References

[1] R. Duda, *On the hyperspaces of subcontinua of a finite graph*, I, II, Fund. Math. 62 (1968), 265–286, 63 (1968), 225–255.

[2] H. Kato, *Shape properties of Whitney maps for hyperspaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), 529–546.

[3] — *Whitney continua of curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 300 (1987), 367–381.

[4] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 52 (1942), 22–36.

[5] A. Y. Lau, *Whitney continuum in hyperspace*, Top. Proceeding, 1 (1976), 187–189.

[6] M. Lynch, *Whitney levels in $C_p(X)$ are absolute retracts*, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 748–750.

[7] — *Whitney properties for 1-dimensional continua*, Bull. Acad. Polon. Sci., to appear.

[8] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, Pure and Appl. Math. 49, Dekker, New York 1978.

[9] A. Petrus, *Contractibility of Whitney continua in $C(X)$*, Gen. Top. and its Appl. 9 (1978), 275–288.

[10] J. T. Rogers, Jr., *Applications of a Vietoris–Begle theorem for multi-valued maps to the cohomology of hyperspaces*, Michigan Math. J. 22 (1975), 315–319.

[11] L. E. Ward, Jr., *Extending Whitney maps*, Pacific J. Math. 93 (1981), 465–469.

[12] J. E. West, *Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's; a solution of a conjecture of Borsuk*, Ann. of Math. 106 (1977), 1–18.

[13] H. Whitney, *Regular families of curves*, I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 18 (1932), 275–278.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF INTEGRATED ARTS AND SCIENCES
Hiroshima University
Higashisenda-Machi, Naka-ku
Hiroshima 730, Japan

Received 12 November 1985;
in revised form 12 May 1986

Sur la quasi-continuité et la quasi-continuité approximative

par

Zbigniew Grande (Bydgoszcz)

Abstract. We prove that every cliquish (d cliquish) function is the limit of a sequence of quasi-continuous (d quasicontinuous) functions (d denotes the density topology).

Soient R l'ensemble des nombres réels et T une topologie dans R.

Une fonction f: $R \to R$ est dite T *quasi-continue* (T *cliquish*) au point $x \in R$ lorsqu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout entourage $U \in T$ du point x un ensemble nonvide $V \subset U$, $V \in T$ tel que

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

pour tout $t \in V$ ($\operatorname{osc}_V f \leqslant \varepsilon$).

Étant fixés l'ensemble mesurable (au sens de Lebesgue) $A \subset R$ et le point $x \in R$, la limite supérieure

$$\limsup_{h \to 0^+} \frac{m(A \cap [x-h, x+h])}{2h}$$

est dite la *densité supérieure* de l'ensemble A au point x. S'il existe la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{m(A \cap [x-h, x+h])}{2h} = 1,$$

x est dit un point de densité de l'ensemble A.

La famille composée de l'ensemble vide et de tous les ensembles $A \subset R$ tels que tout point $x \in A$ est un point de densité de l'ensemble A est une topologie. Cette topologie est dite la *topologie de densité* ([5])

Désignons par T_e la topologie euclidienne et par T_d la topologie de densité dans R. Si K est une famille de fonctions f: $R \to R$, alors $B(K)$ désigne la famille de toutes les fonctions f de la forme $f = \lim_{n \to \infty} f_n$, où toutes les fonctions $f_n \in K$ ($n = 1, 2, \ldots$).

Désignons par Q (Q_d) la famille de toutes les fonctions T_e quasi-continues (T_d quasi-continues) et par P (P_d) la famille de toutes les fonctions T_e cliquish (T_d cliquish).

Dans cet article je prouve que

$$P = B(Q)\,, \quad P_d = B(Q_d) \quad \text{et} \quad B(P)\,, \quad (B(P_d))$$

est la famille de toutes les fonctions ayant la propriété de Baire par rapport à T_e (par rapport à T_d).

THÉORÈME 1. *On a* $B(Q) = P$.

Preuve. L'inclusion $B(Q) \subset P$ résulte du Corollaire 7 de l'article [1] (comparer également [3], th. 5). Démontrons encore l'inclusion $P \subset B(Q)$. Soit $f\colon R \to R$ une fonction T_e cliquish. Sans restreindre la généralité on peut supposer que la fonction f soit bornée sinon on peut considérer la fonction $\operatorname{arctg} f$. Puisque la fonction f est ponctuellement discontinue [(1)], il existe un ensemble résiduel $A \subset R$ du type G_δ tel que la fonction réduite $f_1 = f|A$ est continue.

Il existe aussi une fonction bornée $h\colon R \to R$ de première classe de Baire telle que $A \subset \{x \in R;\ f(x) = h(x)\}$ ([4], 341–342). Soit $g = f - h$. Si $g \equiv 0$, la fonction $f = h$ est de première classe de Baire et la preuve est évidente. Supposons donc que $\{x\colon g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$. Tout ensemble $A_n = \{x \in R\colon$ l'oscillation de la fonction g au point x est $\geqslant 1/n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est fermé, nondense et $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$

Soit M un nombre positif tel que $|g(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in R$. Fixons un nombre naturel n. Il existe des suites $(I_{km})_m$ $(k = 1, \ldots, n)$ d'intervalles fermés telles que:

(a) $I_{k_1 m_1} \cap I_{k_2 m_2} = 0$ lorsque $k_1 \neq k_2$ ou bien $m_1 \neq m_2$;

(b) $I_{km} \cap A_n = 0$ pour tous $k = 1, \ldots, n$ et $m = 1, 2, \ldots$;

(c) $I_{km} \subset \bigcup_{x \in A_k} K(x, 1/n)$ pour tout $m = 1, 2, \ldots$ et $k = 1, \ldots, n$ ($K(x, 1/n)$ désigne la sphère ouverte de centre x et de rayon $1/n$);

(d) toute suite $(I_{km})_m$ $(k = 1, \ldots, n)$ est convergente vers l'ensemble A_k $(I_{km} \to A_k)$, c'est-à-dire $A_k \subset \mathrm{Cl}(\bigcup_m I_{km})$ et si $x = \lim_{m \to \infty} x_m$, où $x_m \in I_{km}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, alors $x \in A_k$.

Afin construire telles suites $(I_{km})_{m=1}^{\infty}$ $(k = 1, \ldots, n)$ il suffit de choisir dans chacune des composantes des ensembles

$$\{x \in R;\ 1/l+1 < \inf\{|x-y|\colon y \in A_k\} < 1/l\} - A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{im}$$

$(l = n, n+1, \ldots;\ k = 1, \ldots, n)$ un intervalle fermé disjont avec A_n. Il existe aussi pour tout $k = 1, \ldots, n$ et $m = 1, 2, \ldots$ une fonction continue $g_{km}\colon I_{km} \xrightarrow{\text{sur}} [-(k-1)^{-1}, (k-1)^{-1}]$ telle que $g_{km}(x) = 0$ lorsque x est une extrémité de I_{km}.

De même il existe pour tout $m = 1, 2, \ldots$ une fonction continue

$$g_{1m}\colon I_{1m} \xrightarrow{\text{sur}} [-M, M]$$

(1) Il résulte de la définition de la fonction cliquish, qu'il existe pour tout ensemble nonvide $U \in T_e$ une suite d'intervalles fermés $I_n \subset U$ tels que $I_{n+1} \subset \operatorname{Int} I_n$, $\operatorname{osc}_{I_n} f_n \leqslant 1/n\,(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim_{n\to\infty} d(I_n) = 0$ ($\operatorname{Int} I_n$ désigne l'intérieur de I_n et $d(I_n)$ désigne le diamétre de I_n). Le point $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ est un point de continuité de la fonction f.

telle que $g_{1m}(x) = 0$ lorsque x est une extrémité de I_{1m}. Posons

$$g_n(x) = \begin{cases} g_{km}(x) & \text{lorsque } x \in I_{km}\ (k = 1, \ldots, n \text{ et } m = 1, 2, \ldots)\,, \\ g(x) & \text{lorsque } x \in A_n\,, \\ 0 & \text{lorsque } x \in R - \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{m=1}^{\infty} I_{km} - A_n\,. \end{cases}$$

La fonction g_n est continue en tout point de l'ensemble $R - A_n$. Si $x \in A_k - A_{k-1}$ $(1 < k \leqslant n)$, il existe une sous-suite $(I_{km_i})_i$ convergente vers x (c'est-à-dire la suite de toutes les extrémités des intervalles I_{km_i} est convergente vers x). Fixons un nombre $\varepsilon > 0$ et un entourage ouvert U du point x. Puisque $x \in A_k - A_{k-1}$, on a $k^{-1} \leqslant |g(x)| < (k-1)^{-1}$. Il existe un intervalle $I_{km_{i_0}} \subset U$. Mais $g_n(I_{km_{i_0}}) = [-(k-1)^{-1}, (k-1)^{-1}]$, il existe donc un intervalle ouvert nonvide $I \subset I_{km_{i_0}} \subset U$ tel que

$$|g_n(u) - g_n(x)| = |g_n(u) - g(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } u \in I\,,$$

d'où il vient que la fonction g_n est quasi-continue au point x. De même on prouve que la fonction g_n est quasi-continue en tout point de l'ensemble A_1. La fonction g_n est donc quasi-continue en tout point. Démontrons encore que la suite $(g_n)_n$ est convergente vers la fonction g. Fixons un point x et un nombre $\varepsilon > 0$. Si $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, on a $g(x) = 0$. Soit n_0 un indice tel que $1/n_0 < \varepsilon$. Puisque $x \in A_{n_0}$ et A_{n_0} est fermé, il existe un indice $k \geqslant n_0$ tel que $x \notin \bigcup_{t \in A_{n_0}} K(t, 1/k)$. Il en résulte que

$$|g_n(x)| \leqslant 1/n_0 < \varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant k\,.$$

Si $x \in \bigcup_n A_n$, il existe un indice k tel que $x \in A_k$ et par conséquent $g_n(x) = g(x)$ pour tout $n \geqslant k$.

La fonction h étant de première classe, il existe une suite de fonctions continues $h_n\colon R \to R$ convergente vers la fonction h. Posons, pour $n = 1, 2, \ldots, f_n = g_n + h_n$ et remarquons que toutes les fonctions f_n sont quasi-continues et que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. La preuve est donc achevée.

THÉORÈME 2. *La famille* B $(B(Q))$ *se compose de toutes les fonctions* $f\colon R \to R$ *ayant la propriété de Baire.*

Preuve. En désignant par D la famille de toutes les fonctions ayant la propriété de Baire, on a évidemment

$$B(B(Q)) = B(P) \subset D\,.$$

Démontrons encore que $D \subset B(P)$. Si $f \in D$, il existe un ensemble résiduel $A \subset R$ du type G_δ et tel que la fonction partielle f/A est continue. On a $R - A = \bigcup_n A_n$, où tous les ensembles A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont fermés, nondenses et $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$

Il existe une fonction $g\colon R \to R$ de première classe de Baire et telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$ ([4], 341–342). Posons, pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } x \in A_n, \\ g(x) & \text{lorsque } x \in R - A_n \end{cases}$$

et remarquons que $f_n \in P$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$.

EXEMPLE 1. Si la topologie T se compose de tous les ensembles $A \subset R$ dont les complémentaires $R - A$ sont dénombrables et de l'ensemble vide et si $Q_T(P_T)$ désigne la famille de toutes les fonctions T quasi-continues (T cliquish) $f\colon R \to R$, on a $B(Q_T) \neq P_T$, puisque Q_T ne contient que les fonctions constantes et P_T contient certaines fonctions nonconstantes.

THÉORÈME 3. *On a* $B(Q_{T_d}) = P_{T_d}$.

La preuve de théorème 3 s'appuye sur le lemme suivant:

LEMME. *Soient $A \subset R$ un ensemble du type G_δ, de mesure zéro et $U \supset A$ un ensemble ouvert. Il existe une suite d'ensembles mesurables $A_i \subset U - A$ $(i = 1, 2, \ldots)$ tels que:*

(a) *$A_i \cap A_j = 0$ pour $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$;*

(b) *la densité supérieure de tout ensemble A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ en chaque point $x \in A$ est positive:*

(c) *tout ensemble A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ est de densité supérieure positive en chacun de ses points;*

(d) *l'ensemble $R - A - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ est de densité supérieure positive en chacun de ses points.*

Preuve du lemme. Puisque A est du type G_δ, de mesure zéro et $A \subset U$, il existe donc une suite d'ensembles ouverts U_i $(i = 1, 2, \ldots)$ tels que $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$, $U \supset U_1 \supset U_2 \ldots$ et quels que soient $i = 1, 2, \ldots$ et une composante ouverte I de l'ensemble U_i, on a $m(I - U_{i+1}) > 0$.

Fixons un indice naturel i et une composante ouverte I_{ij} de l'ensemble U_i. Il existe des ensembles mesurables

$$A_{ij1}, \ldots, A_{iji} \subset I_{ij} - U_{i+1}$$

disjoints deux à deux, de densité supérieure positive en chacun de ses points et tels que:

1° $m(A_{ijk}) > 2^{-k-1} m(I_{ij} - U_{i+1})$ $(k = 1, \ldots, n)$;
 _{i}

2° $m(I_{ij} - \bigcup\limits_{k=1}^{i} A_{ijk} - U_{i+1}) > 4^{-1} m(I_{ij} - U_{i+1})$;

3° $\mathrm{Cl}\, A_{ijk} \subset I_{ij}$ $(k = 1, 2, \ldots, i)$;

4° si $x \in I_{ij}$ est un point de densité de l'ensemble A_{ijk} $(k = 1, \ldots, i)$, on a $x \in A_{ijk}$.

Posons, pour $k = 1, 2, \ldots$,

$$A_k = \bigcup_{i \geq k} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ijk}.$$

Tous les ensembles A_k $(k = 1, 2, \ldots)$ sont contenus dans $U_1 - A \subset U - A$, mesurables et de densité supérieure positive en chacun de ses points. De 1° résulte que la densité supérieure de l'ensemble A_k en tout point $x \in A$ est $\geq 2^{-k-1}$.

D'après 4° l'ensemble $U_1 - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ est de densité supérieure positive en chacun de ses points. Si x est une extrémité de certaine composante de l'ensemble U_1, il résulte de 3° que l'ensemble $U_1 - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k - A$ est de densité supérieure positive au point x. Enfin, si $x \in R - \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \mathrm{Cl}\, I_{ij}$, il résulte de 2° que l'ensemble $R - A - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ est de densité supérieure positive au point x. La preuve est donc achevée.

La preuve du théorème 3. Soit $f \in P_{T_d}$ une fonction. La fonction f est mesurable. Sans restreindre la généralité on peut supposer que f soit bornée. Il existe une fonction bornée $g\colon R \to R$ de deuxième classe de Baire égale presque partout à f. Soit $h = f - g$. La fonction h est bornée et égale à zéro presque partout. Il existe un ensemble A du type G_δ et de mesure zéro tel que

$$\{x\colon h(x) \neq 0\} \subset A.$$

Soit $(U_i)_i$ une suite d'ensembles ouverts telle que $A = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$ et $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ Fixons un indice naturel n. En posant dans le lemme $U = U_n$, il existe une suite d'ensembles A_{nk} $(k = 1, 2, \ldots)$ satisfaisant à toutes les conditions de ce lemme (lorsque $A_{nk} = A_k$). Soit $M > 0$ un nombre tel que $|h(x)| \leq M$ pour tout $x \in R$ et $(a_k)_k$ une suite de tous les nombres rationnels de l'intervalle $[-M, M]$. Posons

$$h_n(x) = \begin{cases} a_k & \text{pour } x \in A_k \ (k = 1, 2, \ldots), \\ h(x) & \text{pour } x \in A, \\ 0 & \text{pour } x \in R - A - \bigcup\limits_{k} A_k. \end{cases}$$

Il résulte du lemme et du théorème 1 de [2] que toute fonction h_n $(n = 1, 2, \ldots)$ est T_d quasi-continue. Puisque, de plus, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ et $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$, on a $h = \lim\limits_{n\to\infty} h_n$.

La fonction g étant deuxième classe de Baire, il existe d'après le théorème de Preiss ([6]) une suite de fonctions $g_n\colon R \to R$ $(n = 1, 2, \ldots)$ T_d continues telle que $g = \lim\limits_{n\to\infty} g_n$. Toutes les fonctions $f_n = g_n + h_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont donc T_d quasi-continues et

$$f = g + h = \lim_{n\to\infty} g_n + \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

La preuve est donc achevée.

Ouvrages cités:

[1] J. Ewert and M. Przemski, *Cliquish, lower- and upper-quasicontinuous functions*, Słupskie Prace Matematyczno-Przyrodnicze 4, Słupsk 1983, 3–12.
[2] Z. Grande, *Sur les fonctions approximativement quasi-continues*, Revue Roum. Math. Pures et Appl, à paraître.
[3] — *Sur la continuité approximative faible*, Problemy Matematyczne 4 (1984), 11–18.
[4] K. Kuratowski, *Topologie* I, Warszawa 1958.
[5] J. Oxtoby, *Measure and category*, New York–Heidelberg–Berlin 1971.
[6] D. Preiss, *Limits of approximately continuous functions*, Czech. Math. J. 96 (1971), 371–372.

INSTYTUT MATEMATYKI
WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
Bydgoszcz

Received 31 December 1985;
in revised form 20 October 1986

Strongly discrete subsets in ω^*

by

R. Frankiewicz (Gliwice) and **P. Zbierski** (Warszawa)

Abstract. We prove that the statement: "$\bar{D} = \beta D$ for each strongly discrete subset $D \subseteq \omega^*$ with $|D| = \omega_1$" is consistent with ZFC+MA. We also give an example of a B-ideal over ω which cannot be extended to a P-point.

0. It is well known that if D is a countable discrete subset of the remainder $\omega^* = \beta[\omega]\setminus\omega$, ($\beta[\omega]$ = the Stone–Čech compactification of the discrete space ω), then the closure $\bar{D}$ in ω^* is (homeomorphic to) the space $\beta[\omega]$, or equivalently, D is C^*-embedded in ω^*.

In this paper we turn our attention to discrete sets $D \subseteq \omega^*$ of cardinality ω_1. Under the consistent assumption $2^{\omega_0} = 2^{\omega_1}$, the space $\beta[\omega_1]$ (the Stone–Čech compactification of a discrete space of cardinality ω_1) can be embedded into ω^*. Hence we may ask whether $\bar{D} = \beta D$ for discrete D with $|D| = \omega_1$.

Balcar, Simon and Vojtáš [1981] constructed a discrete set $D \subseteq \omega^*$, $|D| = \omega_1$, having the following property: there is a point $x \in \omega^*$ such that each neighbourhood of x contains all but countably many points of D. Obviously, $\bar{D} \neq \beta D$ for such a D. Hence we shall consider strongly discrete D in the following sense: there is a family of pairwise disjoint closed-open neighbourhoods, each containing a single point of D. Note that each countable discrete set D is strongly discrete.

The main result of this paper is the following

THEOREM. *Assuming the consistency of the Zermelo–Fraenkel set theory* ZFC, *there is a model of* ZFC *plus Martin's Axiom in which the closure $\bar{D}$ of each strongly discrete set $D \subseteq \omega^*$, $|D| = \omega_1$, is homeomorphic to βD (i.e. D is C^*-embedded in ω^*). In addition, $2^{\omega_0} = \omega_2$ and $\beta[\omega_1]$ is not a continuous image of ω^*.*

It can be proved, that the theorem fails in a model obtained by adding ω_2 Cohen reals.

1. We represent $\beta[\omega]$ as the space of all ultrafilters over ω with the Stone topology. The remainder $\omega^* = \beta[\omega]\setminus\omega$ consists then of all nonprincipal ultrafilters. The basic open-closed neighbourhoods are of the form $A^* = \bar{A} \cap \omega^*$, for an $A \subseteq \omega$, and A^* consists of all nonprincipal ultrafilters containing the set A. Let $D = \{F_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ be a strongly discrete set of cardinality ω_1. According to the Taimanov Theorem (Engelking [1968]) in order that $\bar{D} = \beta D$ it is sufficient that,