Homotopieäquivalenzen zwischen Produkten aus dreidimensionalen Linsenräumen

by

von **Günther Huck** (Frankfurt am Main)

Abstract. We give the following homotopy classification for products of 3-dimensional lens spaces:

THEOREM. *There exists a homotopy equivalence between products of 3-dimensional lens spaces:* $\prod_{i=1}^{s} L_{m_i}(r_i) \simeq \prod_{i=1}^{s} L_{m_i}(r_i')$ *if and only if the following conditions hold:*

1. *the fundamental groups are isomorphic:*

$$\bigoplus_{i=1}^{s} Z_{m_i} \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} Z_{m_i'}$$

2. *for each maximal prime power divisor* $p_j^{x_j}$ *of* $\gcd(m_1, \ldots, m_s)$:

$$\prod_{i=1}^{s} r_i \equiv \pm k^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} r_i' \bmod p_j^{x_j},$$

where the signs $\pm$ *for the different prime divisors* p_j *are coupled as follows:*

The sequences $(m_1, \ldots, m_s)$ *and* $(m_1', \ldots, m_s')$ *determine sequences of corresponding maximal prime power divisors* $p_j^{x_{ij}} | m_i$ *resp.* $p_j^{x_{ij}'} | m_i'$. *By* 1, $(x_{1j}', \ldots, x_{sj}')$ *is a permutation of* $(x_{1j}, \ldots, x_{sj})$ *and the permutation is uniquely determined if these prime power exponents are pairwise distinct. We get the following conditions for the signs* $\pm$ *in the system of congruence equations above: If* -1 *is a square* $\bmod p_j$ *or if* $x_{ij} = x_{lj}$ *for some* $i \neq l$ *then the sign is arbitrary, else the choice of sign has to be either equal or opposite (throughout the whole system of equations) to the sign of the corresponding permutation of prime power exponents.*

The above conditions were shown to be necessary in a more general context, (products of $(2n-1)$-dimensional lens spaces), in: G. Huck, W. Metzler: *Über den Homotopietyp von Linsenräumprodukten*, (*On the homotopy type of products of lens spaces*), [5].

Therefore we only need to show that they can be realized by homotopy equivalences. We construct these maps "by hand".

In chapter 2 we reduce the general case to the following two basic transformations between products of two lens spaces:

PROP. 1. $L_m(r) \times L_{m'}(r') \simeq L_m(r \cdot r') \times L_{m'}(1)$, where r' is w.l.o.g relatively prime to m and m'.

PROP. 2. $L_{mp^x}(r) \times L_{m'p^{x'}}(1) \simeq L_{mp^{x'}}(r') \times L_{m'p^x}(1)$. where $r' \equiv r \bmod m$ and $r' \equiv -r \bmod p^{x'}$.

The homotopy equivalences of Prop. 1 and 2 are constructed as equivariant maps in the universal covering $S^3\times S^3$, equivariant of course with respect to the lens space operations. We introduce a "calculus of homogeneity transformations"; these are equivariant transformations based on quaternion multiplication. This "calculus" allows us to mix the lens space operations, defined on each S^3-factor, in a controlled way and to "reassemble" them into different products of lens space operations as needed for Prop. 1 and 2.

I. Einleitung und Ergebnis. In [5] wurde ein notwendiges Kriterium für Homotopieäquivalenz zwischen Linsenraumprodukten

$$\prod_{i=1}^{s} L^{2n-1}(m_i; r_1(i), \ldots, r_n(i)) \simeq \prod_{i=1}^{s} L^{2n-1}(m_i'; r_1'(i), \ldots, r_n'(i))$$

aufgestellt.

Die vorliegende Arbeit zeigt, daß dieses Kriterium für den Fall von Produkten dreidimensionaler Linsenräume auch hinreichend ist:

THEOREM. *Für die Existenz einer Homotopieäquivalenz*

$$\prod_{i=1}^{s} L_{m_i}(r_i) \simeq \prod_{i=1}^{s} L_{m_i'}(r_i')\,(^1)$$

zwischen Produkten dreidimensionaler Linsenräume sind die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

1. *die Isomorphie der Fundamentalgruppen*:

$$\bigoplus_{i=1}^{s} \mathbf{Z}_{m_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbf{Z}_{m_i'}\;;$$

2. *für jeden Primpotenzteiler* $p_j^{x_j}$ *von* $\mathrm{ggT} := \mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s)$ *die Gültigkeit einer Kongruenzgleichung*

$$\prod_{i=1}^{s} r_i \equiv \pm k^2 \cdot \prod_{i=1}^{s} r_i' \bmod p_j^{x_j}\,(^2);$$

wobei die Vorzeichen ± 1 *für die verschiedenen Primteiler* p_j *wie folgt gekoppelt sind* (3):

Für jeden Primteiler p_j *von* ggT *bestimmt die Folge der Drehnenner* $(m_1, \ldots, m_s)$ *bzw.* $(m_1', \ldots, m_s')$ *eine Folge zugehöriger maximaler Primpotenzteiler* $p_j^{x_{ij}}|m_i$ *bzw.* $p_j^{x_{ij}'}|m_i'$. $(x_{1j}', \ldots, x_{sj}')$ *geht aus* $(x_{1j}, \ldots, x_{sj})$ *nach* 1. *durch Umordnung hervor. Falls die Exponenten* $(x_{1j}, \ldots, x_{sj})$ *paarweise verschieden sind, ist diese Permutation eindeutig festgelegt. Die Bedingungen für die Vorzeichen lauten*: *Falls* -1 *Quadrat* $\bmod p_j$ *ist*

(1) Wir übernehmen im folgenden die Definitionen und Bezeichnungen aus [5].

(2) Die Verwendung desselben k für alle p_j bei 2*b*) bedeutet nach dem Hauptsatz über simultane Kongruenzen keine Zusatzforderung gegenüber der Lösbarkeit der Gleichungen mit je einem Quadrat.

(3) Man beachte, daß die Kopplungsbedingung nicht von der Reihenfolge der zyklischen Faktoren $\mathbf{Z}_{m_i}$ bzw. $\mathbf{Z}_{m_i'}$ in 1. abhängt.

oder falls $x_{ij} = x_{il}$ $(i \neq l)$ *vorkommt, ist das Vorzeichen beliebig*; *ansonsten ist das Vorzeichen entweder stets gleich oder stets umgekehrt gleich dem Signum der Permutation der Primpotenzexponenten zu* p_j.

Der Beweis des Theorems erfolgt durch Konstruktion geeigneter Homotopieäquivalenzen, welche die Bedingungen 1. und 2. realisieren, deren Notwendigkeit bereits in [5] gezeigt wurde. Der allgemeine Fall wird in Kap. II auf Homotopieäquivalenzen zwischen Produkten von zwei Linsenräumen zurückgeführt, die jeweils eine der folgenden Transformationen bewirken ("$\simeq$" stehe für Homotopieäquivalenz):

1) Verschieben der Torsionszahlen (Satz 1)

$$L_m(r)\times L_{m'}(r') \simeq L_m(r\cdot r')\times L_{m'}(1)$$

(r' o. B. d. A. teilerfremd zu m und m').

2) Vertauschen der zu einer Primzahl gehörenden Primpotenzteiler der Drehnenner (Satz 2)

$$L_{mp^x}(r)\times L_{m'p^{x'}}(1) \simeq L_{mp^{x'}}(r')\times L_{m'p^x}(1) \qquad (p \nmid m\cdot m')\,.$$

Wir konstruieren diese Homotopieäquivalenzen in der universellen Überlagerung, d. h. als Abbildungen zwischen Produkten von 3-Sphären, die äquivariant bezüglich der entsprechenden Linsenraumoperationen sind. Dabei erlaubt Quaternionenmultiplikation in den 3-Sphären ein kontrolliertes Mischen der Koordinaten und Gruppenoperationen. Die Regeln dafür gibt der Kalkül der "Homogenitätstransformationen", der in Kap. III entwickelt wird. Die Bezeichnung ist in Anlehnung an die Bezeichnung des wesentlich spezielleren Transformationskalküls durch Diffeomorphismen in [6] gewählt.

Es sei betont, daß das Verschieben der Torsionszahlen in Satz 1 ein Ergebnis von A. J. Sieradski ist. (Es ist in seinem Aufsatz [8], Prop. 3, für $m = m'$ formuliert). Der Beweis basiert ebenfalls auf Quaternionenmultiplikation, ist aber verschieden von dem hier gegebenen.

Sieradskis Homotopieklassifizierung von Produkten 3-dimensionaler Linsenräume im Spezialfall, daß alle Drehnenner gleich m sind ([8], Theorem 3), läßt keinen Wechsel der Vorzeichen für verschiedene Primteiler von m zu und weicht insofern von unserem Ergebnis ab. Ein Beispiel am Ende des Kap. IV zeigt, daß durchaus Fälle mit wechselnden Vorzeichen in den Kongruenzgleichungen auftreten können, die nicht unter Sieradskis Klassifikation fallen, was sich aus einem Fehler im Beweis des Theorem 3 in [8] erklären läßt.

Verständlicherweise läßt die auf Quaternionenmultiplikation basierende Beweismethode keine direkte Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen zu. Es bleibt also ungewiß, ob für $n > 2$ die Bedingungen des Satzes in [5] bereits eine Homotopieklassifizierung darstellen. Weitere interessante Fragen betreffen Diffeomorphie — bzw. Homöomorphietyp und einfachen Homotopietyp von Produkten von Linsenräumen (z. B. der Dimension 3) und die Beziehungen zwischen diesen Begriffen:

Fallen für Produkte mindestens zweier 3-dimensionaler Linsenräume die obengenannten Klassifizierungen zusammen?

Stimmen für solche Produkte zumindest Homotopietyp und einfacher Homotopietyp überein?

Bezüglich der ersten Frage bin ich skeptisch. Das Ergebnis von W. Metzler in [6], daß unter speziellen Einschränkungen der Diffeomorphietyp durch Homotopieinvarianten charakterisiert ist, scheint in starkem Maße durch die Einschränkungen bestimmt zu sein. Die zweite Frage kann man für Produkte von mindestens drei 3-dimensionalen Linsenräumen bereits positiv beantworten. Hier gilt eine einfache Folgerung, auf die mich Prof. Sieradski aufmerksam machte: Die im Beweis des Theorem 2 konstruierten Homotopieäquivalenzen werden schrittweise aus Abbildungen der Gestalt: (Homotopieäquivalenz zwischen jeweils zwei Faktoren von Linsenräumen) $\times$ (identische Abbildung der übrigen Faktoren) zusammengesetzt. Da die Euler-Charakteristik eines Linsenraumes 0 ist, ergibt der Produktsatz für die Whitehead-Torsion, daß die Torsion solcher Homotopieäquivalenzen verschwindet. (s. [1], (23.2)).

Es bleibt nur der Fall zweier Faktoren interessant. Hier gilt, daß die Torsionsinvariante einer Homotopieäquivalenz

$$f\colon L_{m_1}(r_1)\times L_{m_2}(r_2)\to L_{m_1'}(r_1')\times L_{m_2'}(r_2')$$

in $SK_1(\boldsymbol{Z}(G))$ liegt (mit $G=\boldsymbol{Z}_{m_1}\oplus\boldsymbol{Z}_{m_2}$); der Determinantenanteil in $U(\boldsymbol{Z}(G))\pm G$ verschwindet nämlich (s. Milnor [7], S. 404 ff, unter der Beachtung, daß seine Behauptung, SK_1 einer endlichen abelschen Gruppe verschwinde, falsch ist).

Ich vermute, daß Homotopietyp und einfacher Homotopietyp auch in diesem Fall übereinstimmen. Ergeben sich jedoch für den Fall $SK_1(\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}_{m_1}\oplus\boldsymbol{Z}_{m_2}))\neq 1$ [4] Invarianten, so bilden sie eine interessante geometrische Realisierung solcher SK_1-Elemente.

II. Beweis des Theorems aus den Sätzen 1 und 2.

SATZ 1. *Sei* $(r,m)=(r',m')=(r'',m)=1$ *und* $r''\equiv r\cdot r' \bmod (m,m')$, [5] *dann gibt es eine Homotopieäquivalenz*:

$$L_m(r)\times L_{m'}(r')\simeq L_m(r'')\times L_{m'}(1)\,.$$

Man beachte: Zu Zahlen r, r', r'', welche die Kongruenzgleichung erfüllen, findet man innerhalb ihrer Kongruenzklasse $\bmod (m,m')$ stets Repräsentanten, die teilerfremd zum zugehörigen Linsenraummodul sind. Es gilt nämlich:

(1) Sind a, b, c ganze Zahlen und $(a,b,c)=1$, so gibt es ein $a'\equiv a \bmod b$, so daß $(a',c)=1$ ist.

---

[4] Siehe hierzu: R. C. Alperin, R. K. Dennis, M. R. Stein, *The Nontriviality of $SK_1(Z\pi)$*, Proc. on the Conf. on Orders, Group Rings and Related Topics (Ohio 1972), S. 1–7, Berlin 1973; sowie M. R. Stein, *Whitehead Groups of finite Groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), S. 201–212.

[5] Zur Abkürzung benutzen wir auch "(,)" für den größten gemeinsamen Teiler.

Im folgenden werden wir die Bedingung, daß Verdrillungszahlen stets teilerfremd zum zugehörigen Linsenraummodul gewählt werden, nicht eigens erwähnen.

FOLGERUNG AUS SATZ 1.

a) $L_{m_1}(r_1)\times L_{m_2}(r_2)\times\ldots\times L_{m_s}(r_s)\simeq L_{m_1}(r)\times L_{m_2}(1)\times\ldots\times L_{m_s}(1)$ *für*

$$r\equiv\prod_{i=1}^{s} r_i \bmod \mathrm{ggT}(m_1,\ldots,m_s)\,,$$

b) $L_{m_1}(r_1)\times\ldots\times L_{m_s}(r_s)\simeq L_{m_1}(r_1')\times\ldots\times L_{m_s}(r_s')$ *für*

$$\prod_{i=1}^{s} r_i\equiv\prod_{i=1}^{s} r_i' \bmod \mathrm{ggT}(m_1,\ldots,m_s)\,.$$

Auch hier gilt nach (1), daß die Forderungen über Teilerfremdheit, die implizit in der 1. bzw. 3. Zeile enthalten sind, durch Abändern der $r_i^{(\prime)}$ modulo $\mathrm{ggT}(m_1,\ldots,m_s)$ erfüllbar sind.

Beweis der Folgerung. Hat man Verdrillungszahlen $r_1,\ldots,r_s$ vorgegeben, so gibt es ebenfalls nach (1) modulo der zugehörigen Drehnenner Repräsentanten von r_i, welche teilerfremd zu $\mathrm{kgV}(m_1,\ldots,m_s)$ sind. Durch sukzessives Zusammenfassen nach Satz 1 kann man ihr Produkt $r_{(0)}=r_1\cdot\ldots\cdot r_s$ als Verdrillungszahl in jeden der Faktoren verschieben (alle übrigen Verdrillungszahlen $=1$), o.B.d.A. in den letzten Faktor. Eine Verdrillungszahl ist nur modulo Drehnenner festgelegt. Deshalb kann man $r_{(0)}$ in $L_{m_s}(r_{(0)})$ $\bmod m_s$ modifizieren zu $r_{(1)}$ und $r_{(1)}$ falls es teilerfremd zu m_{s-1} ist, in den $(s-1)$-ten Faktor verschieben. Für $L_{m_{s-1}}(r_{(1)})$ wiederhole man die Prozedur und verschiebe weiter nach links. Dabei läßt sich $r_{(0)}$ sukzessive modulo $m_s, m_{s-1},\ldots,m_1$ zu $r_{(1)},\ldots,r_{(s)}$ abändern. Trotz der einschränkenden Bedingungen $(r_{(i)},m_{s-1})=1$ beim Übergang von einem Faktor zum nächsten, erreicht man auf diese Weise alle Variationen von r modulo $\mathrm{ggT}(m_1,\ldots,m_s)$, die teilerfremd zu m_1 sind, als Verdrillungszahl des ersten Faktors (alle übrigen Verdrillungszahlen $=1$). Das entspricht nämlich induktiv der Behauptung, daß die folgenden Mengen gleich sind:

$$\{r_{(i)}\in\boldsymbol{Z}\colon (r_{(i)},m_{s-i+1})=1 \text{ und } r_{(i)}\equiv r_{(0)} \bmod (m_{s-i+1},m_{s-i},\ldots,m_s)\}$$

und

$$\{r_{(i)}\in\boldsymbol{Z}\colon (r_{(i)},m_{s-i+1})=1 \text{ und } \exists\, r_{(i-1)}\equiv r_{(i)} \bmod m_{s-i+1},\ \text{so daß}$$
$$(r_{(i-1)},m_{s-i})=1 \text{ und } r_{(i-1)}\equiv r_{(0)} \bmod (m_{s-i},\ldots,m_s) \text{ ist}\}\,,$$

was durch umständliche aber elementare Kongruenzrechnung nachprüfbar ist.

$r_s=r$ gesetzt liefert Folgerung a), zweifaches Anwenden von a) ergibt b).

SATZ 2. *Seien* p^x, $p^{x'}$ $(x\geqslant 0,\ x'\geqslant 0)$ *Potenzen der gleichen Primzahl* p *und* $(m\cdot m',p)=1$, *so gibt es eine Homotopieäquivalenz*:

$$L_{mp^x}(r)\times L_{m'p^{x'}}(1)\simeq L_{mp^{x'}}(r')\times L_{m'p^x}(1)\ [6]$$

mit $r'\equiv r \bmod m$ *und* $r'\equiv -r \bmod p^{x'}$.

---

[6] Kommt der Drehnenner 1 vor, so ist für den entsprechenden Linsenraum S^3 zu setzen.

Beweis des Theorems. Nach Folgerung b) aus Satz 1 verschieben wir zunächst sämtliche Verdrillungszahlen in den ersten Linsenräumfaktor:

$$L_{m_1}(r_1)\times\ldots\times L_{m_s}(r_s)\simeq Lm_1(r)\times L_{m_2}(1)\times\ldots\times L_{m_s}(1)$$

mit:

$$r\equiv\prod_{i=1}^{s} r_i \bmod \mathrm{ggT}(m_1,\ldots,m_s)\,.$$

Durch sukzessive Transpositionen nach Satz 2 lassen sich nun für jede Primzahl p, die in der Folge (m_i) der Drehnenner als Teiler auftaucht, die Primpotenzteiler $p^{\varkappa_p(i)}$ von m_i nach der Größe ihrer Exponenten ordnen. Auf diese Weise wird die Folge der Drehnenner in eine Elementarteilerkette $(e_1|e_2|\ldots|e_s)$ transformiert. Jede Transposition nach Satz 2 verursacht in genau einem der beteiligten Linsenräume eine Änderung der Verdrillungszahl modulo der von der Transposition betroffenen Primpotenz um den Faktor (-1). Diese Änderung läßt sich gemäß Satz 1 wieder auf die erste Verdrillungszahl verschieben. Bezeichnet t_p die Anzahl der Transpositionen, die notwendig sind, um die Primpotenzteiler $p^{\varkappa_p(i)}$ der Größe nach zu ordnen, so erhält man:

(2) $L_{m_1}(r)\times L_{m_2}(1)\times\ldots\times L_{m_s}(1)\simeq L_{e_1}(r')\times L_{e_2}(1)\times\ldots\times L_{e_s}(1)$ wobei r' bestimmt ist durch

$$r'\equiv r\cdot(-1)^{t_p} \bmod p^{\varkappa_p} \quad \text{für jede Primpotenz ;}$$

$$p^{\varkappa_p}\ \text{von}\ e_1=\mathrm{ggT}(m_1,\ldots,m_s)\,.$$

Die rechte Seite von (2) ist gewissermaßen eine Normalform bezüglich Homotopieäquivalenz allerdings mit folgenden zusätzlichen Variationsmöglichkeiten:

1) Ist p ein Primteiler von $e_1=\mathrm{ggT}(m_1,\ldots,m_s)$, dessen Folge von Primpotenzteilern $p^{\varkappa_p(i)}$ $(i=1,\ldots,s)$ gleiche Exponenten $\varkappa_p(i)=\varkappa_p(j)$ für $i\neq j$ enthält, so ändert eine "unwesentliche" Transposition dieser Primpotenzteiler die Folge der Drehnenner nicht. Die zugehörige Homotopieäquivalenz ändert indessen die Kongruenzklasse von r' modulo $p^{\varkappa_p}$ um den Faktor (-1).

2) Betrachtet man die Homotopieäquivalenzen eines einzelnen Linsenraumes, z.B. des ersten Faktors, so gilt: $L_{e_1}(r')\simeq L_{e_1}(\pm k^2r')$ für jede zu e_1 teilerfremde Zahl k. r' kann also um den Faktor $(\pm k^2)$ modulo e_1 modifiziert werden.

Damit haben wir unter Voraussetzung der Gültigkeit von Satz 1 und 2 das Theorem bewiesen.

III. Homogenitätstransformationen. Paare komplexer Zahlen bilden den Schiefkörper $\boldsymbol{H}$ der Quaternionen bezüglich gewöhnlicher komponentenweiser Addition und folgender Multiplikation:

$$q\cdot q'=(z_1,z_2)\cdot(w_1,w_2):=(z_1w_1-z_2\overline{w}_2,\ z_1w_2+z_2\overline{w}_1)\,.$$

Es gilt:

$$|q\cdot q'|=|q|\cdot|q'|$$

mit $|q|=|(z_1,z_2)|:=\sqrt{|z_1|^2+|z_2|^2}$ in $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}$.

Demzufolge ist $S^3=\{q\in\boldsymbol{H}\colon |q|=1\}$ bezüglich der Quaternionenmultiplikation abgeschlossen und bildet eine Gruppe mit $\overline{q}:=(\overline{z}_1,-z_2)$ als Inversem zu $q=(z_1,z_2)$.

Die Unteralgebra $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\times\{0\}$ von $\boldsymbol{H}$ operiert auf $\boldsymbol{H}$ durch Rechts und Linksmultiplikationen. Da die Einbettung von $\boldsymbol{C}$ in $\boldsymbol{H}$ normtreu ist, operiert auch S^1 auf S^3 auf diese Weise von links und rechts.

Seien $(z_1,z_2)\in S^3\subset\boldsymbol{H}$ und $\sigma=e^{2\pi i/m}\in S^1\subset\boldsymbol{C}$.

Die ausgezeichnete erzeugende Operation g auf S^3 (siehe [5] Kap. I), welche den Linsenraum $L_m(r):=L(m;1,r)$ als Quotient von S^3 definiert,

(3) $$g(z_1,z_2)=(z_1\sigma,\ z_2\sigma^r)\,,$$

läßt sich quaternionisch folgendermaßen schreiben:

(4) $$g(z_1,z_2)=\sigma^a\cdot(z_1,z_2)\cdot\sigma^b=(z_1\sigma^{a+b},\ z_2\sigma^{a-b})\,.$$

Dabei sind a und b ganze Zahlen, welche die Kongruenzen: $a+b\equiv 1 \bmod m$ und $a-b\equiv r \bmod m$ erfüllen.

Solche Zahlen a, b lassen sich immer finden:

Man setze für gerades m ($\Rightarrow r$ ist wegen $(r,m)=1$ ungerade)

$$a=\tfrac{1}{2}(1+r)\,,\qquad b=\tfrac{1}{2}(1-r)$$

und für ungerades m ($\Rightarrow 2$ ist modulo m invertierbar)

$$a\equiv 2^{-1}(1+r) \bmod m\,,\qquad b\equiv 2^{-1}(1-r) \bmod m\,.$$

Zur abkürzenden Beschreibung der Operation beziehen wir uns auf die beiden Schreibweisen (3) und (4) des ausgezeichneten Homöomorphismus und sagen, die Operation von $\boldsymbol{Z}_m$ auf S^3 ist

"*vom (komplexen) Typ* $[(\sigma^1,\sigma^r)]$"

bzw.

"*vom (quaternionischen) Typ* $[\sigma^a\circ\sigma^b]$".

Für ein Produkt von Linsenräumen $L_m(r)\times L_{m'}(r')$ mit erzeugenden Operationen g, g' schreibt sich die Operation $g^x g'^y$ auf $S^3\times S^3$ quaternionisch:

$$g^x g'^y(q,q')=(\sigma^{xa}\cdot q\cdot\sigma^{xb},\ \sigma'^{ya'}\cdot q'\cdot\sigma'^{yb'})$$

mit

$$\sigma=e^{2\pi i/m}\,,\quad \sigma'=e^{2\pi i/m}\,,\quad a+b\equiv 1 \bmod m\,,\quad a'+b'\equiv 1 \bmod m'$$
$$a-b\equiv r \bmod m\,,\quad a'-b'\equiv r' \bmod m'\,.$$

Wir sagen kurz: Die Operation ist "*vom Typ* $[\sigma^a\circ\sigma^b,\ \sigma'^{a'}\circ\sigma'^{b'}]$".

Die beiden zyklischen Operationen g, g' eines Produktes zweier Linsenräume, die zunächst nach den S^3-Faktoren getrennt sind, sollen mittels Homotopieäquivalenzen vermischt werden. Welche "gemischten Operationen" zugelassen sind, ist im folgenden präzisiert:

Sei $\sigma=e^{2\pi i/m}$, $\sigma'=e^{2\pi i/m}$; unter einer *quaternionischen Operation von* $\boldsymbol{Z}_m\oplus\boldsymbol{Z}_{m'}$

auf S^3 *vom Typ* $[\sigma^a \sigma'^{a'} \circ \sigma^b \sigma'^{b'}]$ verstehen wir eine Operation, welche den Erzeugenden $(1, 0)$ bzw. $(0, 1) \in \boldsymbol{Z}_m \oplus \boldsymbol{Z}_{m'}$ die Homöomorphismen:

$$(z_1, z_2) \to \sigma^a \cdot (z_1, z_2) \cdot \sigma^b = (\sigma^{a+b} z_1, \sigma^{a-b} z_2)$$

bzw.

$$(z_1, z_2) \to \sigma'^{a'} \cdot (z_1, z_2) \cdot \sigma'^{b'} = (\sigma'^{a'+b'} z_1, \sigma'^{a'-b'} z_2)$$

zuordnet (a, a', b, b' seien dabei beliebige ganze Zahlen). Damit ist die Operation der gesamten Gruppe festgelegt. Man beachte, daß eine solche Operation i.a. weder frei noch effektiv ist.

Eine Abbildung f von S^3 nach S^3 heiße *homogen vom Typ*

$$[\sigma^a \sigma'^{a'} \circ \sigma^b \sigma'^{b'}] \to [\sigma^c \sigma'^{c'} \circ \sigma^d \sigma'^{d'}],$$

wenn sie die erste in die zweite Operation überführt, d.h. wenn für jedes $q \in S^3$ und beliebige ganze Zahlen x, y

$$f(\sigma^{xa} \sigma'^{ya'} \cdot q \cdot \sigma^{xb} \sigma'^{yb'}) = \sigma^{xc} \sigma'^{yc'} \cdot f(q) \cdot \sigma^{xd} \sigma'^{yd'}$$

gilt. Die Homogenität ist natürlich schön dadurch gewährleistet, daß für jedes $q \in S^3$

$$f(\sigma^a \cdot q \cdot \sigma^b) = \sigma^c \cdot f(q) \cdot \sigma^d$$

sowie

$$f(\sigma'^{a'} \cdot q \cdot \sigma'^{b'}) = \sigma'^{c'} \cdot f(q) \cdot \sigma'^{d'}$$

gilt.

Ist ein Paar von quaternionischen Operationen der Gruppe $\boldsymbol{Z}_m \oplus \boldsymbol{Z}_{m'}$ auf S^3 vom Typ $[\sigma^{a_1} \sigma'^{a_1'} \circ \sigma^{b_1} \sigma'^{b_1'}]$ bzw. $[\sigma^{a_2} \sigma'^{a_2'} \circ \sigma^{b_2} \sigma'^{b_2'}]$ gegeben, welches sich zu einer *freien* Operation von $\boldsymbol{Z}_m \oplus \boldsymbol{Z}_{m'}$ auf $S^3 \times S^3$ zusammensetzt, in dem Sinne, daß für $(x, y) \neq$ $\neq (0, 0) \in \boldsymbol{Z}_m \oplus \boldsymbol{Z}_{m'}$ die Homöomorphismen

$$g^x g'^y \colon (q_1, q_2) \to (\sigma^{xa_1} \sigma'^{ya_1'} \cdot q_1 \cdot \sigma^{xb_1} \sigma'^{yb_1'}, \sigma^{xa_2} \sigma'^{ya_2'} \cdot q_2 \cdot \sigma^{xb_2} \sigma'^{yb_2'})$$

fixpunktfrei operieren, dann nennen wir diese freie Operation von $\boldsymbol{Z}_m \oplus \boldsymbol{Z}_{m'}$ auf $S^3 \times S^3$ "*quaternionisch vom Typ* $[\sigma^{a_1} \sigma'^{a_1'} \circ \sigma^{b_1} \sigma'^{b_1'}, \sigma^{a_2} \sigma'^{a_2'} \circ \sigma^{b_2} \sigma'^{b_2'}]$".

DEFINITION 1. Ist

$$f \colon S^3 \times S^3 \to S^3 \times S^3,$$
$$(q_1, q_2) \mapsto (f_1(q_1, q_2), f_2(q_1, q_2))$$

eine Homotopieäquivalenz, welche eine quaternionische Operation der Gruppe $\boldsymbol{Z}_m \oplus \boldsymbol{Z}_{m'}$ vom

$$\text{Typ } [\sigma^{a_1} \sigma'^{a_1'} \circ \sigma^{b_1} \sigma'^{b_1'}, \sigma^{a_2} \sigma'^{a_2'} \circ \sigma^{b_2} \sigma'^{b_2'}]$$

in eine quaternionische Operation der gleichen Gruppe vom

$$\text{Typ } [\sigma^{c_1} \sigma'^{c_1'} \circ \sigma^{d_1} \sigma'^{d_1'}, \sigma^{c_2} \sigma'^{c_2'} \circ \sigma^{d_2} \sigma'^{d_2'}]$$

überführt, d.h. für jedes $(q_1, q_2) \in S^3 \times S^3$ und beliebige ganze Zahlen x, y der Gleichung

$$(5) \quad f(\sigma^{xa_1} \sigma'^{ya_1'} \cdot q_1 \cdot \sigma^{xb_1} \sigma'^{yb_1'}, \sigma^{xa_2} \sigma'^{ya_2'} \cdot q_2 \cdot \sigma^{xb_2} \sigma'^{yb_2'})$$
$$= (\sigma^{xc_1} \sigma'^{yc_1'} \cdot f_1(q_1, q_2) \cdot \sigma^{xd_1} \sigma'^{yd_1'}, \sigma^{xc_2} \sigma'^{yc_2'} \cdot f_2(q_1, q_2) \cdot \sigma^{xd_2} \sigma'^{yd_2'})$$

genügt, so nennen wir f eine *Homogenitätstransformation vom Typ*

$$[\sigma^{a_1} \sigma'^{a_1'} \circ \sigma^{b_1} \sigma'^{b_1'}, \sigma^{a_2} \sigma'^{a_2'} \circ \sigma^{b_2} \sigma'^{b_2'}] \to [\sigma^{c_1} \sigma'^{c_1'} \circ \sigma^{d_1} \sigma'^{d_1'}, \sigma^{c_2} \sigma'^{c_2'} \circ \sigma^{d_2} \sigma'^{d_2'}].$$

Bemerkung. Es ist zu beachten, daß quaternionische Operationen auf $S^3 \times S^3$ per Definition frei sind, und daß f als Selbstäquivalenz von $S^3 \times S^3$ surjektiv ist. Dies hat zur Folge, daß der Transformationstyp einer Homogenitätstransformation anders als bei homogenen Abbildungen eindeutig durch den Typ der Operation auf dem Definitionsbereich festgelegt ist. Insbesondere legt f eindeutig einen Isomorphismus der gegebenen operierenden Gruppen fest.

Aus dem Satz von Whitehead, daß eine Abbildung zwischen CW-Komplexen genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn sie Isomorphismen der Fundamentalgruppen und der Homologiegruppen der universellen Überlagerungen induziert (s.z.B. [4] VIII Theorem 3.7), folgt unmittelbar:

LEMMA 1. *Die von einer Homogenitätstransformation induzierte Abbildung der Quotientenräume ist selbst eine Homotopieäquivalenz.*

Die CW-Zerlegungen der Quotientenräume erhält man analog der für Produkte von Linsenräumen aus geeigneten äquivarianten Zellzerlegungen von $S^3 \times S^3$.

Was die Isomorphismen der Homologiegruppen betrifft, so genügt es, den Isomorphismus der 3. Homologiegruppen nachzuprüfen, denn es gilt:

LEMMA 2. *Eine Selbstabbildung f von $S^3 \times S^3$ induziert genau dann Isomorphismen der Homologiegruppen, (d.h. ist eine Homotopieäquivalenz), wenn f einen Isomorphismus $f_* \colon H_3(S^3 \times S^3) \xrightarrow{\cong} H_3(S^3 \times S^3)$ induziert.*

Dies entspricht der Forderung in [5], daß die Matrix der partiellen Abbildungsgrade regulär ist (siehe [5] Kap. II).

Bemerkung. Eine analoge Aussage gilt für Selbstabbildungen von $S^{2n-1} \times S^{2n-1}$.

Beweis. Durch cup-Produkt-Rechnung ergibt sich, daß die Determinante der obigen Matrix (die den Homomorphismus der 3. Homologiegruppen $H_3(S^3 \times S^3) = \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$ angibt), den Abbildungsgrad von f bestimmt.

Homogenitätstransformationen sind das Werkzeug in den Beweisen von Satz 1 und 2. Die dort angegebenen Homotopieäquivalenzen werden aus Folgen "elementarer Homogenitätstransformationen" konstruiert, welche sich aus Produkten homogener Funktionen zusammensetzen.

Unter einem *Produkt zweier Abbildungen* $h_1\colon S_1^3 \to S^3$ und $h_2\colon S_2^3 \to S^3$ wollen wir wahlweise die Abbildung

$$h_1 \cdot h_2\colon S_1^3 \times S_2^3 \to S^3,$$
$$(q_1, q_2) \mapsto h_1(q_1)\cdot h_2(q_2)$$

oder

$$h_2 \cdot h_1\colon S_1^3 \times S_2^3 \to S^3,$$
$$(q_1, q_2) \mapsto h_2(q_2)\cdot h_1(q_1)$$

verstehen.

Ist auf $S_1^3 \times S_2^3$ eine quaternionische Operation von $\boldsymbol{Z}_m \oplus \boldsymbol{Z}_{m'}$ des Typs $[\sigma^{a_1}\sigma'^{a_1'} \circ \sigma^{b_1}\sigma'^{b_1'}, \sigma^{a_2}\sigma'^{a_2'} \circ \sigma^{b_2}\sigma'^{b_2'}]$ vorgegeben, und sind h_1 und h_2 homogen vom Typ

$$[\sigma^{a_1}\sigma'^{a_1'} \circ \sigma^{b_1}\sigma'^{b_1'}] \xrightarrow{h_1} [\sigma^{c}\sigma'^{c'} \circ \sigma^{d}\sigma'^{d'}]$$

und

$$[\sigma^{a_2}\sigma'^{a_2'} \circ \sigma^{b_2}\sigma'^{b_2'}] \xrightarrow{h_2} [\sigma^{e}\sigma'^{e'} \circ \sigma^{f}\sigma'^{f'}],$$

so heiße das Produkt $h_1 \cdot h_2$ (bzw. $h_2 \cdot h_1$) "*zulässig*", falls

$$d \equiv -e \bmod m \quad \text{und} \quad d' \equiv -e' \bmod m'$$
$$(\text{bzw. } c \equiv -f \bmod m \quad \text{und} \quad c' \equiv -f' \bmod m')$$

ist.

Das ist, kurz gesagt, die Bedingung dafür, daß sich bei der Multiplikation die "mittleren Operationen wegkürzen", und somit $h_1 \cdot h_2$ (bzw. $h_2 \cdot h_1$) die gegebene quaternionische Operation von $\boldsymbol{Z}_m \oplus \boldsymbol{Z}_{m'}$ auf $S_1^3 \times S_2^3$ in eine quaternionische Operation der gleichen Gruppe auf S^3 vom Typ $[\sigma^{c}\sigma'^{c'} \circ \sigma^{f}\sigma'^{f'}]$ (bzw. $[\sigma^{e}\sigma'^{e'} \circ \sigma^{d}\sigma'^{d'}]$) überführt. Als "*elementar*" bezeichnen wir solche Homogenitätstransformationen

$$f\colon S^3 \times S^3 \to S^3 \times S^3,$$
$$(q_1, q_2) \to (f_1(q_1, q_2), f_2(q_1, q_2)),$$

für die $f_1(q_1, q_2)$ ein zulässiges Produkt homogener Funktionen $h_1(q_1)$ und $h_2(q_2)$ und $f_2(q_1, q_2)$ ein zulässiges Produkt homogener Funktionen $h_3(q_1)$ und $h_4(q_2)$ ist.

Eine Abbildung von der obigen Form ist nach Def. 1 und Lemma 2 genau dann eine Homogenitätstransformation, wenn sie die gegebene quaternionische Operation wieder in eine (*freie*) quaternionische Operation der gleichen Gruppe überführt und Isomorphismen der 3. Homologiegruppen induziert.

Für Abbildungen der obigen Bauweise setzt sich die Matrix der partiellen Abbildungsgrade (d_{ij}), (siehe [5]), aus den Abbildungsgraden der homogenen Funktionen h_1, h_2, h_3, h_4 zusammen als:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} h_1 & \operatorname{grad} h_2 \\ \operatorname{grad} h_3 & \operatorname{grad} h_4 \end{pmatrix}$$

Als homogene Funktionen h_1, h_2, h_3, h_4 einer elementaren Homogenitätstransformation verwenden wir ausschließlich "*Windungsfunktionen*":

$$h_{t_1,t_2}\colon S^3 \to S^3,$$
$$(|z_1|e^{i\varphi_1}, |z_2|e^{i\varphi_2}) \mapsto (|z_1|e^{it_1\varphi_1}, |z_2|e^{it_2\varphi_2})$$

(t_1 und t_2 ($\in \boldsymbol{Z}$) heißen die "Windungszahlen" von h_{t_1,t_2}).

Sind σ, σ' beliebige Einheitswurzeln, x, y, x', y' beliebige ganze Zahlen, so kann man h_{t_1,t_2} den komplexen Transformationstyp

$$[(\sigma^{x}\sigma'^{x'}, \sigma^{y}\sigma'^{y'})] \to [(\sigma^{t_1 x}\sigma'^{t_1 x'}, \sigma^{t_2 y}\sigma'^{t_2 y'})] \tag{6}$$

zuordnen, wobei zu beachten ist, daß eine Windungsfunktion i.a. eine quaternionische Operation nicht wieder in eine solche überführt. Wir werden jedoch nur solche Windungsfunktionen verwenden, welche bezüglich vorgegebener quaternionischer Operationen homogen sind. Eine Windungsfunktion h_{t_1,t_2} hat, wie man leicht verifiziert, den Abbildungsgrad $t_1 \cdot t_2$.

Lemma 3. *Seien* $\sigma = e^{2\pi i/m}$, $\sigma' = e^{2\pi i/m'}$, $\operatorname{kgV} := \operatorname{kgV}(m, m')$ *und* a, a', b, b' *beliebige ganze Zahlen, dann gilt*:

h_{t_1,t_2} ist für:

$$(t_1, t_2) \equiv \left\{\begin{matrix} (1, 1) \\ (1, -1) \\ (-1, 1) \\ (-1, -1) \\ (x, x) \end{matrix}\right\} \bmod \operatorname{kgV}$$

homogen vom Typ:

$$[\sigma^{a}\sigma'^{a'} \circ \sigma^{b}\sigma'^{b'}] \to \left\{\begin{matrix} [\sigma^{a}\sigma'^{a'} \circ \sigma^{b}\sigma'^{b'}], \\ [\sigma^{b}\sigma'^{b'} \circ \sigma^{a}\sigma'^{a'}], \\ [\bar\sigma^{b}\bar\sigma'^{b'} \circ \bar\sigma^{a}\bar\sigma'^{a'}], \\ [\bar\sigma^{a}\bar\sigma'^{a'} \circ \bar\sigma^{b}\bar\sigma'^{b'}], \\ [\sigma^{xa}\sigma'^{xa'} \circ \sigma^{xb}\sigma'^{xb'}]. \end{matrix}\right.$$

Der Beweis folgt aus (6), wenn man im obigen Schema zum komplexen Transformationstyp übergeht.

Lemma 4. *Ist eine Linsenraumoperation vom Typ* $[\sigma^a \circ \sigma^b]$ *gegeben, so gibt es zu beliebigen ganzen Zahlen* x *und* y *Windungsfunktionen, welche homogen vom Typ*:

$$[\sigma^a \circ \sigma^b] \to [\sigma^x \circ \sigma^y]$$

sind.

Beweis. Ist die Ordnung der Linsenraumoperation m, so gilt nach Voraussetzung: $a+b$ sowie $a-b$ sind teilerfremd zu m. Wähle

$$t_1 \equiv (a+b)^{-1}\cdot(x+y) \bmod m,$$
$$t_2 \equiv (a-b)^{-1}\cdot(x-y) \bmod m,$$

$\Rightarrow h_{t_1,t_2}$ ist homogen vom gewünschten Typ.

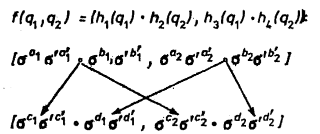
Zur Schreibweise. Eine elementare Homogenitätstransformation ist vollständig charakterisiert durch

1. die Angabe der homogenen Funktionen, welche wir als Matrix

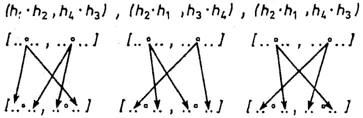
$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix}$$

notieren,

2. das "Transformationsschema", eine detailliertere Schreibweise des quaternionischen Transformationstyps, wobei durch senkrechte Pfeile angedeutet wird, von welcher Seite die Gegendiagonal-Funktionen $h_2(q_2)$ bzw. $h_3(q_1)$ an die "Diagonal-Funktionen" $h_1(q_1)$ bzw. $h_4(q_2)$ anmultipliziert werden, z. B. für



bzw. für die übrigen drei Fälle:



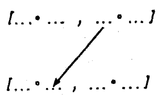
Bezeichnung. "*Spezielle* (*elementare*) *Homogenitätstransformationen*", welche Homöomorphismen sind, erhält man, wenn man die "Diagonal-Funktionen" h_1 und h_4 als Identität (S^3) und h_2 oder h_3 als triviale Abbildung wählt, die alles auf den Basispunkt $(1, 0) \in S^3$ abbildet:

$$\text{z. B.}\quad f(q_1, q_2) = (q_1 \cdot h_2(q_2), q_2).$$

Hierbei braucht man lediglich die Zulässigkeit der Multiplikation bezüglich der vorgegebenen quaternionischen Operation zu fordern; die Bildoperation ist im Sinne von Gleichung (5) eindeutig definiert und frei, da f ein Homöomorphismus ist mit der Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(q_1, q_2) = (q_1 \cdot \overline{h_2(q_2)}, q_2).$$

Im Transformationsschema notieren wir spezielle Homogenitätstransformationen mit nur einem Pfeil für die "wesentliche" homogene Funktion (h_2 oder h_3). In unserem Beispiel ist dies h_2:



IV. Beweis der Sätze 1 und 2.

Beweis von Satz 1. Wir gehen aus von $L_m(r) \times L_{m'}(r')$ mit den zugehörigen Linsenraumoperationen vom Typ

$$[(\sigma, \sigma^r), (\sigma', \sigma'^{r'})] \text{ in komplexer Schreibweise}$$

bzw.

$$[\sigma^a \circ \sigma^b, \sigma'^{a'} \circ \sigma'^{b'}] \text{ in quaternionischer Schreibweise}$$

$$\begin{aligned} &(\text{mit } \sigma = e^{2\pi i/m}, \quad \sigma' = e^{2\pi i/m'}, \\ &\qquad a+b \equiv 1 \bmod m \quad a'+b' \equiv 1 \bmod m', \\ &\qquad a-b \equiv r \bmod m \quad a'-b' \equiv r' \bmod m'). \end{aligned}$$

Nach (1) können wir o. E. voraussetzen, daß r und r' teilerfremd zu $\mathrm{kgV} := \mathrm{kgV}(m, m')$ sind. Zu $r \cdot r'$ existiert ein Paar von ganzen Zahlen x_1, x_2 mit der Eigenschaft:

(7) $$x_1^2 - x_2^2 \equiv r \cdot r' \bmod \mathrm{kgV},$$

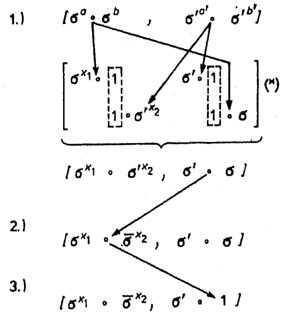
nämlich:

(8) $x_{\underset{(2)}{1}} = \dfrac{1(\overset{+}{-})rr'}{2}$, falls kgV gerade ($\Rightarrow r \cdot r'$ ungerade) ist,

$x_{\underset{(2)}{1}} \equiv 2^{-1} \cdot (1(\overset{+}{-})r \cdot r')$, falls kgV ungerade ist.

Es gilt: $(x_1, x_2, \mathrm{kgV}) = 1$, da nach (7) $(x_1^2 - x_2^2, \mathrm{kgV}) = 1$ ist.

Wir geben nun das Transformationsschema einer Folge elementarer Homogenitätstransformation an, welche eine Homotopieäquivalenz zwischen $L_m(r) \times L_m(r')$ und $L_m(r \cdot r') \times L_{m'}(1)$ stiftet:



(*) Um die Bauweise der 1. (komplizierteren) Homogenitätstransformation zu verdeutlichen, ist der Typ der Bildoperationen der einzelnen homogenen Funktionen $h_1, \ldots, h_4$ (den Pfeilen entsprechend) eingesetzt, wobei die untereinanderstehenden mit ⬚ eingekreisten Teile der Operation den „sich wegkürzenden mittleren Operationen" entsprechen.

(Umformen in komplexe Schreibweise am Ende der Transformationskette ergibt, mit (8) eingesetzt, das Paar der ausgezeichneten erzeugenden Operationen zu $L_m(r\cdot r')\times L_{m'}$ (1).)

Zu 1.) Die 1. elementare Homogenitätstransformation setzt sich aus folgenden Windungsfunktionen zusammen:

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{x_1, x_1\cdot r^{-1}} & h_{x_2, -x_2\cdot r'^{-1}} \\ h_{1,-r^{-1}} & h_{1,r'^{-1}} \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen r^{-1}, r'^{-1} sind dabei als Inverse zu r, r' $\operatorname{mod}\operatorname{kgV}(m, m')$ zu verstehen.

Daß die h_i den im Schema angegebenen Transformationstyp haben, sieht man durch Übergang zu komplexer Schreibweise und Vergleich mit (6): z. B. entspricht der Pfeil von links oben nach links unten einer homogenen Funktion h_1 vom Typ

$$[\sigma^a\circ\sigma^b]\to[\sigma^{x_1}\circ 1]\,,\quad \text{komplex geschrieben}\,,$$
$$[(\sigma, \sigma^r)]\to[(\sigma^{x_1}, \sigma^{x_1})]\,.$$

$h_{x_1, x_1 r^{-1}}$ hat diesen Transformationstyp, da $x_1\cdot r^{-1}\cdot r\equiv x_1 \operatorname{mod}\operatorname{kgV}$ ist.

Der zugehörige $H_3(S^3\times S^3)$-Homomorphismus ist durch die Matrix der Partialgrade

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} h_1 & \operatorname{grad} h_2 \\ \operatorname{grad} h_3 & \operatorname{grad} h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 r^{-1} & -x_2^2 r'^{-1} \\ -r^{-1} & r'^{-1} \end{pmatrix}$$

gegeben, deren Determinante $\equiv 1$ modulo kgV ist; denn nach (7) gilt

$$x_1^2 r^{-1} r'^{-1} - x_2^2 r^{-1} r'^{-1} = (x_1^2 - x_2^2)\cdot r^{-1} r'^{-1} \equiv 1 \operatorname{mod}\operatorname{kgV}. \tag{9}$$

Durch Variation der Windungszahlen von h_1, h_2, h_3, h_4:

$$\{x_1, x_1 r^{-1}\},\ \{x_2, -x_2 r'^{-1}\},\ \{1, -r^{-1}\},\ \{1, r'^{-1}\} \operatorname{mod}\operatorname{kgV}$$

(die Kongruenzklassen sind allein für den Transformationstyp wesentlich), kann man den Wert der Determinante (9) zu 1 korrigieren. Das ist z. B. auf folgende Weise möglich:

Seien x_1, x_2 feste ganze Zahlen, die Gleichung (7) erfüllen; ebenso seien r^{-1}, r'^{-1} feste ganze Zahlen, die den Gleichungen

$$r^{-1}\cdot r\equiv 1 \operatorname{mod}\operatorname{kgV},\qquad r'^{-1}\cdot r'\equiv 1 \operatorname{mod}\operatorname{kgV}$$

genügen. Wegen $(x_1, x_2, \operatorname{kgV}) = (r, \operatorname{kgV}) = (r', \operatorname{kgV}) = 1$ gilt:

$$(x_1, \operatorname{kgV}, x_2 r^{-1} r'^{-1}) = (r^{-1}, \operatorname{kgV}, x_2 r^{-1} r'^{-1}) = (r'^{-1}, \operatorname{kgV}, x_2 r^{-1} r'^{-1}) = 1$$

und man kann nach (1) die jeweils ersten Zahlen

$$x_1,\ r^{-1},\ r'^{-1}$$

modulo kgV zu

$$\hat{x}_1,\ (\widehat{r^{-1}}),\ (\widehat{r'^{-1}})$$

abändern, so daß sie teilerfremd zu $x_2 r^{-1} r'^{-1}$ werden.

Ersetzen wir in (9) den ersten Summanden $x_1^2 r^{-1} r'^{-1}$ durch $(\hat{x}_1^2\widehat{r^{-1}})(\widehat{r'^{-1}})$, so bleibt die Kongruenz zu 1 modulo kgV erhalten:

$$\hat{x}_1^2(\widehat{r^{-1}})(\widehat{r'^{-1}}) - x_2^2 r^{-1} r'^{-1} = 1 + s\cdot\operatorname{kgV}$$

doch zusätzlich gilt:

$$\left(\hat{x}_1^2(\widehat{r^{-1}})(\widehat{r'^{-1}}),\ x_2^2 r^{-1} r'^{-1}\right) = 1$$

$\Rightarrow$ es existieren ganze Zahlen k und l, für die

$$k\cdot(\hat{x}_1)^2(\widehat{r^{-1}})(\widehat{r'^{-1}}) - l\cdot x_2^2 r^{-1} r'^{-1} = -s \text{ ist.}$$

Man erhält nun eine reguläre Partialgrad-Matrix, wenn man die Windungszahlen von h_1, h_2, h_3, h_4 innerhalb ihrer Kongruenzklassen modulo kgV wie folgt festlegt:

$$\{\hat{x}_1, \hat{x}_1(\widehat{r^{-1}})\},\ \{x_2, -x_2 r'^{-1}\},\ \{1 + l\cdot\operatorname{kgV}, -r^{-1}\},\ \{1 + k\cdot\operatorname{kgV}, (\widehat{r'^{-1}})\}\,;$$

dies ergibt nämlich die Determinante

$$\operatorname{grad} h_1\cdot\operatorname{grad} h_4 - \operatorname{grad} h_2\cdot\operatorname{grad} h_3$$

(mit $\operatorname{grad} h_i$ = Produkt der Windungszahlen von h_i):

$$\begin{aligned} &\hat{x}_1^2\cdot(\widehat{r^{-1}})(\widehat{r'^{-1}})(1 + k\cdot\operatorname{kgV}) - x_2^2 r^{-1} r'^{-1}\cdot(1 + l\cdot\operatorname{kgV}) \\ &= \hat{x}_1^2(\widehat{r^{-1}})(\widehat{r'^{-1}}) - x_2^2 r^{-1} r'^{-1} + \left(k\cdot\hat{x}_1^2(\widehat{r^{-1}})(\widehat{r'^{-1}}) - l\cdot x_2^2 r^{-1} r'^{-1}\right)\cdot\operatorname{kgV} \\ &= 1 + s\cdot\operatorname{kgV} - s\cdot\operatorname{kgV} = 1\,. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2 liegt demnach eine Homogenitätstransformation vor, wenn man zeigt, daß die Operation unter der Transformation frei bleibt. Das läßt sich leicht nachprüfen oder auch aus dem gesamten Transformationsschema ablesen; denn die nachgeschalteten speziellen Homogenitätsformationen, (welche Diffeomorphismen sind), führen die Operation in ein Produkt von Linsenraumoperationen, $\mathbf{Z}_m\oplus\mathbf{Z}_{m'}$ auf $S^3\times S^3$, über, was nicht möglich wäre, wenn die Operation ihre Eigenschaft, "frei zu sein", verloren hätte.

Die folgenden speziellen Homogenitätsformationen 2) und 3) sind vergleichsweise einfach; man muß lediglich geeignete Windungsfunktionen für die Pfeile einsetzen:

Zu 2)
Der Transformationstyp $[\sigma'\circ\sigma]\to[\bar\sigma'^{x_2}\circ\bar\sigma^{x_2}]$,
komplex geschrieben $[(\sigma'\sigma, \sigma'\bar\sigma)]\to[(\bar\sigma'^{x_2}\bar\sigma^{x_2}, \bar\sigma'^{x_2}\sigma^{x_2})]$,
wird von der Funktion $h_{-x_2', -x_2}$ erfüllt.

Zu 3) Die Windungszahlen t, t' einer Funktion $h_{t,t'}$ des
Transformationstyps $[\sigma^{x_1}\circ\bar\sigma^{x_2}]\to[\bar\sigma\circ 1]$,
komplex geschrieben $[(\sigma^{x_1-x_1}, \sigma^{x_1+x_2})]\to[(\bar\sigma, \bar\sigma)]$,

sind durch die Kongruenzen

$$t \equiv -(x_1-x_2)^{-1} \equiv -(r\cdot r')^{-1} \mod \mathrm{kgV},$$
$$t' \equiv -(x_1+x_2)^{-1} \equiv -1 \mod \mathrm{kgV} \text{ bestimmt}.$$

Der Abschluß des Beweises ergibt sich jetzt aus folgenden Überlegungen:

a) Man kann analog eine Homogenitätstransformation finden, welche die Torsionszahlen in den rechten Linsenraum-Faktor verschiebt:

$$L_m(r)\times L_{m'}(r') \simeq L_m(1)\times L_{m'}(r\cdot r').$$

b) Wie man durch elementare Kongruenzrechnung leicht nachprüft, ist die Bedingung:

$$r'' \equiv r\cdot r' \mod \mathrm{ggT}(m, m') \text{ und } (r'', m) = 1$$

äquivalent zu:

$$(r'', m) = 1 \text{ und es existiert ein } \bar{r}, \text{ mit } (\bar{r}, m') = 1, \text{ so daß}$$
$$r'' \equiv \bar{r} \mod m \quad \text{und} \quad \bar{r} \equiv r\cdot r' \mod m' \text{ ist}.$$

Mittels a) folgt nun:

$$L_m(r)\times L_{m'}(r') \simeq L_m(1)\times L_{m'}(r\cdot r')$$
$$= L_m(1)\times L_{m'}(\bar{r}) \simeq L_m(\bar{r})\times L_{m'}(1) = L_m(r'')\times L_{m'}(1). \blacksquare$$

Bemerkung. Bei dem in Satz 1 vorgegebenen Operationstyp

$$[\sigma^a\circ\sigma^b, \sigma'^{a'}\circ\sigma'^{b'}]$$

kann man nicht mit einer speziellen Homogenitätstransformation starten, da i. a. keine der beiden Operationen es gestattet, mit einem nicht trivialen Transformat der anderen Operation von irgendeiner Seite anzumultiplizieren. Deshalb ist innerhalb der speziellen Homogenitätstransformationen, welche Homöomorphismen liefern, das Verschieben der Torsionszahlen nur dann möglich, wenn eine Operation die Form $\sigma^{(\prime)}\circ 1$ oder $1\circ\sigma^{(\prime)}$ hat, die ein Anmultiplizieren zuläßt. Das entspricht der Torsionszahl 1 oder -1. Man erhält für diesen speziellen Fall Homöomorphismen und mit leicht abgeänderten ("geglätteten") Windungsfunktionen (s. [6], Seite 16) sogar Diffeomorphismen:

$$L_m(r)\times L_{m'}^{\bar{}}(1) \to L_m(1)\times L_{m'}^{\bar{}}(r) \qquad (\text{vgl. [6] Satz 5})$$

Die 1. Homogenitätstransformation in der Transformationskette des Beweises von Satz 1, ebenso wie die 3. Homogenitätstransformation im folgenden Beweis des Satzes 2, liefern i. a. keine Homöomorphismen. Man sieht leicht, daß sie i. a. nicht einmal injektive Abbildungen der Quotientenräume induzieren.

Im Beweis von Satz 2 spalten wir gegebene quaternionische Operationen in ihre Primpotenzanteile auf, indem wir die operierenden primitiven Einheitswurzeln

$\sigma = e^{2\pi i/m}$ und $\sigma' = e^{2\pi i/m'}$ bezüglich der Primpotenzzerlegungen $m = \prod_{j=1}^{t} p_j^{x_j}$ und $m' = \prod_{j=1}^{t} p_j^{x'_j}$ als Produkte primitiver $p_j^{x_j}$-ter bzw. $p_j^{x'_j}$-ter Einheitswurzeln schreiben

$$\sigma = \prod_{j=1}^{t}\sigma_j \text{ mit } \sigma_j = e^{2\pi i l_j/p_j^{x_j}}, \qquad (l_j, p_j^{x_j}) = 1,$$
$$\sigma' = \prod_{j=1}^{t}\sigma'_j \text{ mit } \sigma'_j = e^{2\pi i l'_j/p_j^{x'_j}}, \qquad (l'_j, p_j^{x'_j}) = 1$$

($x_j = 0$ oder $x'_j = 0$ für einzelne j ist zugelassen, man setze dann $\sigma_j = 1$ oder $\sigma'_j = 1$)

Diese Produktzerlegungen sind eindeutig. Aufgrund des Hauptsatzes für simultane Kongruenzen operieren die einzelnen σ_j und σ'_j innerhalb der gegebenen Operation unabhängig voneinander (algebraisch entspricht dies einer Isomorphie $Z_m\oplus Z_{m'} \cong \bigoplus_{j=1}^{t} Z_{p_j}^{x_j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{t} Z_{p_j}^{x'_j}$).

Umgekehrt kann man nach einer Folge von Homogenitätstransformationen Produkte primitiver Primpotenz-Einheitswurzeln $\sigma_j^{u_j}$ und $\sigma_j'^{u'_j}$ mit $(u_j^{(\prime)}, p_j^{x_j^{(\prime)}}) = 1$ zu

$$\tau = \prod_{i=1}^{l}\sigma_{j_i}^{u_{j_i}}\cdot\prod_{k=l+1}^{t}\sigma'^{u'_{j_k}}_{j_k}$$

und

$$\tau' = \prod_{i=1}^{l}\sigma'^{u'_{j_i}}_{j_i}\cdot\prod_{k=l+1}^{t}\sigma_{j_k}^{u_{j_k}}$$

zusammenfassen (wobei $\{j_1, \dots, j_l\}\cup\{j_{l+1}, \dots, j_t\}$ eine disjunkte Aufteilung von $\{1, \dots, t\}$ ist, welche garantiert, daß in τ bzw. τ' nicht zwei Einheitswurzeln σ_j und σ'_j zugleich vorkommen).

Beweis von Satz 2. Aus beweistechnischen Gründen setzen wir o.E. voraus, daß r teilerfremd zu m, m' und p sei [7]. Wir wählen a, b, so daß

$$\left.\begin{aligned} a+b &\equiv 1 \\ a-b &\equiv r \end{aligned}\right\} \mod \mathrm{kgV}(m\cdot p^x, m'\cdot p^{x'}).$$

Ausgehend von einem Paar von Linsenraumoperationen des Typs: $[\sigma^a\circ\sigma^b, \sigma'\circ 1]$ mit $\sigma = e^{2\pi i/mp^x}$ und $\sigma' = e^{2\pi i/m'p^{x'}}$ betrachten wir die Primpotenzanteile dieser Operationen: Sei

$$m = p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_t^{x_t}, \quad m' = p_1^{x'_1}\cdot p_2^{x'_2}\cdot\ldots\cdot p_t^{x'_t} \quad (x_j \geq 0, x'_j \geq 0),$$

und

$$\bar{m} := \mathrm{kgV}(m, m') = \prod_{j=1}^{t} p_j^{\bar{x}_j} \quad (\text{mit } \bar{x}_j = \max(x_j, x'_j) > 0)$$
$$\Rightarrow \mathrm{kgV}(m\cdot p^x, m'\cdot p^{x'}) = \bar{m}\cdot p^{\bar{x}} \quad \text{mit} \quad \bar{x} = \max(x, x') > 0.$$

---

(7) Siehe (1).

In Abhängigkeit von der Verdrillungszahl r bzw. deren "quaternionischer Aufspaltung" in a und b teilen wir die Menge $\mathfrak{P} = \{p_1, \dots, p_t\}$ der Primteiler von $\overline{m} = \mathrm{kgV}(m, m')$ in zwei Klassen auf:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\mathrm{I}} \underset{\text{disj.}}{\cup} \mathfrak{P}_{\mathrm{II}} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{P}_{\mathrm{I}} := \{p_j \in \mathfrak{P}\colon p_j \nmid a\},$$

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{II}} := \{p_j \in \mathfrak{P}\colon p_j | a\};$$

wegen $(a, b, \overline{m}) = 1$ gilt für $p_j \in \mathfrak{P}_{\mathrm{II}}$: $p_j \nmid b$.

Bei der Konstruktion der Homogenitätstransformation läßt sich nun ausnutzen, daß die Anteile der Operation, die zu p und zu den beiden Klasser von Primteilern $\mathfrak{P}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{P}_{\mathrm{II}}$ gehören, gesondert transformiert werden können, indem man die Windungszahlen beteiligter homogener Funktionen mittels simultaner gesonderter Kongruenzgleichungen modulo der Primpotenzen zu $\mathfrak{P}_{\mathrm{I}}$, $\mathfrak{P}_{\mathrm{II}}$ und modulo $p^{\overline{x}}$ festlegt.

Der Übersicht halber schreiben wir das Transformationsschema für die Anteile zu $\mathfrak{P}_{\mathrm{I}}$ und $\mathfrak{P}_{\mathrm{II}}$ getrennt nebeneinander, (bezeichnet als Spalten (I) und (II)). Dabei ist zu beachten, daß in Wirklichkeit beide Spalten zu *einer* Transformation gehören. Das bedeutet z.B., daß entsprechende Pfeile in beiden Spalten für ein und diesselbe homogene Funktion stehen, (deren Transformationsverhalten bzgl. der beiden Operationsanteile lediglich getrennt notiert wird).

Der Anteil der Operation, der zum Primteiler p gehört, wird hierbei der Spalte (I) bzw. (II) zugeschlagen, je nachdem, ob *Fall* A: $p \nmid b$, bzw. *Fall* B: $p|b (\Rightarrow p \nmid a)$ vorliegt:

Zu Fall A: $p \nmid b$. Wir fassen die Primpotenzteiler der Drehnenner, die zu $\mathfrak{P}_{\mathrm{I}}$ bzw. $\mathfrak{P}_{\mathrm{II}}$ gehören, zusammen:

$$m = m_{\mathrm{I}} \cdot m_{\mathrm{II}}, \quad \text{mit } m_{\mathrm{I}} = \prod_{p_j \in \mathfrak{P}_{\mathrm{I}}} p_j^{x_j},\ m_{\mathrm{II}} = \prod_{p_j \in \mathfrak{P}_{\mathrm{II}}} p_j^{x_j}$$

analog:

$$m' = m'_{\mathrm{I}} \cdot m'_{\mathrm{II}} \quad (\text{ersetze } x_j \text{ durch } x'_j),$$

$$\overline{m} = \overline{m}_{\mathrm{I}} \cdot \overline{m}_{\mathrm{II}} \quad (\text{ersetze } x_j \text{ durch } \overline{x}_j)$$

Sei

$$\sigma = \sigma_{\mathrm{I}} \cdot \sigma_{\mathrm{II}} \cdot \sigma_p$$

bzw.

$$\sigma' = \sigma'_{\mathrm{I}} \cdot \sigma'_{\mathrm{II}} \cdot \sigma'_p$$

die eindeutige Aufspaltung von σ und σ' in Produkte primitiver Einheitswurzeln zu den Moduln:

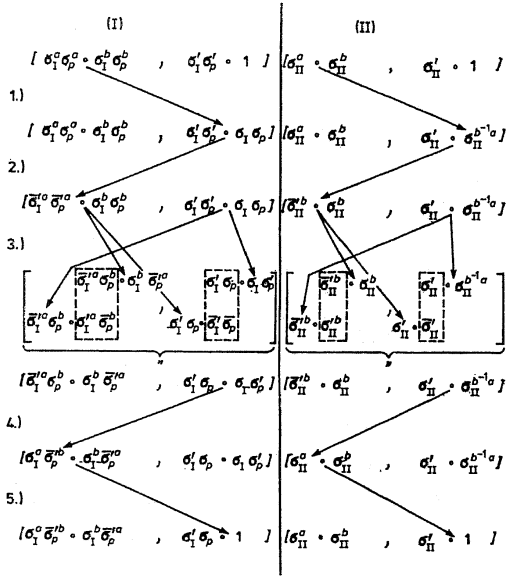
$$m_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{II}}, p^x$$

bzw.

$$m'_{\mathrm{I}}, m'_{\mathrm{II}}, p^{x'}.$$

Dann schreibt sich die Operation $[\sigma^a \circ \sigma^b, \sigma' \circ 1]$ als $[\sigma_{\mathrm{I}}^a \sigma_{\mathrm{II}}^a \sigma_p^a \circ \sigma_{\mathrm{I}}^b \sigma_{\mathrm{II}}^b \sigma_p^b, \sigma'_{\mathrm{I}} \sigma'_{\mathrm{II}} \sigma'_p \circ 1]$, (wobei die Einheitwurzeln $\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma'_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}, \sigma'_{\mathrm{II}}, \sigma_p, \sigma'_p$ unabhängig voneinander operieren).

Wir behaupten nun, daß eine Folge elementarer Homogenitätstranformationen mit folgendem Transformationsschema existiert: (Diese Folge schließt mit dem gewünschten Produkt von Linsenraumoperationen ab.)



Die speziellen Homogenitätstransformationen 1), 2) und 4), 5) sind relativ einfach und mit einiger Übung direkt am Schema ablesbar:

Zu 1) Die wesentliche homogene Funktion (dem Pfeil entsprechend) hat den Transformationstyp

$$[a_{\mathrm{I}}^a \sigma_p^a \sigma_{\mathrm{II}}^a \circ \sigma_{\mathrm{I}}^b \sigma_p^b \sigma_{\mathrm{II}}^b] \to [1 \circ \sigma_{\mathrm{I}} \sigma_p \sigma_{\mathrm{II}}^{b^{-1}a}].$$

Nach Lemma 4 gibt es eine Windungsfunktion $h_{t,t'}$, welche dies leistet; die Kongruenzgleichungen für t, t' lese man am komplex geschriebenen Transformationstyp ab:

$$[(\sigma_{\mathrm{I}} \sigma_p \sigma_{\mathrm{II}}, \sigma_{\mathrm{I}}^r \sigma_p^r \sigma_{\mathrm{II}}^r)] \to [(\sigma_{\mathrm{I}} \sigma_p \sigma_{\mathrm{II}}^{b^{-1}a}, \bar{\sigma}_{\mathrm{I}} \bar{\sigma}_p \bar{\sigma}_{\mathrm{II}}^{b^{-1}a})]$$

$$\Rightarrow t \equiv \begin{cases} 1 & \mathrm{mod}\, m_{\mathrm{I}} p^x, \\ b^{-1}a & \mathrm{mod}\, m_{\mathrm{II}} \end{cases} \qquad t' \equiv \begin{cases} -r^{-1} & \mathrm{mod}\, m_{\mathrm{I}} p^x, \\ -r^{-1} b^{-1} a & \mathrm{mod}\, m_{\mathrm{II}}. \end{cases}$$

Man beachte, daß die Voraussetzung: b teilerfremd zu m_{II} für diese Transformation notwendig ist.

Gleichermaßen lassen sich die wesentlichen homogenen Funktionen in Schritt 3) und 4) mittels Lemma 3 und die in Schritt 5) mittels Lemma 4 finden. Dabei ist bei der 5. Transformation zu beachten, daß die Operation $\sigma_{\mathrm{I}}^{a}\bar{\sigma}_{p}'^{b} \circ \sigma_{\mathrm{I}}^{b}\bar{\sigma}_{p}'^{a}$ (in Spalte I, erster Faktor) den Bedingungen einer Linsenraumoperation genügt, ($(a+b)$ und $(a-b)$ sind teilerfremd zu m_{I}, $(-b-a)$ und $(-b+a)$ teilerfremd zu $p^{\bar{x}}$), und somit Lemma 4 angewendet werden kann.

Die 3. *elementare Homogenitätstransformation* verlangt eine genauere Beschreibung.

Sie besteht aus homogenen Funktionen:

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{t_1,t_2} & h_{t_3,t_4}\cdot h_{t_3',t_4'} \\ h_{t_5,t_6}\cdot h_{t_5',t_6'} & h_{t_7,t_8} \end{pmatrix}.$$

Die Diagonale bestimmt den Transformationstyp; in der Gegendiagonale stehen lediglich "Korrekturfunktionen", die den Transformationstyp (beim Anmultiplizieren) nicht ändern; sie dienen der Korrektur der Partialgrad-Determinante zu 1.

t_1, t_2 und t_7, t_8 seien ganze Zahlen, die folgende Kongruenzen erfüllen (mit $\mathrm{kgV} := \mathrm{kgV}(mp^{x}, m'p^{x'}) = \bar{m}p^{\bar{x}}$)

$$t_1 \equiv \quad 1 \bmod (\mathrm{kgV})^2, \qquad t_7 \equiv \quad 1 \bmod (\mathrm{kgV})^2,$$

$$t_2 \equiv \begin{cases} 1 \bmod \bar{m}^2, \\ -1 \bmod p^{2\bar{x}}, \\ 1 \bmod \bar{m}_{\mathrm{II}}^2, \end{cases} \qquad t_8 \equiv \begin{cases} 1 \bmod \bar{m}_{\mathrm{I}}^2, \\ -1 \bmod p^{2\bar{x}}, \\ 1 \bmod \bar{m}_{\mathrm{II}}^2. \end{cases}$$

Mit Lemma 3 sieht man sofort, daß diese Diagonalfunktionen gemäß dem Schema lediglich eine Seitenvertauschung der operierenden $\sigma_p^{(\prime)}$ bewirken:

$$[\bar{\sigma}_{\mathrm{I}}'^{a}\bar{\sigma}_{p}'^{a}\bar{\sigma}_{\mathrm{II}}'^{b} \circ \sigma_{\mathrm{I}}^{b}\sigma_{p}^{b}\sigma_{\mathrm{II}}^{b}] \xrightarrow{h_1} [\bar{\sigma}_{\mathrm{I}}'^{a}\sigma_{p}^{b}\bar{\sigma}_{\mathrm{II}}'^{b} \circ \sigma_{\mathrm{I}}^{b}\bar{\sigma}_{p}'^{a}\sigma_{\mathrm{II}}^{b}]$$

$$[\sigma_{\mathrm{I}}'\sigma_{p}'\sigma_{\mathrm{II}}' \circ \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{p}\sigma_{\mathrm{II}}^{b^{-1}a}] \xrightarrow{h_4} [\sigma_{\mathrm{I}}'\sigma_{p}\sigma_{\mathrm{II}}' \circ \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{p}'\sigma_{\mathrm{II}}^{b^{-1}a}].$$

Sie liefern zur Determinante der Partialgrad-Matrix den Beitrag:

(10) $$\operatorname{grad} h_1 \cdot \operatorname{grad} h_4 = t_1\cdot t_2\cdot t_7\cdot t_8 \equiv 1 \bmod (\mathrm{kgV})^2.$$

Sei $t_1\cdot t_2\cdot t_7\cdot t_8 = 1+s\cdot(\mathrm{kgV})^2$: Mittels h_2 und h_3, die den Summanden

(11) $$-(t_3\cdot t_4+t_3'\cdot t_4')\cdot(t_5\cdot t_6+t_5'\cdot t_6')$$

zur Determinante beitragen, soll die Determinante zu 1 korrigiert werden. Dabei genügt es zu zeigen, daß durch geeignete Wahl von $t_i^{(\prime)}(i = 3, 4, 5, 6)$ innerhalb der vorgeschriebenen Kongruenzklassen, der Gegendiagonal-Summand (11) den Wert jedes beliebigen Vielfachen von $(\mathrm{kgV})^2$ annehmen kann:

Wir legen zunächst die Kongruenzbedingungen für $h_2 = h_{t_3,t_4}\cdot h_{t_3',t_4'}$ fest:

$$t_3 \equiv \begin{cases} -a \bmod \bar{m}_{\mathrm{I}}, \\ b \bmod p^{\bar{x}}, \\ -b \bmod \bar{m}_{\mathrm{II}}, \end{cases} \qquad t_4 \equiv \begin{cases} -a \bmod \bar{m}_{\mathrm{I}}, \\ -b \bmod p^{\bar{x}}, \\ -b \bmod \bar{m}_{\mathrm{II}}, \end{cases}$$

$$t_3' \equiv -t_3 \bmod \mathrm{kgV}, \qquad t_4' \equiv t_4 \bmod \mathrm{kgV}.$$

Damit ergeben sich folgende Transformationstypen:

$$[\sigma_{\mathrm{I}}'\sigma_{p}'\sigma_{\mathrm{II}}' \circ \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{p}\sigma_{\mathrm{II}}^{b^{-1}a}] \begin{cases} \xrightarrow{\quad h_{t_3,t_4}\quad} [\bar{\sigma}_{\mathrm{I}}'^{a}\sigma_{p}^{b}\bar{\sigma}_{\mathrm{II}}'^{b} \circ \bar{\sigma}_{\mathrm{I}}^{a}\sigma_{p}'^{b}\bar{\sigma}_{\mathrm{II}}^{a}], \\ \xrightarrow{\quad h_{t_3',t_4'}\quad} [\sigma_{\mathrm{I}}^{a}\bar{\sigma}_{p}'^{b}\sigma_{\mathrm{II}}^{a} \circ \sigma_{\mathrm{I}}'^{a}\bar{\sigma}_{p}^{b}\sigma_{\mathrm{II}}'^{b}], \\ \xrightarrow{h_2=h_{t_3',t_4}\cdot h_{t_3',t_4'}} [\bar{\sigma}'^{a}\sigma_{p}^{b}\bar{\sigma}_{\mathrm{II}}'^{b} \circ \sigma_{\mathrm{I}}'^{a}\bar{\sigma}^{b}\sigma_{\mathrm{II}}'^{b}]. \end{cases}$$

Für h_2 stimmt dies mit dem im Schema angegebenen Transformationstyp überein. Außerdem hat h_2 die Eigenschaft, daß es beim Links-Anmultiplizieren an h_1 den Typ der Bildoperation von h_1 reproduziert. t_3 und t_4 sind nur bis auf Kongruenz modulo kgV festgelegt, unabhängig davon gilt: t_3 and t_4 sind teilerfremd zu kgV, und man findet (nach (1)) teilerfremde Repräsentanten t_{3_0}, t_{4_0}, die eine Gleichung $l_3t_{3_0}+l_4t_{4_0} = 1$ für geeignete ganze Zahlen l_3, l_4 erfüllen. Setze

$$t_3 = t_{3_0}, \qquad t_4 = t_{4_0}+sl_3\ \mathrm{kgV},$$

$$t_3 = -t_3+sl_4\ \mathrm{kgV}, \quad t_4 = t_4$$

mit s aus Gleichung (10).

$$\Rightarrow \operatorname{grad} h_2 = \operatorname{grad} h_{t_3,t_4}+\operatorname{grad} h_{t_3',t_4'} = t_3t_4+t_3't_4'$$
$$= t_{3_0}t_{4_0}-t_{3_0}t_{4_0}+s(l_3t_{3_0}+l_4t_{4_0})\cdot\mathrm{kgV} = s\cdot\mathrm{kgV}.$$

Die Windungszahlen von $h_3 = h_{t_5,t_6}\cdot h_{t_5',t_6'}$ seien bis auf Kongruenz modulo kgV durch

$$t_5 \equiv \begin{cases} -a^{-1} \bmod \bar{m}_{\mathrm{I}}, \\ b^{-1} \bmod p^{\bar{x}}, \\ -b^{-1} \bmod \bar{m}_{\mathrm{II}}, \end{cases} \qquad t_6 \equiv \begin{cases} -a^{-1} \bmod \bar{m}_{\mathrm{I}}, \\ -b^{-1} \bmod p^{\bar{x}}, \\ -b^{-1} \bmod \bar{m}_{\mathrm{II}}, \end{cases}$$

$$t_5' \equiv -t_5 \bmod \mathrm{kgV}, \qquad t_6' \equiv t_6 \bmod \mathrm{kgV}.$$

(Man beachte: Nach der Aufspaltung $\bar{m} = \bar{m}_{\mathrm{I}}\cdot\bar{m}_{\mathrm{II}}$ und der Voraussetzung $p \nmid b$ im Fall A ist b teilerfremd zu $\bar{m}_{\mathrm{II}}\cdot p^{\bar{x}}$ und a teilerfremd zu $\bar{m}_{\mathrm{I}}$.) Daraus ergibt sich auf ähnliche Weise wie oben der gewünschte Transformationstyp:

$$[\bar{\sigma}_{\mathrm{I}}'^{a}\bar{\sigma}_{p}'^{a}\bar{\sigma}_{\mathrm{II}}'^{b} \circ \sigma_{\mathrm{I}}^{b}\sigma_{p}^{b}\sigma_{\mathrm{II}}^{b}] \xrightarrow{h_3} [\sigma_{\mathrm{I}}'\sigma_{p}\sigma_{\mathrm{II}}' \cdot \bar{\sigma}_{\mathrm{I}}'\bar{\sigma}_{p}'\bar{\sigma}_{\mathrm{II}}'].$$

t_5 und t_6 sind ebenfalls teilerfremd zu kgV

$\Rightarrow$ mit dem gleichen Trick wie oben lassen sich t_5, t_6, t_5', t_6' in ihren Kongruenzklassen modulo kgV so wählen, daß grad $h_3 = t_5t_6+t_5't_6' = \mathrm{kgV}$ gilt.

Somit ergibt der Gegendiagonal-Summand (11):

$$-(t_3t_4+t_3't_4')(t_5t_6+t_5't_6') = -s'(\mathrm{kgV})^2$$

zusammen mit dem Diagonalsummanden (10) Partialgrad-Determinante 1.

Wir haben somit eine elem. Homogenitätstransformation gefunden, welche dem Transformationstyp von Schritt 3 genügt. Daß die Operation unter dieser Transformation frei bleibt, ersieht man wie im Beweis von Satz 1 aus der Tatsache, daß die nachgeschalteten speziellen Homogenitätstransformationen 4) und 5) wieder zu einem Paar von Linsenraumoperationen, also einer freien Operation, der zu $Z_{mp^{x}} \oplus Z_{m'p^{x'}}$ isomorphen Gruppe $Z_{mp^{x'}} \oplus Z_{m'p^{x}}$ führen.

Faßt man nämlich am Ende der Transformationskette die operierenden Einheitswurzeln

zu der primitiven $(mp^{x'})$-ten Einheitswurzel $\tau = \sigma_{\mathrm{I}}\sigma_{\mathrm{II}}\bar{\sigma}'_p$ und
der primitiven $(m'p^{x})$-ten Einheitswurzel $\tau' = \sigma'_{\mathrm{I}}\sigma'_{\mathrm{II}}\sigma_p$

zusammen, so erhält man eine Operation vom Typ:

$$[\tau^c \circ \tau^d,\ \tau' \circ 1]$$

mit

$$c \equiv \begin{cases} a \bmod m, \\ b \bmod p^{x'}, \end{cases} \qquad d \equiv \begin{cases} b \bmod m, \\ a \bmod p^{x'}. \end{cases}$$

Das entspricht einem Paar von Linsenraumoperationen, das zu

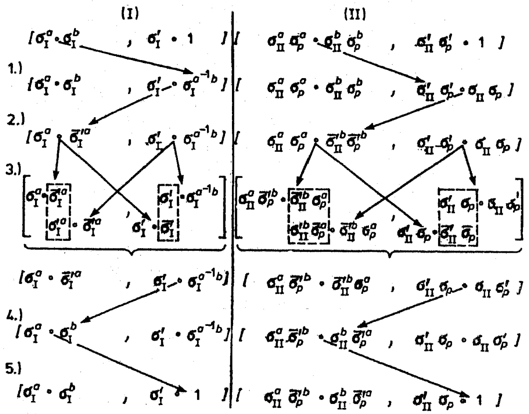
$$L_{mp^{x'}}(r') \times L_{m'p^{x}}(1) \quad \text{mit } r' \equiv \begin{cases} a-b = r \bmod m, \\ b-a = -r \bmod p^{x'} \end{cases}$$

gehört (8).

Zu Fall B: $p|b(\Rightarrow p \nmid a)$. Wir übernehmen die Bezeichnungen von Fall A. Im Unterschied zu Fall A schlagen wir den p-Anteil der Operation der Spalte (II) zu:

$$\begin{array}{cc} \text{(I)} & \text{(II)} \\ [\sigma_{\mathrm{I}}^a \circ \sigma_{\mathrm{I}}^b,\ \sigma'_{\mathrm{I}} \circ 1] & [\sigma_{\mathrm{II}}^a \sigma_p^a \circ \sigma_{\mathrm{II}}^b \sigma_p^b,\ \sigma'_{\mathrm{II}}\sigma'_p \circ 1] \end{array}$$

Behauptung: Es existiert eine Folge elementarer Homogenitätstransformationen mit folgendem Schema:



(8) Daß τ bzw. τ' irgendwelche primitiven $(mp^{x'})$ — bzw. $(m'p^{x})$-ten Einheitswurzeln statt der ausgezeichneten $(e^{2\pi i/mp^{x'}}, e^{2\pi i/m'p^{x}})$ sind, spielt selbstverständlich keine Rolle; es entspricht dem Übergang zu anderen als den ausgezeichneten Erzeugenden der Operation.

Analog zu Fall A sind die Transformationen 1), 2) sowie 4) und 5) spezielle Homogenitätstransformationen, die mit Windungsfunktionen gebildet werden. Die zugehörigen Kongruenzgleichungen ergeben sich parallel zu Fall A verhältnismäßig einfach aus dem Transformationsschema. Dabei werden die Voraussetzungen: $(a, \overline{m}_{\mathrm{I}}p^{\bar{x}}) = 1$, $(b, \overline{m}_{\mathrm{II}}) = 1$, sowie für 1) und 5) Lemma 4 und für 2) und 4) Lemma 3 ausgenutzt.

Zur 3. elementaren Homogenitätstransformation: (Fall B):

Parallel zu Fall A ist die Matrix der homogenen Funktionen von der Form

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_3 & h_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{t_1,t_2} & h_{t_3,t_4} \cdot h_{t'_3,t'_4} \\ h_{t_5,t_6} \cdot h_{t_5,t'_6} & h_{t_7,t_8} \end{pmatrix}.$$

Für die Diagonale, welche den Transformationstyp bestimmt, gelten die gleichen Kongruenzen wie in Fall A, (auch hier wird $\sigma_p^{(\prime)}$ seitenvertauscht), d. h. (10) bleibt gültig. Die Korrekturfunktionen der Gegendiagonale müssen dem veränderten Schema angepaßt werden. Daraus ergeben sich folgende Kongruenzbedingungen für die Windungszahlen:

$$t_3 \equiv \begin{cases} a \bmod \overline{m}_{\mathrm{I}}, \\ b \bmod \overline{m}_{\mathrm{II}}, \\ -a \bmod p^{\bar{x}}, \end{cases} \qquad t_4 \equiv \begin{cases} a \bmod \overline{m}_{\mathrm{I}}, \\ b \bmod \overline{m}_{\mathrm{II}}, \\ a \bmod p^{\bar{x}}, \end{cases}$$

$$t'_3 \equiv -t_3 \bmod \mathrm{kgV}, \qquad t'_4 \equiv t_4 \bmod \mathrm{kgV},$$

$$t_5 \equiv \begin{cases} -a^{-1} \bmod \overline{m}_{\mathrm{I}}, \\ -b^{-1} \bmod \overline{m}_{\mathrm{II}}, \\ a^{-1} \bmod p^{\bar{x}}, \end{cases} \qquad t_6 \equiv \begin{cases} a^{-1} \bmod \overline{m}_{\mathrm{I}}, \\ b^{-1} \bmod \overline{m}_{\mathrm{II}}, \\ a^{-1} \bmod p^{\bar{x}}, \end{cases}$$

$$t'_5 \equiv -t_5 \bmod \mathrm{kgV}, \qquad t'_6 \equiv t_6 \bmod \mathrm{kgV}.$$

Man beachte: a ist teilerfremd zu $\overline{m}_{\mathrm{I}}p^{\bar{x}}$, b ist teilerfremd zu $\overline{m}_{\mathrm{II}}$.

Die Kongruenzbedingungen sind sinnvoll, und es gilt: t_3, t_4, t_5 und t_6 sind teilerfremd zu kgV. Infolgedessen kann man mit dem gleichen Trick wie in Fall A durch geeignete Wahl der t_i, t'_i $(i = 3, 4, 5, 6)$ modulo kgV jedes beliebige (ganzzahlige) Vielfache von $(\mathrm{kgV})^2$ als $-(t_3 \cdot t_4 + t'_3 \cdot t'_4) \cdot (t_5 \cdot t_6 + t'_5 \cdot t'_6)$ darstellen und somit die Determinante der Partialgradmatrix zu 1 korrigieren. Der Schluß des Beweises läßt sich wörtlich von Fall A übernehmen. ■

Schlußbemerkung. Das Vertauschen der Primpotenzanteile von Linsenraumoperationen mittels Satz 2 verursacht die speziellen Vorzeichenbedingungen im Theorem; nämlich, daß die Vorzeichen von Primpotenzteiler zu Primpotenzteiler wechseln können und daß diese Wechsel gekoppelt sind.

Man kann dieses Vertauschen von Primpotenzanteilen der Operation auch auf gleiche Primpotenzteiler der Drehnenner anwenden. Daraus ergeben sich für Produkte von Linsenräumen mit gleichem Drehnenner m Homotopieäquivalenzen, die aus der von A. J. Sieradski in [8] aufgestellten Homotopieinvariante:

"(± quadr. Rest). (Produkt der Torsionszahlen) mod m" herausfallen.

Man erhält solche Beispiele für jeden Drehnenner $m = p^x p'^y \bar{m}$, für den es Zahlen a gibt mit der Eigenschaft:

$$a \equiv +\text{quadr. Rest mod} p^x,$$
$$a \equiv -\text{quadr. Rest mod} p'^y,$$
$$a \not\equiv \pm\text{quadr. Rest mod} \bar{m}, \text{ falls } \bar{m} > 1,$$

z.B. für $m = 21 = 7 \cdot 3$:

Nach Satz 2 gilt: $L_{21}(1) \times L_{21}(1) \simeq L_{21}(8) \times L_{21}(1)$,

$$\text{denn } 8 \equiv 1 \text{ mod} 7,$$
$$\text{und } 8 \equiv -1 \text{ mod} 3,$$

aber die Kongruenzklasse 8 (mod21) ist nicht enthalten in der Menge

$$\{\pm\text{quadr. Reste mod} 21\} = \{1, 4, 5, 16, 17, 20\}.$$

References

[1] M. M. Cohen, *A course in simple-homotopy theory*, New York, Heidelberg, Berlin 1973.
[2] W. Franz, *Über die Torsion einer Überdeckung*, J. Reine, Angew. Math 173 (1935), 245–254.
[3] —, *Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume*, J. Reine, Angew. Math. 185 (1941), 65–77.
[4] P. J. Hilton, *An introduction to homotopy theory*, Cambridge 1953.
[5] G. Huck und W. Metzler, *Über den Homotopietyp von Linsenraumprodukten*, Fund. Math. 125 (1985), 11–22.
[6] W. Metzler, *Diffeomorphismen zwischen Produkten mit dreidimensionalen Linsenräumen als Faktoren*, Dissertationes Math. 65 (1969).
[7] J. Milnor, *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 358–426.
[8] A. J. Sieradski, *Non-cacellation and a related phenomenon for the lens spaces*, Topology 17 (1978), 85–93.

DEPT. OF MATHEMATICS,
NORTHERN ARIZONA UNIVERSITY
Flagstaff, AZ 86011
U.S.A.

Received 17 July 1985

Dual properties within graph theory

by

T.A. McKee (Dayton, O.)

Abstract. Graph-theoretic duality lacks many of the nice features of matroid duality. In particular, equivalent statements need not dualize into equivalent statements, and so properties such as being eulerian cannot strictly be said to have graph-theoretic duals. Lacking natural examples of this for the traditional circuit/cutset duality, an alternative duality between vertices and minimal spanning sets of edges is discussed. In this context, completeness can be characterized in two natural ways, which dualize in simple but quite nonequivalent ways.

1. Introduction. Graph theory is one of the most easily accessible, yet widely applicable areas of discrete mathematics. Within graph theory, duality has become so central a concept that it has been cited as being a major justification for even calling graph theory a "theory." Yet misconceptions abound concerning the uses and limitations of graph-theoretic duality, largely due to confusion with a more general notion called matroidal duality, which was partially created to "explain" the graph-theoretic variety. Despite the frequency of reference to (and, at times, invocation of) duality, surprisingly little attention has been paid to the phenomenon itself (except for a few papers primarily interested in its applicability to electrical engineering, such as [8], [9], [12], and [4]).

Section 2 describes this duality, emphasizing its seldom-realized limitation that, within graph theory itself, concepts do not have dual concepts. This definitely conflicts with the way graph theorists commonly think and talk. It is rather only specific syntactical formulations of concepts which can be dualized. The difficulty is that statements which are equivalent for all graphs can dualize in nonequivalent ways. Unfortunately, the only known examples of this behavior are quite contrived. Hence, in Section 3 we introduce an alternative concept of duality, which has almost exactly the same logical structure as the traditional duality, but in which these limitations are nearer the surface and so can be naturally illustrated. Moreover, this alternative duality has the advantage over matroid-based duality of being built around the common notion of vertex. Precisely because it lacks an enveloping self-dual context such as matroid theory, this vertex-based duality can serve as a laboratory for studying the problematic nature of traditional duality.