Sur les suites de fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young.

Par

L. Kantorovitch (Leningrad).

MM. W. Stepanoff, O. Nikodym et G. Goldowsky ont établi récemment[1]) des théorèmes intéressants sur les suites de fonctions continues. Le but de cette note est d'étendre ces résultats aux fonctions rentrant dans la classification de M. W. H. Young (les fonctions semi-continues généralisées). Nous nous bornerons aux fonctions d'une variable réelle x, définies dans un intervalle fini (a, b). En suivant, pour les notations, M. H. Hahn[2]), voici notre théorème fondamental:

Théorème. *Pour que la fonction $F(x)$, finie ou non, puisse être représentée par la relation de la forme*

$$F(x) = \lim_{m \to \infty} \sup f_m(x), \tag{1}$$

f_m étant une fonction (g_{β_m}) au plus, $\beta_m < \alpha$, il faut et il suffit que la fonction F soit $(g_{\alpha+1})$ au plus.

La condition est nécessaire. Cela résulte presque immédiatement des relations connues:

$$F = \lim_{m\to\infty} \sup f_m = \lim_{m\to\infty} \operatorname{Max}(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+k} \ldots) = \tag{2}$$
$$= \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \operatorname{Max}(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+k}).$$

[1]) W. Stepanoff, *Sur les suites des fonctions continues*. [*Fund. Mathem.*, 11, 1928; pp. 264—272; v. aussi la note de M. O. Nikodym, ib. pp. 272—274]; G. Goldowsky, *Sur les suites des fonctions continues* [ibid., pp. 275—276].

[2]) H. Hahn, *Theorie der reellen Functionen* [Berlin, 1921; p. 334]; nous la citerons dans la suite comme *H. Hahn, Theorie*.

La condition est suffisante. Soit $F(x)$ une fonction $(g_{\alpha+1})$ au plus. On aura, par définition:

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x), \tag{3}$$

où φ_n est une fonction (G_α) au plus. Sans nuire à la généralité on peut supposer de plus que la fonction φ_n est bornée, p. e., par les nombres $-n$ et n:

$$-n \leqslant \varphi_n(x) \leqslant n.$$

[Si non, nous pourrions la remplacer par la fonction suivante

$$\operatorname{Max}(-n, \operatorname{Min}(\varphi_n, n))$$

qui est également une (G_α) au plus]. Décomposons l'intervalle $(-n, n)$ en $2n^2$ parties égales par les points

$$l_0 = -n,\ l_1 = -n + \frac{1}{n},\ l_2 = -n + \frac{2}{n} \ldots,\ l_i = -n + \frac{i}{n}, \ldots,$$
$$l_{2n^2} = n$$

et définissons une nouvelle fonction $\psi_n(x)$, en posant $\psi_n = l_i$ en tous les points, où $l_i - \frac{1}{n} < \varphi_n \leq l_i\ [i = 0, 1, 2, \ldots, 2n^2]$, en sorte que l'on ait $0 \leqslant \psi_n - \varphi_n < \frac{1}{n}$. Il en résulte [v. (3)]

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x). \tag{4}$$

D'après un théorème connu[1]) φ_n étant une (G_α) au plus, l'ensemble

$$E_{n,i} = \mathcal{E}(\psi_n \geqslant l_i) = \mathcal{E}(\varphi_n > l_{i-1}) \quad [i = 1, 2, \ldots, 2n^2]$$

est $(\mathfrak{B}_\alpha)$ au plus; il en est de même évidemment pour l'ensemble $E_{n,0} = \mathcal{E}(\psi_n \geqslant l_0) = (a, b)$. *Supposons dès maintenant* $\alpha > 1$. Alors on peut appliquer un lemme de M. Sierpiński[2]) [pour $\alpha = 2$] ou celui de M. Lusin[3]) [pour $\alpha > 2$] et décomposer l'ensemble $E_{n,i}$ comme il suit:

$$E_{n,i} = \sum_{j=1}^{\infty} E_{n,i,j}, \tag{5}$$

[1]) H. Hahn, *Theorie*, p. 343.

[2]) W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles $F_{\sigma\delta}$* [*Fund. Mathem.*, 6, 1924; p. 21].

[3]) W. Sierpiński, *Sur une classification des ensembles mesurables (B)* [*Fund. Mathem.*, 10, 1927; p. 324].

où chaque ensemble $E_{n,i,j}$ est $(\mathfrak{D}_\beta)$ au plus [β étant $<\alpha$ et pouvant varier avec n, i, j] et tout point de $E_{n,i}$ appartient tout au plus *à deux* des ensembles $E_{n,i,j}$. Posons enfin, par définition, $f^*_{n,i,j}(x)=l_i$ dans l'ensemble $E_{n,i,j}$ et $f^*_{n,i,j}(x)=-\infty$ partout ailleurs. La fonction $f^*_{n,i,j}$ est évidemment (g_β) $(\beta<\alpha)$ au plus et l'on a partout

(6) $$f^*_{n,i,j}\leqslant\psi_n.$$

Rangeons maintenant d'une manière quelconque toutes les fonctions $f^*_{n,i,j}$ dans une suite simple (du type ω):

$$f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots$$

Je dis qu'on a, pour ces fonctions-ci, la relation (1). En effet, soit ε un nombre positif aussi petit que l'on veut, on aura, vu (4), pour une valeur de x quelconque, mais fixe,

$$\psi_n(x)>F(x)-\varepsilon$$

dès que n est assez grand. Soit $\psi_n(x)=l_{i_0}$; alors, $x\,\epsilon\,E_{n,i_0}$ et, par conséquent, $x\,\epsilon\,E_{n,i_0,j_0}$, pour une au moins des valeurs de j_0, en sorte que l'on ait $f^*_{n,i_0,j_0}(x)>F(x)-\varepsilon$. Autrement dit, l'inégalité $f_m(x)>F(x)-\varepsilon$ se trouve vérifiée pour une infinité de valeurs de m; il en résulte:

$$\limsup_{m\to\infty} f_m(x)\geqslant F(x)-\varepsilon$$

ou, ε étant arbitraire,

(7) $$\limsup_{m\to\infty} f_m(x)\geqslant F(x).$$

Maintenant nous allons montrer que le sens de cette inégalité peut être renversé. Tout d'abord, nous tirons de (4) qu'on a pour $n>N$,

$$\psi_n(x)<F(x)+\varepsilon$$

et, vu (6), a fortiori

$$f^*_{n,i,j}(x)<F(x)+\varepsilon,$$

quelles que soient les valeurs de i et de j. D'autre part, pour chaque couple (n, i), où $n=1, 2, \ldots, N$, et où $i=0, 1, \ldots, 2n^2$, le point x peut appartenir tout au plus à deux ensembles $E_{n,i,j}$; donc, pourvu que $n\leqslant N$, par la définition même des fonctions $f^*_{n,i,j}$, on aura $f^*_{n,i,j}(x)=-\infty$, à un nombre fini $[<2N(2N^2+1)]$ de ces fonctions près. Il résulte de ce qui précède que l'on ait

$$f_m(x)<F(x)+\varepsilon,$$

abstraction faite d'un nombre fini de valeurs de m. Alors on a

(8) $$\limsup_{m\to\infty} f_m(x)\leqslant F(x).$$

Les inégalités (7), (8) impliquent l'égalité (1) à démontrer. Ce raisonnement s'étend immédiatement au cas où $F(x)$ n'est point finie. On peut ailleurs n'utiliser que des fonctions $f_m(x)$ *finies*, en remplaçant au besoin les fonctions $f_m(x)$ par les suivantes:

$$\operatorname{Max}\,[-m, f_m(x)].$$

Remarque. Soit maintenant $\alpha=1$ [c'est ce cas qui était considéré par MM. Stepanoff et Nikodym]; tout ensemble $E_{n,i}$ sera ouvert. On peut imiter ici également le procédé de décomposition (5), en prenant pour l'ensemble $E_{n,i,j}$ un intervalle ouvert. Donc, la fonction f_m dans un tel intervalle ouvert $d_m=(a_m, b_m)$ sera égale à une constante finie c_m, étant $-\infty$ partout ailleurs. Elle n'est point continue. Décomposons l'intervalle ouvert d_m de nouveau en intervalles partiels $d_m^{(k)}$ $[-\infty<k<+\infty]$ de façon qu'ils n'empiètent pas les uns sur les autres, deux intervalles consécutifs ayant une extrémité commune; les extrémités de ces intervalles n'auront d'autres points limites que les points a_m, b_m. Construisons, pour chacune couple (m, k) $[m=1, 2, 3, \ldots;\ k=0, \pm1, \pm2, \ldots]$, une fonction $f_{m,k}(x)$ comme il suit. Dans l'intervalle $d_m^{(k)}$ nous posons $f_{m,k}(x)=f_m(x)=c_m$; dans l'intervalle $d_m^{(k-1)}$ nous la faisons croître d'une façon continue de $-\infty$ à c_m, de même dans l'intervalle $d_m^{(k+1)}$ nous la supposons décroître continûment de c_m à $-\infty$; enfin, nous posons $f_{m,k}(x)=-\infty$ partout ailleurs. Les fonctions $f_{m,k}$ ainsi définies seront continues dans un sens généralisé; si nous les rangeons dans une suite simple (du type ω)

$$\overline{f}_1(x), \overline{f}_2(x), \ldots, \overline{f}_p(x), \ldots,$$

on verra par un raisonnement analogue à celui qui précède qu'on a

$$F(x)=\limsup_{p\to\infty}\overline{f}_p(x).$$

Enfin, on peut remplacer chacune des fonctions $\overline{f}_p(x)$, si l'on veut, par la fonction $\operatorname{Max}\,[-p, \overline{f}_p(x)]$ qui est continue dans le sens propre.

On peut donner au théorème précédent une forme un peu différente, en supposant que la fonction f_m est de classe $<\alpha$ (suivant la classification de M. Baire). Dans ce cas la condition est suffisante a fortiori. Pour démontrer qu'elle reste également nécessaire, remarquons que la fonction f_m de classe $<\alpha$ étant (G_α) au plus, il en sera de même pour la fonction

$$\operatorname{Max}(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+k}, \ldots) = \lim_{k\to\infty} \operatorname{Max}(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_{m+k}),$$

comme limite d'une suite croissante de fonctions (G_α): alors, vu (2), la fonction F sera bien $(g_{\alpha+1})$ au plus, c. q. f. d.

Le théorème que nous venons de démontrer implique un nombre de corollaires.

Corollaire I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction non-négative $\Phi(x)$ soit l'oscillation limite:*

$$\Phi(x) \equiv \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) - \liminf_{n\to\infty} \varphi_n(x) \tag{9}$$

pour une suite de fonctions $\varphi_n(x)$ de Baire des classes $<\alpha$ est qu'elle soit une fonction $(g_{\alpha+1})$ au plus [1]).

La nécessité résulte immédiatement du théorème démontré, la relation (9) pouvant s'écrire comme il suit:

$$\Phi(x) = \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) + \limsup_{n\to\infty} [-\varphi_n(x)].$$

D'autre part, si la fonction Φ est $(g_{\alpha+1})$ au plus, on peut construire une suite de fonctions non-négatives $f_m(x)$, des classes $<\alpha$, de manière qu'on ait

$$\Phi(x) = \limsup_{m\to\infty} f_m(x).$$

Si l'on pose $\varphi_{2m}(x) = f_m(x)$, $\varphi_{2m-1}(x) = 0$, on aura précisément la relation (9) à démontrer.

Corollaire II. *Pour qu'un ensemble linéaire E puisse être regardé comme ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions de Baire des classes $<\alpha$, il faut et il suffit qu'il soit $(\mathfrak{D}_{\alpha+2})$ au plus* [2]).

Si l'ensemble E est bien un ensemble des points de convergence pour une telle suite, la relation évidente

$$E = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(|\varphi_{n+k}(x) - \varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{m}\right)$$

nous apprend que cet ensemble est un $(\mathfrak{D}_{\alpha+2})$ au plus.

[1]) Cette proposition offre une généralisation de celle de M. Stepanoff, concernant le cas $\alpha = 1$. [Loc. cit., p. 269].

[2]) C'est un résultat connu. Cf.: H. Hahn, *Archiv. d. Math. u. Physik*, 3 Reihe, 28; p. 34; W. Sierpiński. *Fund. Math.*, 2, 1921, p. 41 [pour $\alpha = 1$].

Inversement, soit E un ensemble $(\mathfrak{D}_{\alpha+2})$ au plus. Alors on peut [1]) construire une fonction $\Phi(x)$ qui est une $(g_{\alpha+1})$ au plus, de manière qu'on ait

$$\Phi = 0 \text{ dans } E, \quad \Phi > 0 \text{ dans } CE.$$

D'après le corollaire I, il existe une suite $\{\varphi_n(x)\}$ de fonctions de Baire, des classes $<\alpha$, dont l'oscillation limite est précisément la fonction Φ ci-dessus. On voit que cette suite satisfait aux conditions réquises.

Corollaire III. *Quelles que soient les fonctions $F(x)$ et $G(x)$, $F(x) \geqslant G(x)$, respectivement du type $(g_{\alpha+1})$ et $(G_{\alpha+1})$ au plus, il existe toujours une suite de fonctions de Baire, des classes $<\alpha$, dont la limite supérieure, resp., inférieure coïncident avec les fonctions données par avance.*

En suivant l'ordre d'idées de M. Goldowsky [qui avait démontré cette proposition pour $\alpha = 1$ [2])], nous généralisons d'abord le lemme qui lui a servi un point du départ:

Lemme. *Pour les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ en question on peut construire une suite $\{h_n(x)\}$ de fonctions de Baire de classes $<\alpha$ telle que l'on ait*

$$F(x) \geqslant \limsup_{n\to\infty} h_n(x) \geqslant \liminf_{n\to\infty} h_n(x) \geqslant G(x). \tag{10}$$

Si nous essayerions d'étendre le raisonnement de M. Goldowsky, en s'appuyant, bien entendu, au lieu du théorème (Einschiebungssatz) de M. Hahn, sur celui de M. Hausdorff [3]), nous pourrions établir seulement que chacune des fonctions $h_n(x)$ est tout au plus une (g_α) et une (G_α) en même temps. Si le nombre ordinal α est de la première espèce, il en résulte que la fonction h_n est bien de classe $<\alpha$. Or, dans le cas où α est de la seconde espèce une telle conclusion serait illégitime; c'est pourquoi nous allons démontrer l'énoncé ci-dessus par une méthode tout à fait différente.

Il existe une suite $\{\varphi_i(x)\}$ de fonctions (G_α) au plus tendant *en décroissant* vers la fonction $F(x)$, ainsi que la suite $\{\psi_i(x)\}$ de fonctions (g_α) au plus tendant *en croissant* vers la fonction $G(x)$. D'autre part, quel que soit i $[i = 1, 2, 3, \ldots]$, on peut construire des suites

[1]) H. Hahn, *Theorie*, p. 345.

[2]) Loc. cit.

[3]) F. Hausdorff, *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung* [*Math. Zeitschr.* 5, 1919; pp. 295, 309].

$\{\varphi_{i,k}(x)\}$, $\{\psi_{i,k}(x)\}$ de fonctions (g_β), resp., (G_β) $[\beta < \alpha]$ au plus qui tendent en croissant, resp., en décroissant vers les fonctions correspondantes $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$. Soit $E_{i,k} = \mathcal{E}(\varphi_{i,k} \geqslant \psi_{i,k})$; cet ensemble est un $(\mathfrak{D}_\beta)$ $[\beta < \alpha]$ au plus. On aura ailleurs

(11) $$E_{i,k} \subset E_{i,k+1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} E_{i,k} = (a, b).$$

Posons maintenant, pour chaque valeur du nombre naturel n:

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \varphi_{n,n}(x), && \text{si} \quad x \in E_{n,n} \\ &= \varphi_{n-1,n}(x), && \text{si} \quad x \in E_{n-1,n} - E_{n,n} \\ &= \varphi_{n-2,n}(x), && \text{si} \quad x \in E_{n-2,n} - (E_{n-1,n} + E_{n,n}) \\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots \\ &= \varphi_{1,n}(x), && \text{si} \quad x \in E_{1,n} - (E_{2,n} + \ldots + E_{n,n}) \\ &= 0 \ \text{partout ailleurs.} \end{aligned}$$

On peut également définir la fonction $h_n(x)$ par une seule relation

$$h_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \varphi_{\nu,n}(x)\, \theta_\nu(x),$$

en désignant par $\theta_\nu(x)$ $[\nu = 1, 2, \ldots, n]$ des fonctions caractéristiques correspondant aux ensembles indiqués tout à l'heure. Les fonctions $\varphi_{\nu,n}$ et θ_ν étant des classes $< \alpha$, il en sera de même pour la fonction $h_n(x)$. Fixons une valeur de x et prenons à volonté un nombre positif ε. On aura évidemment

(12) $$F(x) + \varepsilon > \varphi_i(x) > \psi_i(x) > G(x) - \varepsilon$$

dès que i surpasse un nombe ν, suffisamment grand. D'autre part, quelle que soit la valeur de i, il existe, vu (11), un nombre k_i tel que l'on ait

(13) $$x \,\varepsilon\, E_{i,k}$$

pourvu que k soit $> k_i$. Soit $N = \text{Max}[\nu, k_\nu]$; si $n > N$, on aura: $x \in E_{\nu,n}$ [v. (13)]. Soit i le plus grand des indices $i \leqslant n$ pour lesquels $x \in E_{i,n}$; il viendra alors, d'après la définition même de la fonction h_n et de l'ensemble $E_{i,n}$

(14) $$h_n(x) = \varphi_{i,n}(x) \geqslant \psi_{i,n}(x)$$

et, comme on a $i \geqslant \nu$, on tire de (12) et (14)

$$F(x) + \varepsilon > h_n(x) > G(x) - \varepsilon; \qquad [\text{pourvu que } n > N]$$

ε étant arbitraire, ceci implique (10), c. q. f. d.

Le reste du raisonnement est tout à fait analogue à celui de M. Goldowsky.

Je tiens à remercier, en terminant, M. le Professeur Gr. Fichtenholz pour ses précieux conseils concernant la redaction définitive de cette note.