Sur l'intégrale de Poisson et quelques questions qui s'y rattachent.

Par

Gr. Fichtenholz (Leningrad, U. R. S. S.).

1. Nous allons étudier quelques questions concernant les fonctions harmoniques de deux variables réelles, régulières dans l'intérieur du cercle-unité, et les fonctions analytiques d'une variable complexe z, holomorphes pour $|z|<1$. C'est l'intégrale classique de Poisson (1) qui va jouer le rôle le plus essentiel dans toutes les recherches suivantes.

L'objet principal de l'article présent est la question de convergence d'une suite de fonctions harmoniques, resp. holomorphes. Les conditions que nous allons établir, dans les nn⁰ 4, 5, 7, sont nécessaires, de même que suffisantes; elles portent seulement sur la circonférence du cercle-unité et non sur son intérieur. Bien entendu, les fonctions de suites considérées sont soumises dans ce cas *a priori* à quelques hypothèses restrictives.

Dans les nn⁰ 2, 3, 6 nous rappelons les propositions connues, relatives à la représentation d'une fonction harmonique, resp. holomorphe, par la formule de Poisson (dans le sens propre et généralisé) ou par celle de Cauchy; nous lec complétons par quelques remarques et conséquences.

Il faut mentionner le principe du choix connu de Ascoli-Arzelà, concernant les fonctions continues, et celui de M. M. Montel et Helly, relatif aux fonctions à variation bornée; tous les deux sont d'usage fréquente dans la suite. Outre cela, il est intéressant de signaler qu'il nous a fallu introduire la convergence d'une suite *en mesure* (suivant M. F. Riesz), comme l'élément indispensable du raisonnement, même dans le domaine des fonctions analytiques d'une variable complexe [n⁰ 7, v. les théorèmes IX* et XI*].

J'avais fait la communication préliminaire sur ce sujet au Congrès des mathématiciens russes [à Moscou, 26 avr.—4 mai 1927] et à l'Académie des Sciences [à Paris, v. C. R. 1927, t. 184, pp. 1370 et 1528].

C'est seulement après l'envoi du manuscrit que j'ai pu étudier la thèse de M. A. Plessner: *Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen* [Mitt. d. Math. Semin. d. Univ. Giessen, H. 10, 1923] et la monographie récente de M. G. C. Evans: *The logarithmic potential* [Americ. Math. Soc. Colloq. Public., VI, 1927], sur laquelle M. S. Saks appela obligeamment mon attention. Quelques raisonnements des nn° 2, 3 sont très proches à ceux des auteurs cités. Or, tout cela ne touchant point le contenu principal de cet article, j'ai préféré ne faire des changements que dans les notes.

2. Conviendrons, une fois pour toutes, de désigner par K l'intérieur du cercle-unité, les points de la circonférence exclus, et par C cette circonférence; $K+C$ sera un domaine fermé.

Soit $u=u(r,\theta)$ une fonction harmonique, régulière dans K. Cherchons dans quels cas elle est représentable pas l'intégrale de Poisson

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda)\,P(r,\theta-\lambda)\,d\lambda, \tag{1}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$P(r,\theta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

et la fonction $f(\lambda)$ est supposée sommable.

I. *Pour que l'on ait la formule de Poisson* (1), *il faut el il suffit que les intégrales*

$$\int_0^{\theta} u(r,\lambda)\,d\lambda \tag{2}$$

soient absolument continues en θ *uniformément pour toutes les valeurs de* $r<1$ [1]).

[1]) Ce théorème est du à M. M. G. C. Evans et H. E. Bray. Voir les trois Notes dans les C. R., 1923, t. 176, pp. 1042, 1368 et t. 177, p. 241, ainsi que le livre cité de M. Evans, pp. 38, 44 46—50.

Démonstration. La condition est nécessaire. Admettons donc la formule (1). La fonction sommable $f(\lambda)$ étant la différence de deux fonctions sommables non-négatives, on peut ne raisonner que sur la fonction non-négative. Dans ce cas on aura également: $u(r,\theta)>0$. Par la propriété classique de la fonction harmonique, il viendra

$$\int_0^{2\pi} u(r,\lambda)\,d\lambda=2\pi\,.\,u(0)=\int_0^{2\pi} f(\lambda)\,d\lambda.$$

En outre, d'après le théorème connu de M. Fatou [2]), on aura presque partout

$$\lim_{r\to 1} u(r,\lambda)=f(\lambda). \tag{3}$$

Soit $\{r_n\}$ une suite arbitraire de valeurs de r, tendant vers l'unité; il suit de ce qui précède que la suite $\{u(r_n,\lambda)\}$ peut être intégrée dans l'intervalle $(0,2\pi)$ terme-à-terme. Il en résulte, en vertu d'un théorème de M. Vitali [3]), que les intégrales (2) sont absolument continues en θ uniformément pour les valeurs r_n de r, $n=1,2,3\ldots$ On verra ensuite facilement qu'il en sera de même de toutes les valeurs de $r<1$, car la fonction $u(r,\theta)$ est bornée dans tout domaine fermé contenu dans K.

[2]) P. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* [*Acta Mat.* 30, 1906; pp. 349, 377—8].

[3]) G. Vitali, *Sull' integrazione per serie* [*Rend. del Circ. Mat. di Palermo* 23, 1907; pp. 141, 147, 149]. On peut formuler cet important théorème comme il suit:

Soit $\{f_n(\lambda)\}$ *une suite de fonctions positives et sommables de* λ *dans l'intervalle* (α,β) *convergeant presque partout vers la fonction-limite* $f(\lambda)$. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(\lambda)\,d\lambda=\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,d\lambda$$

est que les intégrales

$$\int_\alpha^\theta f_n(\lambda)\,d\lambda$$

soient absolument continues en θ *uniformément pour toutes les valeurs de* n.

Si l'on omet l'hypothèse que les fonctions $f_n(\lambda)$ *soient positives, la condition énoncée reste suffisante* [quoique, en général, elle ne sera plus nécessaire].

La condition est suffisante. Supposons qu'elle soit vérifiée; il en résulte *a fortiori* que les intégrales (2), pour $r<1$, sont également continues en θ. Comme elles toutes s'annulent pour $\theta=0$, ces fonctions sont aussi bornées dans leur ensemble. D'après le théorème bien connu de Ascoli-Arzelà, on peut former une suite $\{r_n\}$ de valeurs de r, tendant vers l'unité et telle que les fonctions

$$F_n(\theta)=\int_0^\theta u(r_n,\lambda)\,d\lambda \tag{2*}$$

convergent, pour $n\to\infty$, vers une fonction-limite $F(\theta)$ [uniformément pour toutes les valeurs de θ]. Je dis que cette fonction-ci est absolument continue. En effet, ε étant pris à volonté, on aura, d'après l'hypothèse

$$\left|\sum_{\mu=1}^{\mu=m}[F_n(\theta'_\mu)-F_n(\theta_\mu)]\right|<\varepsilon,$$

quel que soit n, pourvu que la somme des longueurs des intervalles non-empiétants $(\theta_\mu, \theta'_\mu)$ $[\mu=1,2,\dots,m]$ soit assez petite. Faisons tendre n vers l'infini; il viendra, à la limite,

$$\left|\sum_{\mu=1}^{\mu=m}[F(\theta'_\mu)-F(\theta_\mu)]\right|\leqslant\varepsilon, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Donc, la fonction $F(\theta)$ est réprésentable par une intégrale indéfinie

$$F(\theta)=\int_0^\theta f(\lambda)\,d\lambda,$$

$f(\lambda)$ étant sommable. Fixons maintenant un point quelconque (r,θ) dans K. On aura, dès que r_n surpassera r,

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r_n,\lambda)\frac{r_n^2-r^2}{r_n^2-2r_n r\cos(\theta-\lambda)+r^2}d\lambda.$$

Ceci peut s'écrire, en intégrant par parties,

$$\frac{1}{2\pi}F_n(2\pi)\frac{r_n^2-r^2}{r_n^2-2r_n r\cos\theta+r^2}-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_n(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{r_n^2-r^2}{r_n^2-2r_n r\cos(\theta-\lambda)+r^2}d\lambda.$$

Passant à la limite, nous obtenons la relation

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}F(2\pi)P(r,\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}P(r,\theta-\lambda)\,d\lambda$$

qui est équivalente à la formule (1) cherchée.

M. A. Zygmund a remarqué, à propos du raisonnement précédent, qu'on peut se passer ici les théorèmes de MM. Fatou et Vitali, en s'appuyant sur les relations évidentes:

$$\int_\theta^{\theta'}u(r,\theta)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_\theta^{\theta'}d\theta\int_0^{2\pi}f(\theta+\lambda)P(r,\lambda)\,d\lambda$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(r,\lambda)\,d\lambda\int_\theta^{\theta'}f(\theta+\lambda)\,d\theta,$$

$$\left|\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\int_{\theta_\mu}^{\theta'_\mu}u(r,\theta)\,d\theta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\int_{\theta_\mu}^{\theta'_\mu}f(\theta+\lambda)\,d\theta\right|P(r,\lambda)d\lambda$$

et en tenant compte de la continuité absolue de la fonction-intégrale $\int_0^\theta f(\theta)\,d\theta$.

Remarque. La condition portant sur les intégrales (2), dont il s'agissait dans l'énoncé précédent, peut se mettre sous la forme d'une seule inégalité que voici:

$$\int_0^{2\pi}|u(r,\lambda)|\,.\,H(|u(r,\lambda)|)\,d\lambda\leqslant N,$$

où N est une constante, indépendante de r, et $H(t)$ désigne une fonction de la variable positive t qui va en croissant vers l'infini avec celle-ci. Cette remarque intéressante est due à M. de la Vallée Poussin qui l'avait faite à une autre occassion [4]).

Comme la continuité absolue en θ, uniforme pour $r<1$, des intégrales (2) entraîne celle des intégrales

$$\int_0^\theta|u(r,\lambda)-f(\lambda)|\,d\lambda,$$

[4]) Ch. J. de la Vallée Poussin, *Sur l'intégrale de Lebesgue* [*Trans. of. the Americ. M. S.* 16, 1915; pp. 450—451].

on aura en vertu du théorème, cité [3]), de M. Vitali [v. (3)]

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|u(r,\lambda)-f(\lambda)|\,d\lambda=0.$$

Nous arrivons donc à ce corollaire:

II. *La fonction harmonique $u(r,\theta)$, représentée par la formule de* Poisson (1), *converge en moyenne [du premier ordre] vers sa fonction-limite, lorsque $r\to 1$.*

C'est un résultat connu [5]).

On peut tirer aussi du théorème I un critère, caractérisant les constantes de Fourier d'une fonction sommable. Soit

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta) \tag{4}$$

une série trigonométrique, dont les coefficients tendent vers zéro.

III. *Pour qu'une série (4) soit la série de* Fourier *d'une fonction sommable, il faut et il suffit que les intégrales*

$$\int_0^{\theta}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(a_n\cos n\lambda+b_n\sin n\lambda)\right]d\lambda,$$

comme fonctions de θ, soient absolument continues uniformément pour les valeurs de $r<1$ [6]).

3. Maintenant nous allons considérer la formule de Poisson généralisée:

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}P(r,\theta-\lambda)\,dF(\lambda), \tag{5}$$

où l'intégrale est prise au sens de Stieltjes. Nous nous bornerons à deux cas principaux, en supposant ou bien que la fonction $F(\lambda)$ soit continue, ou bien qu'elle soit à variation bornée.

[5]) Cf.: W. Stepanoff, *Sur la résolution du problème de Dirichlet à l'aide de l'intégrale de Poisson* [*Réc. de la Soc. Math. de Moscou* 32, 1924; pp. 111—113]. Voir aussi: M. Noaillon, *Sur la détermination sans ambiguïté de la solution du problème de Dirichlet pour les fonctions sommables* [C. R. 182, 1926; p. 1371].

[6]) Comparer: W. H. and. G. C. Young, *On the theorem of Riesz-Fischer* [*Quart. Journ. of Math.* 44, 1912—1913; p. 56], où l'on trouve un critère analogue, concernant les sommes moyennes de Fejér. V. aussi: W. Stepanoff, loc. cit. [5]), p. 114.

C'est la première hypothèse qui nous occupera d'abord:

IV. *Pour que la fonction harmonique u puisse s'exprimer par la formule (5), avec une fonction $F(\lambda)$ continue, il faut et il suffit que les intégrales (2) soient également continues en θ pour toutes les valeurs de $r<1$.*

Démonstration. La condition est nécessaire. On peut supposer $u(0)=0$, en sorte que la fonction $F(\lambda)$ soit périodique: $F(2\pi)=F(0)$. De la formule (5), en intégrant par parties, il viendra:

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta}P(r,\theta-\lambda)\,d\lambda, \tag{6}$$

le terme tout intégré se détruisant à cause de périodicité. Effectuons maintenant l'intégration par rapport à θ, de θ_0 a θ_1, ce qui peut se faire dans le second membre sous le signe intégrale; on aura

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}u(r,\theta)\,d\theta= \tag{7}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\lambda)\;P(r,\theta_1-\lambda)\,d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\lambda)\,P(r,\theta_0-\lambda)\,d\lambda.$$

Cette expression, d'après les propriétés connues de l'intégrale de Poisson, converge vers la limite $F(\theta_1)-F(\theta_0)$, lorsque $r\to 1$, et cela uniformément pour tous les intervalles (θ_0,θ_1); il en résulte facilement que les intégrales (2) sont également continues.

On peut démontrer, exactement de la même manière que pour le théorème I, que la condition en question est aussi suffisante.

Remarque I. La formule (5) définit la fonction $F(\lambda)$, supposée continue, à une constante additive près. En effet, on tire de (7) la relation suivante

$$F(\theta)-F(0)=\lim_{r\to 1}\int_0^{\theta}u(r,\lambda)\,d\lambda, \tag{8}$$

qui évidemment a lieu aussi dans le cas, où $u(0)\neq 0$.

La proposition démontrée entraîne cette conséquence:

V. *Pour qu'une série (4) soit la série de Fourier d'une fonction continue et de période 2π, il faut et il suffit que les intégrales*

$$\int_0^\theta \sum_{n=1}^{\infty} n r^n (b_n \cos n\lambda) - a_n \sin n\lambda)\, d\lambda$$

soient également continues en θ pour les valeurs de $r<1$.

La preuve repose sur l'identité

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta-\lambda)\, dF(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n' \cos n\theta + b_n' \sin n\theta),$$

où la fonction $F(\lambda)$ est supposée continue et de période 2π, et les coefficients a_n', b_n' sont donnés par des formules:

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos n\lambda\, dF(\lambda) = \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\lambda) \sin n\lambda\, d\lambda,$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin n\lambda\, dF(\lambda) = -\frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\lambda) \cos n\lambda\, d\lambda.$$

Considérons le cas, où la fonction $F(\lambda)$ dans la formule (5) est à variation bornée. Voici le critère correspondant:

VI. *Pour que la fonction harmonique u soit représentable par la formule de Poisson généralisée (5), avec une fonction $F(\lambda)$ à variation bornée, il faut et il suffit qu'on ait, quel que soit $r<1$, l'inégalité*

$$\int_0^{2\pi} |u(r, \lambda)|\, d\lambda \leqslant N,$$

N étant une constante, indépendante de r [7]*.*

Démonstration. La condition est nécessaire. La fonction $F(\lambda)$ étant la différence de deux fonctions croissantes, nous pouvons nous borner au cas, où $F(\lambda)$ va en croissant avec λ. Or, alors la fonction $u(r, \theta)$ se trouve positive et on aura tout simplement, quel que soit $r<1$,

$$\int_0^{2\pi} |u(r, \lambda)|\, d\lambda = 2\pi \,.\, u(0) = \text{const.}$$

[7]) Ce théorème a été démontré par MM. Evans et Bray [loc. cit.[1])] et, simultanément, par M. Plessner [dans sa thése citée, pp. 14—17].

La condition est suffisante. En effet, supposons qu'elle soit vérifiée. Il en résulte que les fonctions (2) de θ sont bornées dans leur ensemble et qu'il en est de même de leurs variations totales. Alors on peut tirer de cette famille de fonctions une suite partielle (2*) de façon qu'elle converge partout, si $n \to \infty$, vers une fonction-limite $F(\lambda)$ à variation bornée [8]). Il est aisé, en outre, de faire cela de manière que r_n tende vers l'unité. On achèvera la démonstration comme pour le théorème I.

Remarque II. Nous allons chercher, en quelle mesure la fonction $F(\lambda)$ dans la formule (5), supposée à variation bornée, est définie par cette formule même. On arrivera sans peine à la formule suivante [cp. (7)]:

$$\int_0^\theta u(r, \lambda)\, d\lambda = [F(2\pi) - F(0)] \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^\theta P(r, \lambda)\, d\lambda$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\lambda)\, P(r, \theta-\lambda)\, d\lambda - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\lambda)\, P(r, \lambda)\, d\lambda$$

et l'on aura à la limite, pourvu que $0<\theta<2\pi$,

$$\lim_{r\to 1} \int_0^\theta u(r, \lambda)\, d\lambda = \frac{F(\theta-0) + F(\theta+0)}{2} + C,$$

où l'on a posé

[8]) Nous nous appuyons sur le théorème suivant:

si $\{F_n(\lambda)\}$ est une suite de fonctions à variation bornée dans l'intervalle (α, β) et si ces fonctions, ainsi que leurs variations totales, sont bornées dans leur ensemble, alors on peut extraire de la suite $\{F_n(\lambda)\}$ une suite partielle qui converge en tous les points de l'intervalle (α, β) vers une fonction-limite $F(\lambda)$ à variation bornée.

Cette proposition a été démontrée par M. P. Montel, dans l'hypothèse que les fonctions $F_n(\lambda)$ sont continues [*Annal. de l'Ec. Norm.* (3) 24, 1907, pp. 256—7]. Puis la généralisation a été effectuée par M. E. Helly [*Sitz. d. Ak. d. Wissensch. Wien* (IIa) 121, 1912, pp. 283—4] et, indépendamment, par M. W. H. Young [*Proc. of the London R. S.* (A) 92, 1916, p. 356], par moi-même [dans ma thèse russe: *Théorie des intégrales définies dépendant d'un paramètre*, *Petrograd*, 1918, p. 192] et, enfin, par M. S. Banach [*Fund. Math.* 3, 1922, pp. 173—4].

Nous aurons besoin dans la suite de ce *principe de choix* dans sa forme générale.

$$C = \frac{F(2\pi) - F(0)}{2} - \frac{F(2\pi - 0) + F(+0)}{2}.$$

On voit donc que la fonction $F(\lambda)$ est définie par la formule (5) à une constante additive près, si l'on néglige ses valeurs aux points de discontinuité, dont l'ensemble est au plus dénombrable. En outre, les valeurs $F(0)$, $F(2\pi)$ ne sont définies que par leur différence: $F(2\pi) - F(0) = 2\pi . u(0)$; à cela près, elles sont arbitraires, à cause de la périodicité en λ de la fonction $P(r, \theta - \lambda)$.

Il est d'ailleurs permis de supposer qu'on ait en tout point de discontinuité

$$F(\theta) = \frac{F(\theta - 0) + F(\theta + 0)}{2} \tag{9}$$

[on exprime parfois ce fait, en disant que le point θ est un point régulier] et de même que les valeurs $F(0)$, $F(2\pi)$, tout en maintenant leur différence fixe, soient choisies de manière que l'on ait

$$F(0) + F(2\pi) = F(+0) + F(2\pi - 0). \tag{10}$$

Alors on aura dans ce cas également la relation (8), pour toutes les valeurs de θ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, les extrémités y comprises.

On conclut de VI;

VII. *Pour qu'une série* (4) *soit la série de Fourier d'une fonction à variation bornée, il faut et il suffit qu'on ait*

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n r^n (b_n \cos n\lambda - a_n \sin n\lambda) \right| d\lambda \leqslant N,$$

N étant une constante, indépendante de r, $0 \leqslant r < 1$ [9].

4. Soit $\{u_n(r, \theta)\}$ une suite de fonctions harmoniques et régulières dans K. Nous supposerons dans la suite que les fonctions u_n soient assujetties à quelques restrictions *a priori* [v. ci-dessous (A), (B),...], et dans cette hypothèse nous nous proposons d'établir les conditions, portant sur C, et qui sont en même temps nécessaires et suffisantes, pour que la suite en question converge dans K vers une fonction harmonique.

[9]) Un critère de même forme, mais concernant les sommes moyennes de Fejér, a été donné par M. W. H. Young [*Proc. of the Lond. R. S.* (A) 88, 1913; p. 572].

S'il existe, pour les fonctions u_n, les valeurs limites sur C

$$u_n(1, \theta) = \lim_{r \to 1} u_n(r, \theta)$$

[à moins presque partout], on pourrait essayer de rattacher les conditions, dont il s'agit, à la convergence de la suite $\{u_n(1, \theta)\}$ pour $n \to \infty$ [également presque partout]. Une pareille supposition suffit bien pour notre but, si nous sommes, p. ex., dans le cas simple, où les fonctions u_n se trouvent uniformément bornées. Or, même dans ce cas, la condition énoncée n'est nulle part nécessaire, ainsi que le montre l'exemple trivial: $u_n = r^n \cos n\theta$. Dans les cas plus généraux, elle peut cesser aussi d'être suffisante [10]).

Pour faciliter notre étude, nous le faisons précéder par quelques considérations. Soit $u(r, \theta)$ une fonction harmonique et régulière dans K; supposons

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \textit{qu'elle soit continue en } \theta \textit{ uniformément pour toutes les va-} \\ \textit{leurs de } r < 1. \end{array} \right.$

Il en résulte que l'on ait, quels que soient θ et θ',

$$-N \leqslant u(r, \theta) - u(r, \theta') \leqslant N,$$

N étant une constante. Effectuant, dans cette relation, l'intégration par rapport à θ', de 0 à 2π, on obtiendra:

$$-N \leqslant u(r, \theta) - u(0) \leqslant N. \tag{11}$$

Donc, la fonction $u(r, \theta)$ est bornée dans K et, par suite la limite

$$u(1, \theta) = \lim_{r \to 1} u(r, \theta) \tag{12}$$

existe presque partout sur C; soit θ_0 un des points, où elle existe. En appliquant à la fonction $u'_\theta(r, \theta)$ [qui est également harmonique et régulière dans K] le théorème IV et la relation (8), on verra que la différence

$$u(r, \theta) - u(r, \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} u'_\theta(r, \theta)\, d\theta$$

[10]) Cette circonstance se trouve possible, si l'on part des hypothèses (C), (D); inversement, dans l'hypothèse (E), le théorème de M. Vitali, cité plus haut [3]), nous apprend que la convergence de la suite $\{u_n(1, \theta)\}$ suffit pour que la suite $\{u_n(r, \theta)\}$ converge dans K, vers une fonction harmonique.

tend vers une limite déterminée, lorsque $r \to 1$, quel que soit θ; il en sera de même pour $u(r, \theta)$. En outre, $u(r, \theta)$ tendant vers $u(1, \theta)$ uniformément pour toutes les valeurs de θ, la fonction $u(r, \theta)$ est continue dans le domaine fermé $K + C$.

Si, au lieu de (a), on suppose que

(b) *la variation totale V_r de $u(r, \theta)$ par rapport à θ dans l'intervale $(0, 2\pi)$, r étant fixe, reste bornée uniformément pour toutes les valeurs de $r < 1$:*

$$V_r = \int_0^{2\pi} |u'_\theta(r, \theta)|\, d\theta \leqslant N,$$

on verra par un raisonnement identique au précédent, avec la référence au théorème VI et à la remarque II du n° 3, que la limite (12) cette fois aussi existe partout. La fonction $u(1, \theta)$ dans le cas présent est à variation bornée; tous ses points de discontinuité [s'ils existent] sont réguliers.

Ces préliminaires posés, voici notre première hypothèse, relative aux fonctions u_n:

(A) *les fonctions $u_n(r, \theta)$ sont également continues en θ pour toutes les valeurs de $r < 1$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$*

Pour une pareille suite la question, proposée au début, se résout par le théorème suivant:

VIII. *Dans l'hypothèse* (A), *pour que la suite $\{u_n(r, \theta)\}$ soit convergente dans K, il faut et il suffit qu'il existe une limite déterminée et finie $\lim\limits_{n \to \infty} u_n(1, \theta) = u(1, \theta)$, pour toutes les valeurs de θ.*

Cette condition étant remplie, la fonction $u(1, \theta)$ sera continue d'elle-même, et la fonction-limite

$$u(r, \theta) = \lim_{n \to \infty} u_n(r, \theta) \tag{13}$$

peut être répresentée sous la forme de l'intégrale de Poisson

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \lambda)\, P r, (\theta - \lambda)\, d\lambda. \tag{14}$$

Démonstration. Supposons que la suite $\{u_n\}$ soit convergente dans K. Il résulte de (A) qu'on a, pareillement à (11),

$$-N \leqslant u_n(r, \theta) - u_n(0) \leqslant N,$$

où N est une constante, indépendante de n et du point (r, θ); la suite $\{u_n(0)\}$ étant convergente, on en tire que les fonctions $u_n(r, \theta)$ sont uniformément bornées dans $K + C$. Par conséquent, la fonction (13) sera forcément harmonique dans K et continue dans $K + C$, car elle satisfait évidemment à la condition (a). Il est permis d'admettre que la fonction (13) s'annule identiquement; il nous faut démontrer alors que la fonction $u_n(1, \theta)$ tend partout également vers zéro.

S'il en était autrement, pour une valeur θ_0 de θ, on pourrait supposer que la suite $\{u_n(1, \theta)\}$ converge partout vers la fonction-limite $u(1, \theta)$, dont la valeur $u(1, \theta_0)$ est différente de zéro. En effet, les fonctions $u_n(1, \theta)$ étant également continues, vu (A), et bornées dans leur ensemble, cette hypothèse serait satisfaite certainement, sinon pour la suite $\{u_n(1, \theta)\}$, à moins pour une suite partielle [d'après le théorème de Ascoli-Arzelà]. Alors, en faisant n croître à l'infini dans la formule

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(1, \lambda)\, P(r, \theta - \lambda)\, d\lambda, \tag{15}$$

on aurait à la limite

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \lambda)\, P(r, \theta - \lambda)\, d\lambda. \tag{16}$$

Or, cela est évidemment impossible, la fonction $u(1, \lambda)$ étant continue et différente de zéro pour $\lambda = \theta_0$.

Réciproquement, si la suite $\{u_n(1, \lambda)\}$ est convergente, il résulte de (A) que les fonctions $u_n(1, \lambda)$ sont uniformément bornées, ce qui justifie le passage à la limite sous le signe intégrale dans la formule (14).

Si nous remplaçons l'hypothèse (A) par la suivante:

(B) *les variations totales $V_{r,n}$ des fonctions $u_n(r, \theta)$ par rapport à θ, r et n étant fixes, sont bornées dans leur ensemble:*

$$V_{r,n} = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} u_n(r, \theta) \right| d\theta \leqslant N,$$

où N est une constante, indépendante de r et de n,

nous aurons le théorème:

IX. *Dans l'hypothèse* (B), *pour que la suite* $\{u_n(r, \theta)\}$ *soit convergente dans* K, *il faut et il suffit que la suite* $\{u_n(1, \theta)\}$ *converge en mesure* [11]) *dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$ *vers une fonction* $u(1, \theta)$.

Si cette condition est remplie, on pourra choisir la fonction $u(1,\theta)$, *telle qu'elle soit à variation bornée et n'ait que des points réguliers de discontinuité; alors la fonction* (13) *s'exprimera par la formule* (14) *et l'on aura partout* (12).

Démonstration. En supposant la suite $\{u_n(r, \theta)\}$ convergente dans K, on retrouve ce résultat que les fonctions $u_n(r, \theta)$ sont uniformément bornées dans $K+C$. Il vient, comme ci-dessus, que la fonction (13) sera harmonique; en outre, on voit qu'elle satisfait bien à la condition (b). Si nous supposerons, pour plus de simplicité, que la fonction-limite u soit identiquement nulle, nous aurons à prouver que la suite $\{u_n(1, \theta)\}$ tend en mesure vers zéro.

Supposons, par impossible, qu'il n'en soit pas ainsi. Alors il existe deux nombres positifs ε, δ, tels que $|u_n(1, \theta)| \geqslant \varepsilon$ dans les points, dont l'ensemble, pour une infinité de valeurs de n, a une mesure $\geqslant \delta$. En passant au besoin à une suite partielle, on pourra réaliser cette hypothèse pour toutes les fonctions de la suite. Admettons de plus que la suite $\{u_n(1, \theta)\}$ converge partout dans le sens ordinaire vers une fonction $u(1, \theta)$. Ceci ne restreint pas la généralité, car il résulte de (B) que les fonctions $u_n(1, \theta)$, ainsi que leurs variations totales, sont bornées dans leur ensemble, de facon que, en vertu du principe du choix, cité [8]), il ne faut que raisonner sur une suite partielle, convenablement choisie derechef, pour être précisément dans le cas mentionné. Enfin, par un passage à la limite dans la formule (15), on obtiendra la même relation (16) qu'auparavant, contrairement à ce fait évident que la fonction $u(1, \theta)$ n'est point équivalente à zéro. Cela prouve que la condition énoncée est bien nécessaire.

A présent, supposons que la condition soit vérifiée. Alors, les fonctions $u_n(1, \theta)$ sont bornées dans leur ensemble, car, dans le cas contraire [leurs variations étant uniformément bornées, vu (B)], on pourrait en extraire une suite partielle tendant uniformément vers l'infini, ce qui contredirait notre supposition. Cela étant, passons à la limite dans la formule (15), ce qui peut se faire dans le cas présent également sous le signe intégrale; nous obtiendrons la formule requise (14).

[11]) *Voir:* F. Riesz, C. R. 148, 1909; pp. 1303—1305.

Remarque. Il est à signaler que la convergence en mesure dans l'énoncé précédent est indispensable; cela veut dire qu'il n'est pas possible, en général, de la remplacer par la condition plus naturelle de convergence dans le sens ordinaire [à moins presque partout].

5. Nous allons nous occuper des suites satisfaisant à une de deux hypothèses suivantes, relatives aux intégrales

$$\int_0^\theta u_n(r, \lambda)\, d\lambda \tag{17}$$

et à leurs variations totales:

(C) *les intégrales* (17), *comme fonctions de* θ, *sont également continues pour toutes les valeurs de* $r<1$ *et de* $n=1,2,3,\ldots$;

où bien:

(D) *on a, quels que soient* r *et* n, *l'inégalité*

$$\int_0^{2\pi} |u_n(r, \lambda)|\, d\lambda \leqslant N,$$

N étant une constante, indépendante de r et de n.

En d'autres termes, nous supposons que les conditions du théorème **IV**, resp., **VI** soient vérifiées uniformément pour toutes les fonctions u_n. Il va sans dire que, dans ces hypothèses, les fonctions $u_n(r, \theta)$ sont représentables par la formule de Poisson généralisée

$$u_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r, \theta-\lambda)\, dF_n(\lambda), \tag{18}$$

les fonctions $F_n(\lambda)$ étant continues, resp., à variation bornée. Pour préciser les constantes additives, y comprises implicitement, nous allons normer ces fonctions-ci, en supposant toujours, suivant les cas,

$$F_n(0)=0, \tag{19}$$

resp.,

$$\int_0^{2\pi} F_n(\lambda)\, d\lambda = 0. \tag{19*}$$

Ce mode de normalisation est d'une grande importance pour la suite.

Dans la première hypothèse, on aura, vu (8), quels que soient θ_0, θ_1,

$$\lim_{r\to 1}\int_{\theta_0}^{\theta_1} u_n(r,\theta)\,d\theta = F_n(\theta_1) - F_n(\theta_0); \tag{8*}$$

il en sera de même de la seconde, si l'on supposera de plus dans ce cas qu'on ait

$$\left\{\begin{aligned} F_n(\theta) &= \frac{F_n(\theta-0)+F_n(\theta+0)}{2};\\ F_n(0)+F_n(2\pi) &= F_n(+0)+F_n(2\pi-0). \end{aligned}\right. \tag{20}$$

De l'hypothèse (C), à l'aide de la relation (8*), on déduit que les fonctions $F_n(\lambda)$ sont aussi également continues, en sorte que, vu (19), elles sont bornées dans leur ensemble:

$$|F_n(\theta)| \leqslant N. \qquad [N = \text{const.}] \tag{21}$$

De même, l'hypothèse (D) entraîne cette conséquence que les fonctions $F_n(\lambda)$ ont dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ les variations totales, uniformément bornées par le nombre N, et on aura *a fortiori*, quelles que soient les valeurs λ et θ,

$$-N \leqslant F_n(\theta) - F_n(\lambda) \leqslant N.$$

Si nous effectuons l'intégration par rapport à λ, θ étant fixe, nous retrouvons, vu (19*), l'inégalité (21).

En intégrant par parties, on écrira la formule (18) sous la forme:

$$\begin{aligned} u_n(r,\theta) &= \frac{F_n(2\pi)-F_n(0)}{2\pi}P(r,\theta) + \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta}P(r,\theta-\lambda)\,d\lambda \end{aligned} \tag{22}$$

et on verra, en tenant compte de (21), que les fonctions $u_n(r,\theta)$ sont bornées dans leur ensemble dans chacun domain fermé, contenu dans K. Donc, la fonction-limite (13), pourvu qu'elle existe, sera nécessairement harmonique et régulière dans K.

Ces remarques faites, énonçons maintenant les théorèmes relatifs aux cas considérés.

X. *Dans l'hypothèse* (C), *pour que la suite* $\{u_n(r,\theta)\}$ *soit convergente dans* K, *il faut et il suffit que les fonctions* $F_n(\lambda)$ *dans* (18), *normées conformément à* (19), *tendent pour* $n\to\infty$ *vers une fonction-limite déterminée* $F(\lambda)$.

Si cette condition est vérifiée, la fonction-limite (13) *se présentera sous forme d'une intégrale de Poisson généralisée* (5), *où* $F(\lambda)$ *est précisément la fonction, dont il s'agissait ci-dessus et qui sera continue d'elle-même.*

XI. *Dans l'hypothèse* (D), *les conditions nécessaires et suffisantes pour que la suite* $\{u_n(r,\theta)\}$ *soit convergente dans* K, *sont 1) que les fonctions* $F_n(\lambda)$ *dans* (18), *normées conformément à* (19*), *convergent en mesure dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$ *vers une fonction-limite* $F(\lambda)$ *et 2) qu'il existe une limite déterminée et finie:* $\lim\limits_{n\to\infty}[F_n(2\pi)-F_n(0)] = c$.

Ces conditions étant satisfaites, on pourra choisir la fonction $F(\lambda)$, *limite en mesure de la suite* $\{F_n(\lambda)\}$, *de manière qu'elle soit à variation bornée et vérifie les conditions* (9), (10), *ainsi que la suivante:* $F(2\pi) - F(0) = c$. *Avec cette fonction-ci, la limite cherchée* (13) *s'exprimera par la formule* (5).

[Il est à remarquer qu'on peut assujettir ici les fonctions $F_n(\lambda)$ aux conditions complémentaires (20), ce qui ne restreint point la généralité].

Démonstration. Les preuves de ces deux propositions étant tout-à-fait analogues, nous préférons les développer ensemble.

Les conditions sont nécessaires. Ceci est évident pour la condition 2) du second théorème, car on a: $F_n(2\pi) - F_n(0) = 2\pi . u_n(0)$; nous pouvons donc la laisser de côté dans la suite. Admettons que la suite $\{u_n(r,\theta)\}$ converge dans K vers une fonction-limite $u(r,\theta)$; celle-ci satisfait évidemment à la condition du théorème IV, resp., VI, en sorte que, la fonction u est représentable par la formule (5), avec une fonction $F(\lambda)$ continue, resp., à variation bornée. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que la fonction u soit identiquement nulle et que l'on ait de plus: $u_n(0) = 0$. Alors on a $F_n(2\pi) = F_n(0)$, et il suit de (22): $u_n(r,\theta) = \dfrac{\partial}{\partial\theta}U_n(r,\theta)$, où l'on a posé

$$U_n(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(\lambda)\,P(r,\theta-\lambda)\,d\lambda.$$

Remarquons que de l'hypothèse (C), resp., (D), vu l'identité

$$U_n(r, \theta) - U_n(r, 0) = \int_0^\theta u_n(r, \lambda)\, d\lambda, \tag{23}$$

il résulte que les fonctions harmoniques $U_n(r, \theta)$ satisfont bien à l'hypothèse (A), resp. (B) du n⁰ précédent. Si l'on était parvenu à démontrer que la suite $\{U_n(r, \theta)\}$ converge dans K vers zéro, on en pourrait conclure, d'après le théorème VIII, resp., IX, que les fonctions $F_n(\theta) = U_n(1, \theta)$ également tendent, resp. tendent en mesure, vers zéro. Or, la suite $\{u_n(r, \theta)\}$ convergeant, par hypothèse, vers zéro, il en sera de même, vu (23), pour la suite $\{U_n(r, \theta) - U_n(r, 0)\}$. Donc, tout revient à montrer que $U_n(r, 0)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quel que soit $r < 1$.

Supposons qu'inversement il n'en soit pas ainsi, pour une valeur r_0 de r, $0 < r_0 < 1$. Alors on pourra faire n tendre vers l'infini de manière que $U_n(r, \theta)$ converge dans K vers une limite $U(r, \theta)$, telle que la valeur $U(r_0, 0)$ soit différente de zéro. La fonction harmonique $U(r, \theta)$ aura donc une valeur constante $c = U(r_0, 0)$ le long de la circonférence $r = r_0$, et par suite partout dans K. D'après le théorème VIII, resp. IX, la fonction $F_n(\lambda)$ tendra forcément vers la constante $c \neq 0$ [dans le sens ordinaire, resp. en mesure]. Or, ceci contredit à la condition (19), resp. (19*).

Les conditions sont s u f f i s a n t e s. Cela résulte du passage à la limite dans la formule (22).

Remarque I. Si chacune des fonctions $u_n(r, \theta)$, dont il s'agissait dans le théorème X, peut se présenter sous forme d'une intégrale de P o i s s o n (15), on peut poser dans la formule (18)

$$F_n(\theta) = \int_0^\theta u_n(1, \lambda)\, d\lambda. \tag{24}$$

En particulier, cette supposition est comprise, d'après le théorème I, dans l'hypothèse suivante:

(E) *les intégrales* (17), *comme fonctions de* θ, *sont absolument continues uniformément pour toutes les valeurs de* $r < 1$ *et de* $n = 1, 2, 3, \ldots$

On sait déjà que l'hypothèse de cette espèce peut être exprimée par une seule inégalité [v. la remarque du n⁰ 2].

Ainsi, comme un cas particulier du théorème X, on peut énoncer le suivant:

XII. *Dans l'hypothèse* (E), *pour que la suite* $\{u_n(r, \theta)\}$ *soit convergente dans* K, *il faut et il suffit que les intégrales* (24) *tendent, lorsque* $n \to \infty$, *vers une fonction-limite* $F(\theta)$.

Si cette condition est remplie, la fonction $F(\theta)$ *sera [l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable* $u(1, \lambda)$, *et avec celle-ci on pourra exprimer la fonction-limite* (13) *par la formule de P o i s s o n* (14).

Remarque II. On rencontre les circonstances bien différentes dans le cas du théorème XI. Nous avons y supposé que les fonctions $F_n(\lambda)$ soient n o r m é e s par des conditions (19*). Même si les fonctions $u_n(r, \theta)$ sont représentables par la formule (15), il ne convient pas dans le cas actuel de définir les fonctions $F_n(\lambda)$ par les équations (24). Bien au contraire, afin de satisfaire aux conditions (19*), il faut poser

$$F_n(\theta) = \int_0^\theta u_n(1, \lambda)\, d\lambda + c_n, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\theta u_n(1, \lambda)\, d\lambda.$$

Il est aisé à montrer que, sans cette précaution, la convergence de la suite $\{u_n\}$ n'entraîne pas, en général, la convergence en mesure de la suite $\{F_n(\lambda)\}$.

De même, on peut montrer, à l'aide d'un exemple, qu'il n'est pas possible de remplacer, dans l'énoncé XI, la convergence e n m e s u r e par celle dans le sens propre. Cette circonstance ne dépend point du choix des constantes c_n, car les autres constantes c'_n ne sont admissibles que sous la condition que la suite $\{c'_n - c_n\}$ soit convergente [12]).

Cependant, si l'on a: $u_n(r, \theta) \geqslant 0$, la condition 1) du théorème XI peut être simplifiée. Dans ce cas, il vient

$$\int_0^{2\pi} |u_n(r, \lambda)|\, d\lambda = F_n(2\pi) - F_n(0),$$

en sorte que la condition (D) résulte ici de la condition 2) du théorème.

[12]) Nous omettons ici, ainsi que dans le n⁰ précédent [v. la remarque], la construction des exemples pathologiques qui n'offre aucune difficulté. D'ailleurs,

XIII. *Pour que la suite $\{u_n(r,\theta)\}$ de fonctions harmoniques positives soit convergente dans K, il faut et il suffit 1) que les fonctions $F_n(\lambda)$ dans* (18), *normées conformément à* (19*), *convergent dans le sens ordinaire vers une fonction-limite $F(\lambda)$ partout dans l'intervalle $(0, 2\pi)$, abstraction faite au plus d'un ensemble dénombrable de points, 2) qu'il existe une limite déterminée et finie: $\lim\limits_{n\to\infty}[F_n(2\pi)-F_n(0)]=c$.*

Si les conditions ci-dessus sont remplies et que l'on définit la fonction $F(\lambda)$ aux points exceptionnels [y compris $0, 2\pi$] de façon qu'elle soit non-décroissante et que l'on ait: $F(2\pi)-F(0)=c$, alors la fonction-limite (13) *sera exprimée par la formule* (5).

Démonstration. Il nous faut de prouver seulement que la condition 1) est nécessaire. Supposons donc que la suite $\{u_n\}$ converge vers la fonction non-négative. Alors, en vertu du théorème XI, la fonction $F_n(\lambda)$ tendra en mesure vers une fonction $F(\lambda)$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer les fonctions $F_n(\lambda)$ non-décroissantes; de même, on peut choisir la fonction $F(\lambda)$ de manière qu'elle ne décroît jamais. Soit λ_0 un point de continuité $[0<\lambda_0<2\pi]$ pour cette fonction-ci. Je dis qu'on aura forcément

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\lambda_0)=F(\lambda_0).$$

En effet, s'il en était autrement, on pourrait [d'après le principe, cité [8]] extraire de la suite $\{F_n(\lambda)\}$ une suite partielle, convergeant vers une limite déterminée $F^*(\lambda)$, quel que soit λ, et cela de la sorte qu'on ait, p. e., $F^*(\lambda_0)>F(\lambda_0)$. Or, dans ce cas l'inégalité $F^*(\lambda)>F(\lambda)$ serait vérifiée dans un certain intervalle (λ_0, λ_0+h) $[h>0]$ tout entier, contrairement à l'équivalence nécessaire des fonctions F, F^*.

6. Nous passons à l'étude des fonctions analytiques d'une variable complexe z, holomorphes dans K. Dans ce n° nous nous proposons de faire quelques remarques à propos des résultats connus, relatifs à la réprésentation d'une telle fonction par la formule de Poisson

$$f(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\lambda})\, P(r,\theta-\lambda)\, d\lambda \qquad [r<1] \tag{25}$$

on peut emprunter les exemples de cette espèce de ceux du n° 7, concernant les fonctions analytiques d'une variable complexe.

ou bien par celle de Cauchy

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}, \qquad [|z|<1] \tag{26}$$

les intégrales étant prises dans le sens de Lebesgue. La formule (26) sera suivie toujours, sans qu'il faudra le dire explicitement, de l'hypothèse complémentaire que l'on ait presque partout sur la circonférence $C(|t|=1)$:

$$\lim_{z\to t} f(z)=f(t), \qquad [|z|<1] \tag{26*}$$

$z=re^{i\theta}$ tendant vers $t=e^{i\lambda}$ le long d'un chemin quelconque non-tangent à C. Dans le cas (25) cette hypothèse est inutile parce qu'elle résulte de la formule d'elle-même.

On sait que l'intégrale (25), quelle que soit la fonction sommable

$$f(e^{i\lambda})=\varphi(\lambda)+i\psi(\lambda), \tag{27}$$

représente dans K une fonction de la variable complexe $z=re^{i\theta}$, satisfaisant à la condition (26*); or, cette fonction n'est pas toujours holomorphe. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les séries trigonométriques

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \quad \frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n'\cos n\theta+b_n'\sin n\theta),$$

présentant la partie réelle, resp. imaginaire de l'intégrale (25), soient conjuguées, c'est-à-dire, que l'on ait

$$a_n'=-b_n, \quad b_n'=+a_n. \qquad [n=1,2,3,\ldots] \tag{28}$$

Remarquons que a_n, b_n et a_n', b_n' sont ici les constantes de Fourier de la fonction réelle $\varphi(\lambda)$, resp. $\psi(\lambda)$ [v. (27)].

Quant à la formule (26), elle exprime toujours une fonction de z, holomorphe dans K. Or, cette fois-ci, il se présente la question, si la condition (26*) est vérifiée. On sait qu'en général tel n'est pas le cas

Considérons maintenant l'expression

$$W=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z^*}, \tag{29}$$

où l'on a posé

$$z = re^{\theta i}, \quad z^* = \frac{1}{r} e^{i\theta} = \frac{z}{|z|^2}.$$

En partant de l'identité

$$\frac{e^{i\lambda}}{e^{i\lambda} - re^{i\theta}} - \frac{e^{i\lambda}}{e^{i\lambda} - \frac{1}{r} e^{i\theta}} = P(r, \theta - \lambda),$$

on peut mettre W sous forme de l'intégrale de Poisson [13]):

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\lambda})\, P(r, \theta - \lambda)\, d\lambda. \tag{30}$$

Développons ensuite la seconde intégrale dans l'expression (29) suivant les puissances entières et négatives de z^*, en supposant $|z^*| > 1$. Il viendra

$$-\frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{t - z^*} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{z^{*n}}, \tag{31}$$

où les coefficients C_n, d'après le calcul facile, s'exprimeront ainsi [avec les notations antérieures]:

$$C_n = \frac{1}{\pi i} \int_C f(t)\, t^{n-1}\, dt = (a_n - b_n') + i(b_n + a_n'). \tag{32}$$

Cela étant, supposons que la fonction (26) satisfasse à la condition (26*); comme il en est de même de l'expression (30) aussi, par la propriété connue de l'intégrale de Poisson, on conclut immédiatement de (29) que l'on a

$$\lim_{z^* \to t_1} \int \frac{f(t)\, dt}{t - z^*} = 0 \qquad [|t_1| = 1,\ |z^*| > 1]$$

presque partout sur C. D'après le théorème fondamental d'unicité des fonctions analytiques [14]), il en résulte qu'on a dans ce cas

[13]) Cp. p. ex. Hurwitz-Courant, *Funktionentheorie* (1925), p. 299.

[14]) Cet important théorème peut être énoncé ainsi:

Si la fonction analytique $f(z)$, holomorphe à l'intérieur du cercle, tend vers des valeurs déterminées sur un ensemble $\mathfrak{M}$, mes $\mathfrak{M} > 0$, de la circonférence, suivant les chemins non-tangents, cette fonction est unique.

identiquement

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)\, dt}{t - z^*} = 0 \qquad [\text{pour } |z^*| > 1].$$

Alors, on retrouve, vu (31) et (32), les relations (28). Réciproquement, si ces relations sont vérifiées, l'égalité précédente l'est aussi et l'intégrale de Cauchy, vu (29) et (30), se trouve identique à celle de Poisson, ce qui implique à son tour la relation (26*) [15]).

Nous tirons également de ce qui précède la proposition suivante:

XIV. *Si la fonction $f(z)$, holomorphe pour $|z| < 1$, est exprimable par la formule de Poisson, on aura également celle de Cauchy, et vice versa.*

Les conditions (28) concernent la circonférence C; cherchons maintenant les conditions, portant sur K, nécessaires et suffisantes

---

L'extension à l'extérieur du cercle est évidente.

Ce sont MM. F. et M. Riesz qui avaient démontré cette proposition pour la première fois, mais moyennant quelques hypothèses restrictives [cf: *Über die Randwerthe einer analytischen Funktion*, C. R. du IV Congrès des Math. Scandin. 1916, p. 32; v. aussi: P. Fatou, *Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière*, Bull. des Sc. Math. (2) 45, 1921; pp. 68—69 et F. Riesz, *Sur les suites des fonctions analytiques*, Acta Lit. ac Sc. R. Univers. hungaricae Franc.-Josephinae, Sect. Sc. Math. 1, 1923; pp. 88, 92]. Dans sa forme générale, le théorème est du à MM. N. Lusin et I. Privaloff [cf: I. Privaloff, *Intégrale de Cauchy*, thèse russe, Bull. de l'Univers. à Saratow. 1918, p. 43; v. aussi l'article récent de MM. Lusin et Privaloff, *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques*, Annal de l'Éc. Norm. Sup. (3) 41, 1925, p. 164].

[15]) A propos de toutes ces considérations on consultera: W. Golubeff, *Les fonctions analytiques uniformes dont les points singuliers forment un ensemble parfait*, thèse russe [Moscou 1916], pp. 33—37, 50—51; I. Privaloff, thèse citée [14]), p: 65, ou mémoire, *Sur certaines propriétés métriques des fonctions analytiques* [*Jour. de l'Éc. Polyt.* (11) 24, 1924], p. 106. On trouvera des autres indications bibliographiques dans l'article récent de M. L. Schlesinger, *Über Randwerte von Funktionen einer komplexen Veränderlichen* [Journ. f. die Mathem. 158, 1927; pp. 1—5].

Faisons encore une remarque: si la fonction (26) satisfait à la condition (26*), l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\bar{f}(t)\, dt}{t - z},$$

où $\bar{f}(t) = \varphi(t) - i\psi(t)$, aura nécessairement une valeur constante pour $|z| < 1$, et vice versa. Ce n'est qu'une autre forme des conditions (28).

pour que la fonction donnée $f(z)$, holomorphe dans K, puisse être représentée par la formule de Cauchy ou, ce qui est la même chose [d'après XIV], par celle de Poisson. À cet effet, séparons dans la formule (25) le réel de l'imaginaire; si l'on pose: $f(re^{i\theta}) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ et que l'on applique le théorème I aux fonctions u, v séparément, on verra que les conditions cherchées sont les suivantes: il faut et il suffit que la continuité absolue en θ des intégrales

$$\int_0^\theta u(r,\lambda)\,d\lambda, \quad \int_0^\theta v(r,\lambda)\,d\lambda$$

ou, ce qui revient au même, de l'intégrale unique

$$\int_0^\theta |f(re^{i\lambda})|\,d\lambda, \tag{33}$$

soit uniforme pour toutes les valeurs de $r<1$ [15a]). Or, on doit

[15a]) M. Evans, dans sa monographie citée, a affirmé [p. 66, la première patie du th. 3] que cette condition sera encore nécessaire pour la validité de la formule (26), sans faire mention de la condition complementaire (26*). Or, dans cette forme la proposition est inexacte, ainsi que le montre l'exemple suivant. Il est connu que des deux séries conjuguées

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$$

seulement la première est la série de Fourier d'une fonction sommable, $\phi(\lambda)$ [cf., p. e., E. W. Hobson, *The theory of functions of a real variable*, Vol. II, 1926, pp. 615, 618]. Donc, la partie réelle $u(r,\theta)$ de la fonction

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{\log n} \qquad [|z|<1]$$

sera bien exprimable par la formule de Poisson et, inversement, ce n'est pas le cas pour la partie imaginaire $v(r,\theta)$. Alors, du lemme de M. Evans [p. 65, v. (14)] il résulte que cette fonction $f(z)$ peut être mise sous forme d'une intégrale (26), avec une fonction particulière sommable

$$f(e^{i\lambda}) = 2\phi(\lambda) - u(0) + iv(0),$$

et en même temps la condition, dont il agissait, évidemment n'est par remplie. On peut conclure de là de plus que la conséquence, tirée par M. Evans de son théorème, dans l'Exercice 6, est également incorrecte. La preuve de l'affirmation critiquée est omise par l'auteur; la source de sa conclusion vicieuse, à ce qu'il paraît, est le passage inverse (en général, illégitime) de la formule (16) de M. Evans aux relations (14) et (15) [pp. 65, 66].

La seconde partie du théorème cité contient la proposition connue que nous venons de démontrer: les relations (28) sont nécessaires et suffisantes pour que la fonction $f(z)$, donnée par la formule (26), satisfasse à la condition (26*). Or, la démonstration de M. Evans maintenant se trouve incomplète, cette fois aussi en tant qu'elle concerne la nécessité de la condition énoncée. Notamment, l'application [p. 67] de son lemme paraît être contestable, parce que l'on ne sait pas *a priori*, si la partie réelle, resp. imaginaire, de la fonction considérée $w(z)$ satisfait à la condition (*ii*) de M. Evans.

En résumé, la démonstration de M. Evans tombe en défaut toujours dans les cas, où il part de la formule (26), comme donnée. Il est intéressant de remarquer que c'est précisément dans ce point où il nous a fallu utiliser le théorème d'unicité des fonctions analytiques [et il en est ainsi dans tous les autres modes de démonstration que j'ai pu imaginer]. Il serait désirable de savoir si l'on peut de s'en passer ici.

Enfin, je dois signaler que les remarques critiques qui précèdent m'ont été suggérées par M. M. S. Saks et A. Zygmund qui avaient bien voulu me communiquer quelques doutes, éveillées par le raisonnement de M. Evans.

à M. F. Riesz [16]) un résultat bien remarquable que la seule inégalité

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\lambda})|\,d\lambda \leqslant N, \tag{34}$$

où N désigne une constante, indépendante de r, déjà suffit pour que les formules en question soient valables. Donc, de cette inégalité résulte d'elle-même la continuité absolue en θ uniforme pour $r<1$ de l'intégrale (33). Ce fait n'a pas d'analogue pour les fonctions harmoniques.

La condition (34) est aussi nécessaire. Cela résulte facilement, sinon de la formule de Cauchy, à moins de celle de Poisson, car on en tire immédiatement

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \int_0^{2\pi} |f(e^{i\lambda})|\,d\lambda.$$

En complétant par cette remarque le résultat de M. Riesz, on peut lui donner la forme définitive suivante:

[16]) F. Riesz, *Über die Randwerte eniner analytischen Funktion* [*Math. Zeitschr.* 18, 1923, p. 94].

XV. *Pour que la fonction $f(z)$, holomorphe dans K, soit représentable par la formule de* P o i s s o n *ou bien par celle de* C a u c h y, *il faut et il suffit que l'on ait l'inégalité* (34).

La formule de P o i s s o n généralisée

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} P(r, \theta - \lambda)\, dF(\lambda), \tag{35}$$

où l'intégrale est prise dans le sens de S t i e l t j e s et $F(\lambda)$ est une fonction c o n t i n u e complexe du paramètre réel λ, peut également rendre des services. Les conditions pour que cette formule ait lieu peuvent être calquées du théorème IV, sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point.

Tout au contraire, l'énoncé cité de M. R i e s z montre qu'il est inutile de considérer la représentation (35), en y supposant la fonction $F(\lambda)$ à variation bornée. En effet, admettons que cette relation soit vérifiée avec une telle fonction; si l'on applique le théorème VI séparément aux parties réelle et imaginaire de la fonction $f(re^{i\theta})$, on retrouve l'inégalité (34) qui à son tour implique, dans le cas présent, la formule de P o i s s o n au sens propre.

Enfin, si la partie réelle de la fonction holomorphe $f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ elle seule peut s'exprimer par l'intégrale de P o i s s o n, dans le sens propre ou généralisé, on pourra mettre la fonction $f(z)$ sous forme:

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(1, \lambda)\, \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\, d\lambda, \tag{36}$$

resp.,

$$f(z) = iv(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\, dF(\lambda)\, ^{17}), \tag{37}$$

$F(\lambda)$ étant une fonction réelle continue, resp. à variation bornée.

7. Soit maintenant $\{f_n(z)\}$ une suite de fonctions holomorphes dans K. Nous allons examiner les conditions qu'il faut imposer aux fonctions $f_n(z)$, soumises *a priori* à quelques hypothèses, pour

[17]) Dans le cas, où $u(r, \theta)$ est positive, en sorte que $F(\lambda)$ va en croissant, cette formule se rencontre chez M. F. R i e s z [*Annal. de l'Éc. Norm. Sup.* (3) 28, 1911; p. 60] et chez M. G. H e r g l o t z [*Berichte d. k. sächs. Ges. d. Wiss.* M.—P, Kl. 63, 1911; p. 511].

que cette suite soit convergente dans K vers une fonction holomorphe. Dans cet étude nous avons à appliquer systématiquement les résultats des nn° 4 et 5.

Tout d'abord, posant

$$f_n(re^{i\theta}) = u_n(r, \theta) + iv_n(r, \theta),$$

admettons que les fonctions $u_n(r, \theta)$ vérifient une des hypothèses (A), (B), (E) ou (C), (D) [nn° 4, 5]. Alors on exprimera les fonctions $f_n(z)$ par des formules, analogues à (36), resp. (37):

$$f_n(z) = iv_n(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_n(1, \lambda)\, \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\, d\lambda$$

ou

$$f_n(z) = iv_n(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\lambda} + z}{e^{i\lambda} - z}\, dF_n(\lambda),$$

et la question proposée sera presque épuisée par les théorèmes VIII, IX, XII, X, XI. D'ailleurs, il faut ajouter aux conditions, y comprises, encore une hypothèse, évidemment nécessaire, qu'il existe une limite déterminée et finie $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(0)$.

En supposant que les suites $\{u_n(r, \theta)\}$, $\{v_n(r, \theta)\}$ toutes les deux satisfassent à une des conditions (A), (B), (C), (D), nous ainsi formons des nouvelles hypothèses (A*), (B*), (C*), (D*), relatives aux fonctions $f_n(re^{i\theta})$. On peut les obtenir de celles-là, en y remplaçant la fonction $u_n(r, \theta)$ par $f_n(re^{i\theta})$. Partant de ces hypothèses, nous appliquerons les théorèmes correspondants, VIII, IX, X, XI, aux suites $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ séparément, ce qui nous donnera les nouveaux théorèmes: VIII*, IX*, X*, XI*. Il est à remarquer que le théorème d'unicité des fonctions analytiques cité [14]), permet y faire un complément important. Notamment, il suffit supposer les conditions portant sur C, satisfaites dans un ensemble partiel $\mathfrak{M}$ de C, mes $\mathfrak{M} > 0$, pour qu'il en sera de même de la circonférence toute entière.

P. e., si l'on suppose que

(B*) { *les variations totales des fonctions $f_n(z)$ le long des circonférences concentriques $|z| = r$ soient uniformément bor-*

(B*) *nées pour toutes les valeurs de r et de n, ce qui revient à l'inégalité*

$$\int_0^{2\pi} |f_n'(re^{i\lambda})|\, d\lambda \leqslant N, \qquad [N = const.]$$

on aura le théorème:

IX*. *Dans l'hypothèse* (B*), *pour que la suite $\{f_n(z)\}$ soit convergente dans K, il faut et il suffit que la suite $\{f_n(e^{i\theta})\}$ soit convergente en mesure sur C. Cette condition, étant satisfaite dans un ensemble partiel $\mathfrak{M}$ de C, mes $\mathfrak{M} > 0$, sera remplie dans C d'elle-même.*

La fonction-limite $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, pourvu qu'elle existe, sera holomorphe dans K et s'exprimera par la formule (25), *où $f(e^{i\theta})$ est une des fonctions-limites en mesure de la suite $\{f_n(e^{i\theta})\}$* [18].

Les théorèmes VIII* et X* peuvent être formulés exactement de la même manière. Quant au théorème XI*, son énoncé admet, par rapport à celui du théorème XI, des simplifications considérables. D'abord, la condition 2), dans le cas présent, n'est point indépendante des autres hypothèses et peut être omise. Outre cela, les recherches de M. F. Riesz, mentionnées au n⁰ précédent, permettent n'employer que la formule de Poisson dans le sens propre. Nous allons donner le théorème en question avec sa démonstration complète.

Admettons donc que,

(D*) *pour toutes les valeurs de r et de n, on ait l'inégalité*

$$\int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\lambda})|\, d\lambda \leqslant N,$$

N étant une constante, indépendante de r et de n.

Alors la condition de convergence d'une telle suite s'énonce ainsi:

XI*. *Dans l'hypothèse* (D*), *pour que la suite $\{F_n(z)\}$ soit convergente dans K, il faut et il suffit que la suite de fonctions*

$$F_n(0) = \int_0^{\theta} f_n(e^{i\lambda})\, d\lambda - \gamma_n, \tag{38}$$

[18]) D'après M. F. Riesz, les fonctions $f_n(e^{i\theta})$ toutes sont absolument continues en θ [loc. cit. [16]), p. 95]; on peut également choisir ici la fonction $f(e^{i\theta})$ de façon qu'elle soit absolument continue.

où l'on a posé

$$\gamma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\theta} f_n(e^{i\lambda})\, d\lambda,$$

soit convergente en mesure sur C. Si cette conditon est remplie dans un ensemble partiel $\mathfrak{M}$ de C, mes $\mathfrak{M} > 0$, elle sera vérifiée sur C d'elle-même.

Parmis les fonctions-limites en mesure de la suite $\{F_n(\theta)\}$, dans le cas de convergence, il existe une fonction [et une seule] absolument continue. Elle sera l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable $f(e^{i\lambda})$ et avec celle-ci on pourra exprimer la fonction-limite $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, nécessairement holomorphe, par la formule (25).

Démonstration. Il suit de l'hypothèse (D*) que chacune des fonctions $f_n(z)$ est représentable par la formule de Poisson (XV). Cela explique la forme des fonctions $F_n(\theta)$ [cp. la remarque II du n⁰ 5]. Alors, il résulte immédiatement du théorème XI que la condition énoncée est nécessaire.

Les considérations qui ont précédé les théorèmes X, XI nous apprennent que les fonctions $f_n(z)$, dont il s'agit à présent, sont bornées dans leur ensemble dans chacun domaine fermé, contenu dans K. Donc, la famille considérée sera bien normale [suivant la terminologie de M. P. Montel]. D'autre part, s'il existe la fonction-limite $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, elle sera forcément holomorphe dans K et s'exprimera également par la formule de Poisson, car l'hypothèse (D*) entraîne évidemment l'inégalité (34). De là, il résulte l'affirmation conclusive du théorème.

Supposons enfin que la suite $\{F_n(\theta)\}$ soit convergente en mesure dans un ensemble $\mathfrak{M}$ sur C, mes $\mathfrak{M} > 0$. Il est à démontrer la convergence de la suite $\{f_n(z)\}$ dans K. Admettons qu'inversement cette suite ne converge pas en un point z_0, $|z_0| < 1$. Alors, en passant à une suite de la forme $\{f_{n'}(z) - f_{n''}(z)\}$, on pourra réaliser les hypothèses suivantes:

1) la suite $\{F_n(\theta)\}$ converge en mesure vers zéro;

2) la suite $\{f_n(z)\}$ tend vers une fonction-limite holomorphe $f(z)$, telle que la valeur $f(z_0)$ est distincte de zéro.

Appliquant le théorème, cité [8]), il est permis de supposer en outre que

3) la suite $\{F_n(\theta)\}$ ou une suite partielle tende partout vers une fonction $F^*(\theta)$ qui est [vu 1)] équivalente à zéro dans $\mathfrak{M}$.

Cette fonction $F^*(\theta)$ sera à variation bornée; de plus, il résulte de ce qui précède, ainsi que du théorème XI et de la remarque II du n° 3, qu'elle diffère tout au plus dans un ensemble dénombrable de points d'une fonction $F(\theta)$, absolument continue et telle que les différences $F(2\pi)-F(0)$ et $F^*(2\pi)-F^*(0)$ se confondent. Désignons par $f(e^{i\lambda})$ une fonction, dont $F(\theta)$ est l'intégrale indéfinie. Partant de la formule de Poisson

$$f_n(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(e^{i\lambda})\,P(r,\theta-\lambda)\,d\lambda,$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi}[F_n(2\pi)-F_n(0)]\,P(r,\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_n(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}P(r,\theta-\lambda)\,d\lambda,$$

on obtiendra par un passage à la limite, la formule (25). Or, la fonction $F^*(\theta)$ étant équivalente à zéro dans $\mathfrak{M}$, la fonction $F(\theta)$, et avec lui $f(e^{i\theta})$, les sont également. La fonction $f(z)$ aura des valeurs-limites sur $\mathfrak{M}$ presque toutes nulles et, d'après le théorème d'unicité, s'annulera identiquement, ce qui est contraire à l'hypothèse 2). Notre proposition est donc établie.

Remarquons qu'il est possible de transformer ce théorème de manière qu'il ne contienne que des intégrales, prises par rapport à une variable complexe. Notamment, au lieu des fonctions (38), on peut considérer les suivantes:

$$F_n^*(t)=\int_1^t f_n(\tau)\,d\tau-\Gamma_n,$$

où l'on a posé

$$\Gamma_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{dt}{t}\int_1^t f_n(\tau)\,d\tau,$$

les intégrales étant prises sur les arcs de la circonférence C. On voit que les fonctions $F_n^*(t)$ sont normées de manière que l'on ait

$$\int_C\frac{F_n^*(t)\,dt}{t}=0.$$

Alors, le transformé du théorème XI* sera un corollaire immédiat du théorème IX*.

Ainsi que les théorèmes IX et XI, ceux dont nous venons citer les énonces, inspirent les questions, s'il est indispensable d'utiliser la convergence en mesure, au lieu de celle dans le sens propre, et de normer les fonctions $F_n(\lambda)$, en y introduisant les constantes additives γ_n. Ces questions s'élèvent ici à plus forte raison qu'auparavant [cp. la rem. du n° 4 et la rem. II du n° 5], car les propriétés spécifiques des fonctions analytiques ont mené déjà à quelques simplifications. Cependant, la réponse dans le cas actuel est également affirmative, ainsi que le montrent les exemples suivants.

Considérons, comme un élément de construction, la fonction

$$\varphi(z,\beta)=(1+\beta)\frac{z+1}{\beta z+1},$$

où β est une constante réelle, $|\beta|<1$. Il est clair que la substitution $w=\varphi(z,\beta)$ transforme le cercle $|z|\leqslant 1$ en un autre cercle $|w-1|\leqslant 1$. La longueur de la circonférence de celui-ci, égale à 2π, s'exprime aussi par l'intégrale $\int_0^{2\pi}|\varphi_z'(e^{i\theta},\beta)|\,d\theta$; il en résulte que l'on ait

$$\int_0^{2\pi}|\varphi_z'(re^{i\theta},\beta)|\,d\theta<2\pi, \tag{39}$$

quel que soit $r<1$. Signalons encore l'inégalité évidente

$$|\varphi(z,\beta)|<(1+\beta)\frac{2}{1-|z|}. \qquad [\text{pour } |z|<1]. \tag{40}$$

Puis, comme on a $\varphi(1,\beta)=2$, il existe à cause de la continuité un angle θ $\left[\text{p. e., une partie aliquote de } \pi,\ \theta=\frac{\pi}{m}\right]$, tel que l'on ait

$$|\varphi(e^{i\lambda},\beta)|>1, \tag{41}$$

pourvu que λ soit compris entre $-\theta$ et θ. Supposons maintenant que le paramètre β parcourt une suite $\{\beta_k\}$ de valeurs, tendant vers -1, et à chaque valeur de β faisons correspondre un système fini des fonctions: $\varphi(z\,.\,e^{-\mu\theta},\beta)$ $[\mu=0,1,\dots,m-1]$. Nous obtiendrons ainsi une suite $\{\varphi_n(z)\}$ de fonctions, holomorphes dans K et jouissant des propriétés que voici: 1) on a, vu (39),

$$\int_0^{2\pi} |\varphi_n'(re^{i\lambda})|\, d\lambda < 2\pi,$$

quels que soient $r < 1$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$ [l'hypothèse (B*)]; 2) si $|z| < 1$, $\varphi_n(z)$ tend vers zéro, avec $\frac{1}{n}$ [en vertu de (40)]; et, enfin, 3) quoique $\varphi_n(e^{i\lambda})$ converge en mesure vers zéro sur C, la convergence dans le sens propre n'aura lieu en aucun point de la circonférence [v. (41)] [19]).

Posons maintenant: $f_n(z) = \varphi_n'(z)$; il est bien évident que la suite $\{f_n(z)\}$ tend vers zéro dans K et satisfait à l'hypothèse (D*), avec $N = 2\pi$. De la définition même on tire:

$$\varphi_n(e^{i\theta}) - \varphi_n(1) = i\int_0^{\theta} f_n(e^{i\lambda})\, e^{i\lambda}\, d\lambda.$$

Effectuons l'intégration par parties, en introduisant les fonctions (38); il viendra

$$\varphi_n(e^{i\theta}) = [\varphi_n(1) + i\gamma_n] + i F_n(\theta)\, e^{i\theta} + \int_0^{\theta} F_n(\lambda)\, e^{i\lambda}\, d\lambda.$$

Les fonctions $F_n(\theta)$ et $\varphi_n(e^{i\theta})$ convergeant en mesure vers zéro, il en résulte que l'intégrale dans le second membre de la relation précédente tend vers zéro dans le sens ordinaire; il en sera de même de la suite numérique $\{\varphi_n(1) + i\gamma_n\}$. Alors, de la propriété 3) des fonctions $\varphi_n(z)$, on conclut que la suite $\{F_n(\theta)\}$ ne converge, dans le sens propre, en aucun point de la circonférence. Donc, la convergence *en mesure* est ici indispensable. D'autre part, $\varphi_n(1)$ ne tendant vers aucune limite déterminée, il en est de même pour γ_n, en sorte que les intégrales dans (38), de son côté, ne tendent

[19]) Je dois cet exemple à une conversation que j'avais eu à ce sujet avec M. V. Smirnoff.

On peut le rapprocher aux exemples analogues de M. F. Hartogs [v. son article récent: *Über die Grenzfunktionen beschränkter Folgen von analytischen Funktionen*, Math. Annalen 98, 1927; pp. 172, 177], dont l'exemple du texte diffère par sa forme explicite, ainsi que par la propriété 1) [ce qui est le plus essentiel pour notre but].

sur C vers aucune fonction-limite, même en mesure. La *normalisation* se trouve également indispensable.

Signalons, pour terminer, qu'on peut énoncer ici un théorème XII*, analogue au théorème XII. Or, l'hypothèse (E*) calquée de (E), se trouve à présent trop restrictive. Il suffit de supposer, p. e., que les intégrales

$$\int_0^{\theta} |f_n(re^{i\lambda})|\, d\lambda$$

soient également continues en θ pour toutes les valeurs de r et de n.

13. I. 1928.