[V] G. A. Venema, *Weak flatness for shape classes of sphere — like continua?*, General Topology Appl. 7 (1977), 309–319.
[W] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Graduate texts in Math. 61, Berlin 1978.

INSTITUTE OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF WARSAW
00-901 Warsaw
PKiN 9-th floor
Poland

Received 1 August 1985;
in revised form 11 November 1985

Révêtements étales

par

Gabriel Picavet (Aubière)

Abstract. An etale covering of a ring A is a finite etale morphism $A \to B$. A morphism of rings $A \to B$ is said to be reduced in the case that each change of base $A \to A'$ gives a reduced ring $B \otimes_A A'$. M. Lazarus has proved the following result: Let A be a Noetherian ring and let there be a flat morphism $A \to A'$; then this morphism is reduced if and only if integral closure is preserved in the change of base $A \to A'$. We change the Noetherian hypothesis to a finiteness hypothesis on the morphism $A \to A'$. With a mild hypothesis, we obtain that the morphism is reduced if and only if it is an etale covering.

1. Introduction. M. Lazarus a montré, dans deux articles, [5] [6], les résultats suivants:

DÉFINITION 1. Soit f: $A \to B$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme f est dit *réduit* si pour tout morphisme $A \to A'$, où A' est un anneau réduit, l'anneau $B \otimes_A A'$ est réduit.

On prendra garde que cette définition n'est pas identique à celle des *Eléments de Géométrie Algébrique* de A. Grothendieck et J. Dieudonné.

PROPOSITION 2 [6]. *Soit f: $A \to B$ un morphisme.*

(a) *Si le morphisme f est réduit et l'anneau A réduit, le morphisme f est plat.*

(b) *Si le morphisme f conserve la fermeture intégrale dans le changement de base qu'il définit, alors f est un morphisme réduit.*

PROPOSITION 3 [5]. *Soit f: $A \to A'$ un morphisme d'anneaux, où A est un anneau Noethérien. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le morphisme f est plat, à fibres géométriquement réduites.*
(b) *Le morphisme f est plat et réduit.*
(c) *Le morphisme f conserve la fermeture intégrale dans le changement de base qu'il définit.*

On se propose d'éliminer l'hypothèse Noethérienne dans ce résultat, en la remplaçant par une hypothèse de finitude sur le morphisme $A \to A'$.

Nous utilisons, pour les morphismes nets et étales, les définitions et résultats présentés par M. Raynaud dans [9]. Si $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, le morphisme codiagonal est le morphisme $B \otimes_A B \to B$. Un anneau commutatif unitaire est dit vérifier la condition F. L. (de factorisation linéaire) si tout polynôme unitaire à une variable sur cet anneau se factorise linéairement. D'une part, A. Besserre a montré dans [1], que tout anneau A se plonge par un morphisme entier fidèlement plat dans un anneau $Bes(A)$ vérifiant la condition F. L., d'autre part M. Hochster a montré dans [4] que tout anneau A réduit se plonge par un morphisme entier essentiel dans un anneau $\Omega(A)$ de Baer et vérifiant la condition F. L. Rappelons qu'un anneau est dit de Baer si tout annulateur est engendré par un idempotent. Nous utilisons les morphismes précédents pour faire des changements de base. De plus, l'anneau $\Omega(A)$ est totalement intégralement clos (en abrégé T. I. C.) suivant la terminologie de M. Hochster; c'est-à-dire, en particulier, que tout morphisme entier injectif essentiel de source cet anneau est un isomorphisme. Il résulte de [4] qu'un anneau vérifiant la condition F. L. est totalement intégralement clos s'il est un anneau de Baer.

2. Résultats.

LEMME 4. *Tout idéal premier P d'un anneau A vérifiant la condition* F. L. *est tel que $P = P^2$.*

Preuve. Le polynôme $X^2 - a$ admet un zéro dans A.

PROPOSITION 5. *Soit A un anneau vérifiant la condition* F. L. *et soit $A \to B$ un morphisme entier, formellement net. Pour tout idéal premier Q de B on a $Q = Q^2$. Il en est de même pour tout idéal premier de $B \otimes_A B$.*

Preuve. On sait que $A \to B$ est formellement net si et seulement si le module des différentielles $\Omega(B/A)$ est nul. Soit Q un idéal premier de B se contractant en l'idéal P de A. Le morphisme $\varphi\colon A/P = A_1 \to B/P \cdot B = B_1$ entier injectif vérifie encore $\Omega(B_1/A_1) = 0$. L'idéal Q_1, image de Q dans B_1 est au-dessus de 0 dans A_1. Le morphisme $A_1 \to B_1 \to B_1/Q_1$ est entier injectif, entre anneaux intègres. Il est donc essentiel. Puisque l'anneau A_1 est T. I. C., c'est un isomorphisme. Il existe donc, pour tout élément b de B_1, un élément a de A_1 unique, tel que $b - \varphi(a) \in Q_1$. Soit l'application $D\colon B_1 \to Q_1/Q_1^2$, définie par $D(b) = \overline{b - \varphi(a)}$. Il est clair que D est une A_1-dérivation. Puisque le module des différentielles est nul, on voit que $D = 0$. Soit alors b un élément de Q, on obtient b appartient à $Q^2 + P \cdot B$. Mais puisque $P = P^2$, et par suite $P \cdot B = (P \cdot B)^2$, la relation $P \cdot B \subset Q$ entraîne b appartient à Q^2. Ainsi $Q = Q^2$. La dernière assertion s'obtient en remarquant que le morphisme $A \to B \otimes_A B$ vérifie la même hypothèse que le morphisme $A \to B$.

Nour désignerons par $I_{B/A}$ le noyau du morphisme codiagonal d'un morphisme $A \to B$. On obtient une réciproque à la proposition précédente.

PROPOSITION 6. *Soit $A \to B$ un morphisme tel que le module des différentielles*

soit de type fini sur B. On suppose que tout idéal premier de B et de $B \otimes_A B$ est idempotent. Le morphisme $A \to B$ est alors formellement net.

Preuve. Soit Q un idéal premier de B au-dessus d'un idéal premier P de A. L'idéal $I_{B/Q/A/P}$ est premier, il est idempotent. En effet, il est de la forme $R/Im(Q \otimes_A B) + Im(B \otimes_A Q)$, où R est un idéal premier de $B \otimes_A B$. Par conséquent, $\Omega(B/Q/A/P)$ est nul. Il existe une suite exacte $Q/Q^2 \to \Omega(B/A) \otimes_B B/Q \to \Omega(B/Q/A)$ associée à la suite de morphismes $A \to B \to B/Q$. En raison des hypothèses $Q/Q^2 = 0$ et de plus $\Omega(B/Q/A/P) = \Omega(B/Q/A)$, on obtient ainsi $\Omega(B/A) = Q \cdot \Omega(B/A)$. Une application du lemme de Nakayama au B-module de type fini $\Omega(B/A)$ montre que $\Omega(B/A) = 0$, après localisation en tout idéal premier Q de B.

Nous aurons besoin, pour la suite d'une proposition due à S. H. Cox et D. E. Rush.

PROPOSITION 7 [10]. *Un morphisme plat et net est formellement étale.*

PROPOSITION 8. *Soit $f\colon A \to B$ un morphisme fini.*

(a) *Si le morphisme f est réduit, il est formellement net.*

(b) *Si l'anneau A est réduit et le morphisme f est réduit, le morphisme f est formellement étale et plat.*

(c) *Si l'anneau A est intègre, le morphisme f est réduit si et seulement si il est étale ou encore si et seulement si il conserve la fermeture intégrale dans le changement de base qu'il définit.*

Preuve. Supposons le morphisme f fini et réduit. Soit le changement de base fidèlement plat $A \to Bes(A) = A'$ et posons $B' = B \otimes_A A'$. Soit Q' un idéal premier de B' au-dessus d'un idéal maximal P' de A'. Le morphisme $A'/P' \to B'/P' \cdot B'$ est fini et réduit et l'anneau A'/P' est un corps algébriquement clos. Il est donc étale, d'où l'on déduit que $\Omega(B'/P' \cdot B'/A'/P') = 0$. On déduit de la proposition 5, appliquée au morphisme entier formellement net $A' \to B' \to B'/P' \cdot B'$ que $Q' = Q'^2$. Considérons la suite exacte $Q'/Q'^2 \to \Omega(B'/A') \otimes_{B'} B'/Q' \to \Omega(B'/Q'/A') \to 0$. Le morphisme $A'/P' \to B'/P' \cdot B' \to B'/Q'$ est formellement net et par suite $\Omega(B'/Q'/A')$ est nul. Il en résulte que $\Omega(B'/A') \otimes_{B'} B'/Q'$ est nul, pour tout idéal maximal Q' de B', puisque le morphisme $A' \to B'$ est fini. Une application du lemme de Nakayama au B'-module de type fini $\Omega(B'/A')$ montre que ce dernier est nul. Par descente fidèlement plate, on obtient que $\Omega(B/A)$ est nul.

Si l'anneau A est réduit, la proposition 2 et la proposition 7 montrent que le morphisme f est formellement étale.

Supposons maintenant que l'anneau A soit intègre. La partie (b) montre que si f est un morphisme réduit, il est plat et formellement étale. Mais d'après [3], un tel morphisme est alors de présentation finie: le morphisme est étale. Il est clair qu'un morphisme étale est réduit. En vertu des résultats de [6], un morphisme qui conserve la fermeture intégrale est réduit. Réciproquement, si le morphisme f est réduit, il est étale, donc un morphisme absolument plat (i.e un morphisme plat dont le morphisme codiagonal est plat). Par conséquent, il conserve la fermeture intégrale, comme il résulte de l'article de J. P. Olivier [7].

THÉORÈME 9. *Soit A un anneau réduit et soit f: $A \to A'$ un morphisme fini, de présentation finie. Le morphisme f est réduit si et seulement si le morphisme f est étale.*

Preuve. Soit le changement de base $A \to \Omega(A)$ et supposons le morphisme f réduit. Il est alors plat. Pour tout idéal premier P de $\Omega(A)$, l'anneau $\Omega(A)_P$ est intègre. Par conséquent, le morphisme $\Omega(A)_P \to (\Omega(A)\otimes_A A')_P$ étant fini et réduit est étale. Le morphisme $\Omega(A) \to \Omega(A)\otimes_A A'$ est donc formellement net. Soit M le module des différentielles de A' sur A, il vérifie $M\otimes_{A'}B' = 0$, en posant $B' = \Omega(A)\otimes_A A'$. Le morphisme $A' \to B'$ est entier injectif, puisque le morphisme $A \to A'$, est plat. D'après [2], les morphismes entiers injectifs descendent la platitude des modules de type fini, donc M est plat. Par suite $M \to M\otimes_{A'}B'$ est injectif, donc $M = 0$.

Il en résulte que le morphisme f étant plat, formellement net et de présentation finie, est étale.

Remarques. Si l'on remplace l'hypothèse: le morphisme f est fini par le morphisme f est de présentation finie, le résultat (a) de la proposition 8 n'est plus vrai. Il suffit de considérer le morphisme réduit de présentation finie $A \to A[X]$. Considérons un anneau A réduit et les morphismes canoniques de A dans ses enveloppes de Baer faible et de Baer, soient $A \to B(A)$ et $A \to B_f(A)$. Chacune de ses enveloppes est engendrée comme algèbre sur A par des idempotents, comme nous l'avons montré dans [8]. Désignons par B l'une quelconque des enveloppes. L'idéal $I_{B/A}$ est engendré par les éléments $e\otimes 1 - 1\otimes e = u$, où e est un idempotent de B. Il est facile de voir que $u = u^3$. Par conséquent $\Omega(B/A)$ est nul et les morphismes $A \to B$ sont formellement nets. Mais ils ne sont pas réduits: supposons, de plus, que le spectre minimal de A ne soit pas compact, si le morphisme $A \to B$ était réduit il serait plat et, puisque le spectre minimal de B est compact, il en serait de même de A, le morphisme $A \to B$ étant alors plat entier injectif. Il existe donc des morphismes entiers injectifs formellement nets et non réduits.

Références

[1] A. Besserre, Thèse de la Faculté des Sciences de Clermont-Fd, Gauthier-Villars, Paris, Série E, 67 (1968).

[2] J. W. Brewwer et E. A. Rutter, *Descent for flatness*, J. Algebra 22 (1972), 89–96.

[3] L. Gruson et M. Raynaud, *Critères de platitude et projectivité*, Invent. Math. 13 (1971), 1–89.

[4] M. Hochster, *Totally integrally closed rings and extremal spaces*, Pacific J. Math. 32 (1970), 767–779.

[5] M. Lazarus, *Fermeture intégrale et changement de base*, C. R. Acad. Sc. Paris Ser. A 289 (1979) 51–53.

[6] —, *Fermeture intégrale et changement de base*, Colloque d'Algèbre Commutative, Université de Rennes I (1980) 123–129.

[7] J. P. Olivier, *Montée des propriétés par morphismes absolument plats*, Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Pub. No 112, Montpellier (1970–1971), 86–109.

[8] G. Picavet, *Ultrafiltres sur un espace spectral, anneaux de Baer, anneaux à spectre minimal compact*, Math. Scand. 46 (1980), 23–53.

[9] M. Raynaud, *Anneaux locaux Henséliens*, Lecture Notes in Math. 169, Springer Verlag, Berlin 1970.

[10] D. E. Rush et S. H. Cox, *Finiteness in flat modules and algebras*, J. Algebra 32 (1974), 44–50.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES PURES
U.E.R. SCIENCES
UNIVERSITÉ DE CLERMONT II,
B. P. 45,
63170 — Aubière
France

Received 28 November 1985