Espaces héréditairement de Baire

by

G. Debs (Paris)

Abstract. We prove that in a regular and first countable topological space X, every closed subset is Baire if and only if X does not contain a closed subset homeomorphic to the space Q of rational numbers.

1. Espaces héréditairement de Baire. Un sous-espace ouvert d'un espace de Baire est évidemment de Baire. D'autre part si X est un espace métrique complet ou un espace localement compact alors tout sous-espace fermé de X est de Baire; mais cette propriété d'héréditarité pour les sous-fermés est fausse en général pour un espace de Baire quelconque.

Nous dirons qu'un espace est *héréditairement de Baire* si chacun de ses sous-espaces fermés est de Baire. La classe de ces espaces contient comme nous l'avons signalé des sous classes naturelles importantes; de plus elle apparaît dans beaucoup de questions d'Analyse, notamment dans l'étude des fonctions de première classe. Le but de ce travail est d'étudier cette propriété topologique et d'en donner — au moins dans le cadre des espaces métrisables — des caractérisations simples.

Nour commençons par quelques propriétés élémentaires. Rappelons qu'un espace X est de Baire si et seulement si tout sous-espace ouvert de X est non maigre dans lui-même.

PROPOSITION 1.1. *Pour un espace topologique X les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) *X est héréditairement de Baire.*

(ii) *Tout sous-espace fermé de X est non maigre dans lui-même.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) est évident. Supposons inversement que l'espace X contient un sous-espace fermé F qui ne soit pas de Baire, c'est-à-dire qui contient un ouvert relatif V qui est maigre dans F. Ecrivons $V = \bigcup_{n\in N} F_n$ où chaque F_n est un fermé de F, rare dans V; alors F_n est rare dans $\overline{V}$ et $\overline{V} = (\overline{V}\setminus V)\cup \bigcup_{n\in N} F_n$ serait un fermé maigre dans lui-même. ∎

Nous rappelons qu'un G_δ d'un espace topologique X est une partie qui peut s'écrire comme intersection dénombrable de parties ouvertes de X.

PROPOSITION 1.2. *Si X est un espace héréditairement de Baire alors tout sous-espace G_δ de X est de Baire.*

Démonstration. Si Y est un G_δ de X alors en particulier Y est un résiduel de $\overline{Y}$ qui est de Baire; donc Y est de Baire. ■

La réciproque est fausse en général (voir Remarque 2.49). Elle est évidemment vraie dans les espaces métrisables.

2. Le jeu de Choquet. Nous rappelons un jeu topologique introduit par G. Choquet (voir [3] ou [2] pour les détails). Dans ce jeu que nous noterons ici Γ, deux joueurs α et β choisissent alternativement des objets dans un espace topologique X: C'est le joueur β qui commence la partie en choisissant un couple (x_0, V_0) constitué d'un ouvert V_0 de X et d'un point $x_0 \in V_0$, le joueur α doit répondre alors par un ouvert U_0 tel que $x_0 \in U_0 \subset V_0$, de nouveau le joueur β choisit (x_1, V_1) tel que $x_1 \in V_1 \subset U_0$, puis le joueur α choisit U_1 tel que $x_1 \in U_1 \subset V_1$ etc ... Le joueur α gagne la partie si $\bigcap_{n\in N} U_n = \bigcap_{n\in N} V_n \neq \emptyset$; le joueur β gagne la partie sinon. Le jeu — et par extension l'espace topologique — sera dit *favorable* pour l'un des joueurs (α ou β) si ce joueur possède une stratégie gagnante dans ce jeu. De même le jeu — et par extension l'espace — sera dit *défavorable* pour l'un des joueurs, si ce joueur n'a pas de stratégie gagnante dans ce jeu.

Le jeu Γ est souvent désigné dans la littérature par le *jeu fort* de Choquet par distinction d'un autre jeu qu'on notera par G dans la suite (étudié aussi par Choquet et souvent appelé jeu de Banach–Mazur) et dans lequel le joueur β choisit seulement des ouverts *non vides* V_n et le joueur α des ouverts *non vides* U_n, avec toujours la règle d'inclusion: $V_n \subset U_n \subset V_{n+1}$ et la même règle de gain que dans Γ. On rappelle le résultat fondamental suivant (voir [6]):

PROPOSITION 2.0. *Un espace topologique est de Baire si et seulement s'il est β-défavorable dans le jeu G.*

Il est facile de voir que le jeu Γ est — en un sens que l'on peut préciser — "plus défavorable" pour le joueur α que le jeu G. En particulier on a les propriétés suivantes que l'on admettra.

PROPOSITION 2.1. *Soit X un espace topologique.*

(a) *Si $\Gamma(X)$ est α-favorable alors $G(X)$ est α-favorable.*

(b) *Si $\Gamma(X)$ est β-défavorable alors $G(X)$ est β-défavorable.*

En particulier si $\Gamma(X)$ est β-défavorable alors X est de Baire. Nous signalons cependant qu'aucune des deux propriétés (a) et (b) ne découle de l'autre.

PROPOSITION 2.2. *Soient X un espace topologique et Y un G_δ de X. Si $\Gamma(X)$ est β-défavorable alors $\Gamma(Y)$ est β-défavorable.*

Démonstration. Ecrivons $Y = \bigcap_{n\in N} G_n$ comme intersection dénombrable d'ouverts de X, et soit τ une stratégie pour le joueur β dans $\Gamma(Y)$. Nous allons en déduire une stratégie σ pour le joueur β dans $\Gamma(X)$.

Si $\tau(\emptyset) = (x_0, V_0)$ où V_0 est un ouvert *relatif* de Y (donc $x_0 \in V_0 \subset Y$), posons $\sigma(\emptyset) = (x_0, W_0)$ où W_0 est un ouvert de X tel que:

$$V_0 = Y \cap W_0 \subset W_0 \subset G_0 .$$

Si le joueur α répond dans $\Gamma(X)$ par un ouvert U_0 de X (donc tel que $x_0 \in U_0 \subset W_0$) alors $U_0 \cap Y$ est un coup licite pour le joueur α dans $\Gamma(Y)$ et compatible avec la stratégie τ; donc $(x_1, V_1) = \tau(U_0 \cap Y)$ est bien défini. On choisit alors un ouvert W_1 de X tel que:

$$V_1 = (Y \cap W_1) \subset W_1 \subset (G_1 \cap U_0)$$

et on pose $\sigma(U_0) = (x_1, W_1)$. Et ainsi de suite, la stratégie σ consiste à répondre des couples (x_n, W_n) tels que $W_n \subset G_n$ et que pour $V_n = W_n \cap Y$ l'égalité suivante soit bien définie et vérifiée:

$$(x_{n+1}, V_{n+1}) = \tau(U_0 \cap Y, \ldots, U_n \cap Y)$$

lorsque le joueur α a joué les ouverts U_n dans $\Gamma(X)$. Autrement dit la suite $(U_n \cap Y)_{n\in N}$ constitue une suite de coups licites dans $\Gamma(Y)$ et qui est compatible avec la stratégie τ. Comme $\Gamma(X)$ est β-défavorable, on peut trouver une telle suite U_n telle que $\bigcap_{n\in N} U_n \neq \emptyset$; mais alors comme $U_n \subset W_n \subset G_n$ on a:

$$\bigcap_{n\in N} (U_n \cap Y) = \bigcap_{n\in N} (U_n \cap G_n) = \bigcap_{n\in N} U_n \neq \emptyset ,$$

ce qui montre que la stratégie τ n'est pas gagnante dans $\Gamma(Y)$. ■

COROLLAIRE 2.3. *Soit X un espace topologique β-défavorable pour Γ. Alors tout sous-espace G_δ de X est de Baire.*

Remarque 2.4. Même sous l'hypothèse plus forte où X serait α-favorable pour Γ il est faux en général que X soit héréditairement de Baire. Il suffit de munir $\boldsymbol{R}$ de la topologie engendrée par les intervalles ouverts et l'ensemble $\boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$ des irrationnels: Cet espace est α-favorable pour le jeu Γ (voir plus généralement [3] Théorème 2.2) mais $\boldsymbol{Q}$ qui y est fermé, n'est pas un espace de Baire (on notera que la topologie induite sur $\boldsymbol{Q}$ est la topologie habituelle sur les rationnels).

Dans l'autre sens on a le résultat suivant:

DEFINITION 2.5. On dira qu'un espace X est de *type dénombrable* si tout point de X admet un système fondamental dénombrable de voisinages.

DEFINITION 2.6. Si τ est une stratégie pour le joueur β dans $\Gamma(X)$ on dira que τ est à valeurs dans un sous-espace X_0 de X si τ est de la forme $(x, V) = \tau(U_0, \ldots, U_n)$ avec $x \in X_0$.

PROPOSITION 2.7. *Soient X un espace topologique régulier et X_0 un sous-espace de type dénombrable de X. Si le joueur β possède une stratégie gagnante à valeurs dans X_0, alors X_0 contient une partie Y fermée dans X, dénombrable, et sans point isolé.*

Démonstration. Fixons pour tout $x \in X_0$ une suite décroissante $(B_n(x))_{n\in N}$ de voisinages ouverts de x dans X telle que $(B_n(x)\cap X_0)$ forme un système fondamental de voisinage de x dans X_0. Fixons pour tout ouvert V et pour tout $x \in V$ un ouvert $U = \varrho_n(x, V)$ vérifiant:

$$x \in \varrho_n(x, V) \quad \text{et} \quad \varrho_n(x, V) \subset (B_n(x)\cap V). \tag{1}$$

Soit τ une stratégie gagnante pour β dans $\Gamma(X)$ à valeurs dans X_0 que nous écrirons sous la forme $(x, V) = \tau(U_0, \ldots, U_n)$. En particulier $\tau(\emptyset)$ désignera le couple (x, V) que la stratégie τ définit comme premier coup pour le joueur β. Il est facile de vérifier que l'on peut supposer qu'au cours d'une partie, la stratégie τ définit des points $x_n \in X_0$ distincts entre eux. Autrement dit si $(x_n, V_n;\ U_n)_{n\in N}$ est une partie compatible avec τ on a:

$$x_n \neq x_m \quad \forall n \neq m. \tag{2}$$

Soit S l'ensemble des suites finies d'entiers. Pour tout $s \in S$ on note par $|s|$ la longueur de la suite s, c'est-à-dire le cardinal de son domaine $\mathrm{Dom}(s)$; pour $s \neq \emptyset$ on énumérera $\mathrm{Dom}(s) = \{1, \ldots, |s|\}$. Si $|s| \geqslant k > 0$ on désigne par $\pi_k(s)$ la restriction de s à $\{1, \ldots, k\}$; et on pose $\pi_0(s) = \emptyset$ pour tout $s \in S$. Pour tout entier n, on note $s^\frown n$ la suite s' telle que $|s'| = |s|+1$, $\pi_{|s|}(s') = s$ et $s'(|s|+1) = n$.

La stratégie τ définit alors par récurrence sur $|s|$ une famille $(x_s;\ V_s;\ U_s)_{s\in S}$ vérifiant:

$$\begin{cases} (x_\emptyset, V_\emptyset) = \tau(\emptyset), \\ (x_s, V_s) = \tau\big((U_{s(i)})_{i<|s|}\big) \quad \text{si } s \neq \emptyset \end{cases} \tag{3}$$

et

$$U_{s^\frown n} = \varrho_n(x_s, V_s). \tag{4}$$

Il découle alors de (2) et (4) que pour $s \in S$ et tout $n \in N$ on a:

$$x_{s^\frown n} \in B_n(x_s)\setminus\{x_s\}. \tag{5}$$

Donc l'ensemble dénombrable $Y = \{x_s;\ s \in S\}$ est sans point isolé. Il reste alors à vérifier que Y est fermé: On procède par l'absurde. Supposons que pour un ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur S on ait:

$$x = \lim_{\mathscr{U}} x_s \quad \text{et} \quad x \notin Y. \tag{6}$$

Montrons alors que pour tout $k \in N$ on a:

$$\exists A_k \in \mathscr{U}, \exists t_k \in S, \quad \forall s \in A_k,\ |s| \geqslant k \text{ et } \pi_k(s) = t_k. \tag{7}$$

La démonstration de (7) se fait par récurrence sur k. Pour $k = 0$, le couple $(A_0, t_0) = (S, \emptyset)$ convient. Supposons (7) établi pour k; comme $\mathscr{U}$ n'est pas principal (sinon $x \in Y$) alors:

$$A' = A_k \setminus \{t_k\} \in \mathscr{U}$$

et

$$\forall s \in A', \quad |s| \geqslant k+1 \quad \text{et} \quad \pi_{k+1}(s) > t_k.$$

Pour tout $n \in N$, posons:

$$C_n = \bigcup_{p \geqslant n} \{s \in A' : \pi_{k+1}(s) = t_k^\frown p\}$$

alors d'après (3) et (4) on a:

$$\forall s \in C_n, \quad x_s \in U_{t_k^\frown n} \subset B_n(x_{t_k}). \tag{8}$$

Si pour tout $n \in N$ on avait $C_n \in \mathscr{U}$ alors il découlerait de (8) que $\lim_{\mathscr{F}} x_s = x_{t_k}$ en notant par $\mathscr{F}$ le filtre sur S engendré par les C_n; et comme $\mathscr{F} < \mathscr{U}$ on aurait $x = x_{t_k} \in Y$ ce qui est contraire à (6). Donc il existe un entier n tel que l'ensemble

$$\bigcup_{p \leqslant n} \{s \in A' : \pi_{k+1}(s) = t_k^\frown p\}$$

soit dans $\mathscr{U}$. Et comme $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre il existe alors un entier $p_0 < n$ tel que

$$A_{k+1} = \{s \in A' : \pi_{k+1}(s) = t_k^\frown p\} \in \mathscr{U}$$

ce qui achève la démonstration de (7) pour $k+1$, en prenant $t_{k+1} = t_k^\frown p$.

Considérons alors la suite $(x_{t_k}, V_{t_k};\ U_{t_k})_{k\in N}$ avec $(t_k)_{k\in N}$ donné par (7): elle définit une partie dans $\Gamma(X)$ qui est compatible avec τ puisque $t_k < t_{k+1}$; donc $\bigcap_{k\in N} V_{t_k} = \emptyset$ et il découle alors de (1) et (4) que $\bigcap_{k\in N} \overline{V}_{t_k} = \emptyset$. D'autre part, comme $x = \lim_{\mathscr{U}} x_s$, il découle de (1) que $x \in \bigcap_{k\in N} \overline{V}_{t_k}$ d'où la contradiction qui achève la démonstration de la proposition. ∎

Remarque 2.8. On notera que dans les hypothèses de la Proposition 2.7 on ne suppose pas que tout point de X admet un système fondamental dénombrable de voisinages. En particulier si y est un point de X adhérent à Y on ne peut pas affirmer à priori que y est limite d'une suite de Y, et l'usage des filtres dans la démonstration précédente nous paraît indispensable. Cependant comme $Y \subset X_0$ l'espace Y est régulier et à base dénombrable, donc métrisable. En fait par un résultat classique de Sierpinski, l'espace Y étant dénombrable et sans point isolé est homéomorphe à l'espace Q des rationnels.

3. Espaces de Baire. Nous donnons maintenant quelques conséquences des résultats précédents sur les espaces de Baire.

Definition 3.1. On dira qu'un espace X est *de type* (D) s'il est régulier et s'il contient un sous-espace dense X_0 qui est de type dénombrable.

L'exemple fondamental est évidemment celui où X_0 est métrisable.

Théorème 3.2. *Soit X un espace de type (D), qui n'est pas de Baire, alors X contient un sous-espace fermé homéomorphe à Q.*

Démonstration. L'espace n'étant pas de Baire est β-favorable pour le jeu G; soit σ une stratégie gagnante pour β dans $G(X)$. Si X_0 est le sous-ensemble de X vérifiant la définition 3.1 fixons une fonction de choix θ qui à tout ouvert V non vide de X associe un point $\theta(V) \in V \cap X_0$. Alors on peut définir une stratégie τ pour β dans $\Gamma(X)$ par:

$$\tau(U_0, \ldots, U_n) = (x, V) \quad \text{si} \quad (\sigma(U_0, \ldots, U_n) = V \text{ et } x = \theta(V)).$$

Il est facile de vérifier que σ n'étant pas gagnante dans $G(X)$ il en est de même pour τ dans $\Gamma(X)$. On est alors dans le cadre d'applications de la Proposition 2.7.

COROLLAIRE 3.3. *Soit X un espace de type (D) et $(X_i)_{i \in J}$ un recouvrement de X tel que*:

$$\forall J \text{ dénombrable} \subset I, \quad \exists i \in I, \quad \bigcup_{j \in J} X_j \subset X_i.$$

Si tous les X_i sont héréditairement de Baire alors X est de Baire.

Démonstration. Sinon par le théorème précédent il existe une partie fermée Y de X qui est homéomorphe à $\mathbf{Q}$. Et par les propriétés faites sur $(X_i)_{i \in J}$ on aurait que $Y \subset X_i$ pour un certain $i \in I$, ce qui est impossible. ∎

COROLLAIRE 3.4. *Soit X un espace de type (D) et $(X_\xi)_{\xi < \aleph_1}$ une famille croissante de sous-espace de X telle que $X = \bigcup_{\xi < \aleph_1} X_\xi$. Si tous les X_ξ sont héréditairement de Baire alors X est de Baire.*

COROLLAIRE 3.5. *Soit X un espace de type (D) dans lequel tout sous-fermé séparable est de Baire; alors X est de Baire.*

COROLLAIRE 3.7. *Un espace régulier de type dénombrable est héréditairement de Baire si et seulement s'il ne contient pas de sous-espace fermé homéomorphe à $\mathbf{Q}$.*

Nous avons appris récemment par John Jayne que dans le cas particulier où X est métrisable séparable le Théorème 3.2 est un résultat classique dû à Hurewicz ([5] p. 97) mais qu'il est possible d'adapter la démonstration originelle de Hurewicz au cadre d'une espace métrisable non séparable, et ceci en utilisant des propriétés de paracompacité des espaces métrisables. Cependant une telle adaptation semble inespérée sous l'hypothèse très faible du Théorème 3.2. C'est essentiellement l'utilisation des jeux topologiques qui donne à notre preuve ce degré de généralité, et montre l'interêt de l'utilisation de ces concepts.

4. Espaces métrisables héréditairement de Baire. Rappelons qu'un espace métrisable X est dit *topologiquement complet* s'il est G_δ dans $\hat{X}$ (avec les notations précédentes). On montre que cette propriété est indépendante du choix de la métrique pour définir la topologie de X. La première partie du Théorème suivant est un résultat bien connu de Choquet ([2]); la deuxième découle des Propositions 2.2 et 2.7:

THÉORÈME 4.1 *Soit X un espace métrisable.*

(a) *$\Gamma(X)$ est α-favorable si et seulement si X est topologiquement complet.*
(b) *$\Gamma(X)$ est β-défavorable si et seulement si X est héréditairement de Baire.*

Le Corollaire suivant se démontre de manière standard à partir du Théorème 4.1:

COROLLAIRE 4.2. *Soient X un espace métrique complet et Y un espace métrique héréditairement de Baire.*

Alors le produit $X \times Y$ est héréditairement de Baire.

Remarque 4.3. Par contre le produit de deux espaces héréditairement de Baire peut ne pas être de Baire: En effet on peut vérifier facilement que les espaces construits par Fleissner et Kunen dans ([4] p. 234 Exemple 1) sont en fait héréditairement de Baire. (Voir aussi [1])

5. Espaces de Prokhorov. Soit X un espace complètement régulier et $\mathscr{M}_b(X)$ l'espace des mesures de Radon bornées sur X, qu'on munit de la topologie de la convergence étroite, c'est-à-dire définie par la dualité avec $\mathscr{C}_b(X)$ l'espace de toutes les fonctions continues bornées sur X. L'espace X est dit de *Prokhorov* si pour toute partie M relativement compacte de $\mathscr{M}_b^+(X)$ on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists K \text{ compact} \subset X, \quad \mu(X \setminus K) < \varepsilon \quad \forall \mu \in M.$$

Par un résultat fondamental dû à Preiss on sait que l'espace $\mathbf{Q}$ n'est pas de Prokhorov. Par ailleurs il est immédiat que tout sous-espace fermé d'un espace de Prokhorov est aussi de Prokhorov. Il découle alors du Théorème 3.2 et de ce qui précède le résultat suivant établi directement par Preiss dans le cas où X est métrisable ([7]).

THÉORÈME 5.1. *Tout espace de Prokhorov de type* (D) *est de Baire.*

6. Espace des compacts. Soit X un espace topologique et $\varkappa(X)$ l'espace des parties compactes de X que l'on munit de la topologie exponentielle, c'est-à-dire engendrée par les ensembles de la forme $\{K: K \subset V\}$ et $\{K: K \cap V \neq \emptyset\}$ pour V ouvert de X. Là aussi l'espace $\mathbf{Q}$ joue un role remarquable: En effet, il est bien connu que $\varkappa(\mathbf{Q})$ est un espace co-analytique non borélien. D'autre part, un autre résultat ([8]) de Saint Raymond affirme qui si $\varkappa(X)$ est analytique (c'est-à-dire l'image continue d'un polonais) alors X est en fait polonais (et $\varkappa(X)$ aussi).

En remarquant que si Z est un fermé de X alors $\varkappa(Z)$ est un fermé de $\varkappa(X)$, on obtient à partir de ce qui précède et du Théorème 3.2 l'extension suivante du Théorème de Saint Raymond:

THÉORÈME 6.1. *Si X est un espace de type dénombrable tel que $\varkappa(X)$ soit K-analytique, alors X est de Baire.*

Pour la définition et les propriétés des espaces K-analytiques nous renvoyons à ([2]). Signalons cependant qu'en reprenant certains arguments de ([8]) on peut montrer sous les hypothèses du Théorème 6.1 que l'espace $\varkappa(X)$ est aussi de Baire.

Références

[1] J. M. Aarts and D. J. Lutzer, *The product of totally nonmeager spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 198–200.

[2] G. Choquet, *Lectures on Analysis, Volume I*, Math. Lecture Notes Series — W. A. Benjamin 1969.

[3] G. Debs, *Quelques propriétés des espaces α-favorables et applications aux convexes compacts*, Ann. Inst. Fourier XXX, 2 (1980), 29–43.
[4] W. G. Fleissner and K. Kunen, *Barely Baire spaces*, Fund. Math. 101 (1978), 229–240.
[5] W. Hurewicz, *Relativ Perfekte Teile von Punktmengen und Mengen* (A), Fund. Math. 12 (1928), 78–109.
[6] M. R. Krom, *Infinite games and special Baire space extensions*, Pacific J. Math. 55 (1974), 483–487.
[7] D. Preiss, *Metric spaces in which Prokhorov's Theorem is not valid*, Z. Wahrscheinlichkeits. Ver. Geb. (1973), 109–116.
[8] Saint Raymond, *Caractérisation des espaces polonais*, Séminaire d'Initiation à l'Analyse, Univ. Paris 6, (1971–73), Exposé 5.

EQUIPE D'ANALYSE-TOUR 46
UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
4, Place Jussieu
75252 Paris-Cedex 05
France

Received 10 February 1986;
in revised form 10 July 1986

Nonexistence of local expansions on certain continua

by

D. W. Curtis and **S. Miklos** (Wrocław)

Abstract. It is shown that no path-connected continuum without any simple closed curve or closed connected manifold with finite fundamental group admits a local expansion, and that no path-connected continuum with finite fundamental group or tree-like continuum admits an open local expansion. It is also shown that no compact connected manifold with boundary admits a local expansion into itself with respect to any connected metric, and that every open local expansion on a Peano continuum is a local expansion with respect to some connected metric. Hence compact connected manifolds with boundary admit no open local expansions, i.e., no local expansions which are boundary-preserving.

All considered spaces are assumed to be metric. A continuous function $f\colon (X, d) \to (X, d)$ is said to be a *local expansion* provided that for each $x \in X$, there is an open set U containing x and a real number $M > 1$ so that if $y, z \in U$, then $d(f(y), f(z)) \geqslant Md(y, z)$. We say that a metric space X *admits a local expansion* if there exist a metric d that is equivalent to the original one given on X, and a mapping $f\colon X \to X$ satisfying the conditions of the above definition.

THEOREM 1. *No local expansion of a continuum onto itself can be a homeomorphism.*

Proof. Let $f\colon (X, d) \to (X, d)$ be a surjective local expansion, and suppose f is a homeomorphism. Consider the surjective mapping $g = f^{-1}\colon (X, d) \to (X, d)$. By the compactness of X, there are positive numbers δ and M, with $M < 1$, so that if $d(x, y) \leqslant \delta$ then $d(g(x), g(y)) \leqslant Md(x, y)$. Let $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ be a finite cover of X with mesh $\mathcal{U} < \delta$, and let x and y be any points of X. Then, by the connectedness of X, there is a chain of open sets from x to y, chosen from $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Evidently $d(x, y) \leqslant n\delta$. Considering the images of links of this chain under g we have $d(g(x), g(y)) \leqslant Mn\delta$ and, more generally, $d(g^k(x), g^k(y)) \leqslant M^k n\delta$ for each positive integer k. Now choosing k so large that $M^k n < 1$, we see that $\operatorname{diam} g^k(X) < \delta \leqslant \operatorname{diam} X$. So g is not surjective, a contradiction.

COROLLARY 1. *No local expansion of a continuum into itself can be an imbedding.*