonnement du numéro précédent remplacer Σ' par une ligne polygonale à un nombre infini de côtés et les conclusions de plus haut subsisteraient. En effet, quand on tend vers A, sur Σ', l'extremité variable des arcs obtenus dans d doit s'approcher indéfiniment de la frontière de d, sans quoi il y aurrait un point interieur à d, se transformant en A qui est sur la frontière de D. Ceci serait contraire à la première condition des transformations interieures. L'extremité variable ne peut d'autre part s'approcher indéfiniment de deux points distincts de la frontière de d, car il y avait alors un continu dans l'ensemble fermé des points qui se transforment en A, ce qui serait contraire à la deuxième condition des transformations interieures. A Σ' correspondent donc encore des arcs σ'_k, mais qui ont une extremité sur la frontière de d. *Le théorème subsiste donc dans le cas où les points A et B,* **accessibles de l'intérieur**, *seraient pris quelconques dans D, à l'intérieur ou sur la frontière de ce domaine.*

Par contre: la conclusion relative aux points H ne s'étend pas en général aux points frontière.

5. Ce qui vient d'être dit montre que l'on peut énoncer encore la proposition suivante, plus particulière, mais qui se rapproche davantage du théorème de Schoenflies: *Une transformation continue et interieure d'un domaine de Jordan, qui est topologique sur la frontière, est une transformation topologique dans tout le domaine.* En effet, la frontière du domaine transformé est alors une courbe simple fermée et M. Schoenflies a démontré, en donnant la réciproque du théorème de Jordan, que tout point d'une telle courbe est accessible de l'intérieur comme de l'exterieur [1]). On pourra donc prendre alors A et B quelconque sur la frontière de d.

[1]) A. Schoenflies: Mathematische Annalen (1906) t. 62. p. 316.

Sur une décomposition du segment.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème: *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, *il existe une décomposition de l'intervalle* $J=[0\leqslant x\leqslant 1]$ *en* $2^{2^{\aleph_0}}$ *ensembles de mesure extérieure* $=1$, *de deuxième catégorie dans tout intervalle, et ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs.*

Lemme I [1]). *Si* $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ *et si* E *est un ensemble linéaire de mesure extérieure positive, il existe un ensemble non dénombrable* $H\subset E$, *tel que tout sous-ensemble non dénombrable de* H *est non mesurable* (L).

Dém. De l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ résulte l'existence d'une suite transfinie du type Ω,

$$(1)\qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ldots,\ x_\omega,\ x_{\omega+1},\ldots,\ x_\alpha,\ldots,\qquad (\alpha<\Omega)$$

formée de tous les nombres réels.

Or, l'ensemble de tous les ensembles G_δ linéaires de mesure nulle ayant la puissance du continu, il existe aussi (d'après $2^{\aleph_0}=\aleph_1$) une suite transfinie du type Ω,

$$(2)\qquad \Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3,\ldots,\ \Gamma_\omega,\ \Gamma_{\omega+1},\ldots,\ \Gamma_\alpha,\ldots,\qquad (\alpha<\Omega)$$

formée de tous les ensembles G_δ linéaires de mesure nulle.

α étant un nombre ordinal $<\Omega$, désignons par S_α l'ensemble

$$(3)\qquad S_\alpha=\sum_{\xi\leqslant\alpha}\Gamma_\xi$$

— ce sera évidemment un ensemble de mesure nulle (comme somme

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. V, p. 184.