References

[1] S. Banach and S. Mazur, *Über mehrdeutige stetige Abbildungen*, Studia Mathematica 5 (1934), 174–178.
[2] C. Berge, *Topological Spaces*, Oliver & Boyd, Edinburgh and London 1963.
[3] R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill., 1971.
[4] Boju Jiang, *On the least number of fixed points*, Amer. J. Math. 102 (1980), 749–763.
[5] — *Fixed point classes from a differentiable viewpoint*, *Fixed Point Theory* (Proceedings, Sherbrooke, Quebec, 1980), Springer-Verlag, Berlin, 1981. (Lecture Notes in Mathematics v. 886.)
[6] — *Fixed points and braids*, Invent. Math. 75 (1984), 69–74.
[7] C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, van Nostrand Reinhold Co., London, 1970.
[8] B. O'Neill, *Induced homology homomorphisms for set-valued maps*, Pacific J. Math. 7 (1957), 1179–1184.
[9] H. Schirmer, *Fix-finite approximation of n-valued multifunctions*, Fund. Math. 121 (1983), 83–91.
[10] — *Fixed points, antipodal points and coincidences of n-acyclic valued multifunctions*, *Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis*, Contemporary Mathematics vol. 21, American Mathematical Society, Providence, RI, 1983, 207–212.
[11] — *An index and a Nielsen number for n-valued multifunctions*, Fund. Math. 124 (1984), 207–219.
[12] G.-H. Shi, *On the least number of fixed points and Nielsen numbers*, Chinese Math. 8 (1966), 234–243.
[13] F. Wecken, *Fixpunktklassen* III, Math. Ann. 118 (1942), 544–577.
[14] J. Weier, *Über Probleme aus der Topologie der Ebene und der Flächen*, Math. Japon. 4 (1956), 101–105.

CARLETON UNIVERSITY
Ottawa, Canada

Received 30 January 1984;
in revised form 5 September 1984

Stratégies gagnantes dans certains jeux topologiques

par

Gabriel Debs (Paris)

Abstract. We prove that on an α-favorable space for the Banach–Mazur game, there exists always an α-winning strategy depending only on α and β last moves. We give an example of a completely regular α-favorable space on which the player α has no winning strategy depending only on β last move.

Introduction. Rappelons que le *jeu de Banach–Mazur* sur un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est un jeu infini où deux joueurs α et β choisissent alternativement à chaque coup, un ouvert non vide contenu dans l'ouvert choisi par l'autre joueur au coup précédent; c'est le joueur β qui commence à jouer. Ainsi au cours d'une partie les joueurs α et β construisent deux suites d'ouverts non vides $(V_n)_{n\in N}$ et $(U_n)_{n\in N}$ respectivement, avec $V_n \supset U_n \supset V_{n+1}$; le joueur α gagne la partie si $\bigcap_{n\in N} U_n = \bigcap_{n\in N} V_n \neq \emptyset$. Le jeu (ou l'espace X) est dit α-*favorable* si le joueur α possède une stratégie gagnante. L'interêt des espaces α-favorables tient au fait qu'ils forment une large classe d'espaces de Baire stable par produit et qui contient tous les cas classiques.

La notion de stratégie est utilisée ici au sens des jeux à information parfaite, c'est-à-dire qu'à chaque coup les joueurs sont informés de tous les coups précédemment joués et un joueur peut tenir compte de ces informations dans la construction d'une statégie. Le but de ce travail est d'étudier pour un jeu α-favorable donné, l'existence de stratégies simples: plus précisément on s'intéressera à trois types de stratégies:

(I) Les stratégies σ dépendant seulement du dernier coup joué (par le joueur β), c'est-à-dire de la forme $\sigma(V_0, U_0, V_1, \ldots, U_{n-1}, V_n) = \tau(V_n)$.

(II) Les stratégies σ dépendant seulement des deux derniers coups joués (les derniers coups joués par les joueurs α et β respectivement), c'est-à-dire de la forme: $\sigma(V_0, U_0, V_1, \ldots, U_{n-1}, V_n) = \tau(U_{n-1}, V_n)$.

(III) Les stratégies σ dépendant seulement des deux derniers coups joués par le joueur β, c'est-à-dire de la forme $\sigma(V_0, U_0, V_1, \ldots, V_{n-1}, U_{n-1}, V_n) = \tau(V_{n-1}, V_n)$.

Nous attirons ici l'attention du lecteur à ce que certains auteurs appellent "faiblement α-favorable" ce que nous appelons "α-favorable", terme qu'ils réservent alors pour les espaces possédant une stratégie du type I.

Le point de départ de ce travail était la question suivante: Est-ce que tout espace α-favorable admet une stratégie gagnante du type (I)? Cette question qui se pose naturellement a été reprise par W. G. Fleissner et K. Kunen puis D. H. Fremlin. Elle est justifiée par le fait que la réponse est positive dans tous les cas classiques. En particulier, un remarquable résultat de F. Galvin et R. Telgarsky affirme que si le joueur α possède une stratégie gagnante qui ne dépend que du dernier coup V_n et de son numéro n, alors il existe une stratégie gagnante du type (I). Enfin il découle d'un résultat de J. C. Oxtoby que le problème analogue pour le joueur β a une réponse positive.

Dans ce travail on construit un espace topologique complètement régulier qui est α-favorable avec une stratégie gagnante de type (II) et sur lequel il n'existe aucune stratégie gagnante du type (I). Mais on démontre que sur tout espace α-favorable on peut construire une stratégie gagnante de type (II). (Nous avons appris par une correspondance récente que ce résultat a été obtenu indépendement par F. Galvin et R. Telgarsky [7]). En fait notre théorème sera démontré dans un cadre plus général que celui du jeu de Banach–Mazur, et qui est mieux adapté au problème. Nous signalons qu'une bibliographie très fournie sur les jeux topologiques a été réalisée par R. Telgarsky.

Je suis reconnaissant à D. H. Fremlin pour des discussions qui m'ont été très utiles pour ce travail.

1. Notations. On se donne deux ensembles E, F et on note $G = E \cup F$. Dans l'ensemble $G^{(N)}$ des suites finies d'éléments de G, on note par $r^\frown s$ la concaténation des suites r et s. On désigne par $\mathscr{A}(G)$ le sous-ensemble de $G^{(N)}$ formé des *suites alternées* $r = (z_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ (c'est-à-dire vérifiant: $z_{i+1} \in E \Leftrightarrow z_i \in F$) et par $\tilde{\mathscr{A}}(G)$ le sous-ensemble de G^N formé des suites alternées infinies. Si $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ sont deux suites finies de E et F respectivement on définit

$$\langle y_i; x_i\rangle_{0\leqslant i\leqslant n} = (y_0, x_0, y_1, \ldots, y_n, x_n) \in \mathscr{A}(G),$$

$$\langle x_i; y_i\rangle_{0\leqslant i\leqslant n} = (x_0, y_0, x_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathscr{A}(G).$$

On se donne deux relations $R_\alpha \subset F\times E$, et $R_\beta \subset E\times F$. On note $R = (R_\alpha \cup R_\beta) \subset G\times G$ et

$$\mathscr{R} = \{(z_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{A}(G)\colon z_i R z_{i+1},\ 0\leqslant i\leqslant n\}.$$

On désigne par $\mathscr{R}_{\beta,\alpha}$ (resp. par $\mathscr{R}_{\beta,\beta}$) le sous-ensemble de $\mathscr{R}$ formé des suites commençant par un élément de F et finissant par un élément de E (resp. de F); et par $\tilde{\mathscr{R}}$ (resp. par $\tilde{\mathscr{R}}_\beta$) l'ensemble des branches infinies de $\mathscr{R}$ (resp. de $\mathscr{R}_\beta = \mathscr{R}_{\beta,\alpha} \cup \mathscr{R}_{\beta,\beta}$). Si $\varrho = \langle y_n; x_n\rangle_{n\in N} \in \tilde{\mathscr{R}}_\beta$ on appellera *sous-suite alternée* de ϱ toute suite ϱ' de la forme $\varrho' = \langle y_{n_k}; x_{m_k}\rangle_{n\in N}$ avec $n_k \leqslant m_k < n_{k+1}$ pour tout $k\in N$.

2. Terminologie. Un *jeu alternatif* (E, F, R, A) est la donnée d'un triplet (E, F, R) comme précédemment et d'un sous-ensemble A de $\tilde{R}_\beta$. On dira que β est le joueur I (celui qui commence les parties) et que α est le joueur II. La relation R sera dite la règle du jeu, $\tilde{R}_\beta$ l'ensemble des parties licites du jeu, et A l'ensemble des parties licites gagnées par α.

Une *stratégie* pour le joueur α est une application $\sigma\colon \mathscr{R}_{\beta,\beta} \to E$ vérifiant:

$$(r^\frown\sigma(r) \in \mathscr{R}_{\beta,\alpha},\ \forall r\in\mathscr{R}_{\beta,\beta}).$$

On dira qu'une stratégie σ pour le joueur α est une *tactique* si elle ne dépend que du dernier coup joué, c'est-à-dire s'il existe $\tau\colon F\to E$ tel que $\sigma(r^\frown y) = \tau(y)$ pour tout $r\in\mathscr{R}_{\beta,\alpha}$ et $y\in F$. De manière analogue on dira que σ ne dépend que des deux derniers coups joués s'il existe $\tau\colon R_\beta \to E$ tel que $\sigma(r^\frown s) = \tau(s)$ pour tous $r\in\mathscr{R}_{\beta,\beta}$ et $s\in R_\beta$.

L'ensemble $A(\sigma)$ des parties licites conformes à la stratégie σ est défini par:

$$A(\sigma) = \{\langle y_n; x_n\rangle_{n\in N} \in \tilde{\mathscr{R}}_\beta\colon x_n = \sigma((\langle y_p, x_p\rangle_{0\leqslant p<n})^\frown y_n)\ \forall n\in N\}.$$

La *stratégie* σ est dite *gagnante* pour α si $A(\sigma)\subset A$. S'il existe une stratégie gagnante pour α le *jeu* est dit *α-favorable*.

3. Jeux asymptotiques pour α. Considérons la relation S sur E définie par:

$$(xSx') \Leftrightarrow (\exists r\in\mathscr{R}\colon x^\frown r^\frown x' \in \mathscr{R}).$$

Il est clair que S est transitive. Pour tout $x\in E$ la classe $xS = \{x'\in E\colon xSx'\}$ est l'ensemble des éléments de E susceptibles d'apparaître après x au cours d'une partie licite, et $xR = \{y\in F\colon xRy\}$ est l'ensemble des coups susceptibles d'être joués par β lorsque α vient de jouer x.

DEFINITION 1. On dira que le jeu alternatif (E, F, R, A) est *asymptotique* pour α s'il vérifie les deux conditions suivantes:

(i) Pour tout $x\in E$, $\operatorname{card}(xR) \leqslant \operatorname{card}(xS)$.

(ii) Pour $\varrho\in\tilde{R}_\beta$ on a les équivalences:

$\varrho\in A \Leftrightarrow \varrho$ admet une sous-suite alternée qui appartient à A.

$\Leftrightarrow$ Toute sous-suite alternée de ϱ appartient à A.

Remarques 2. Soit (E, F, R, A) un jeu asymptotique pour α:

(a) Il découle de (ii) que si $\varrho\in A$ alors toute suite alternée qui est égale à ϱ à partir d'un certain rang appartient à A.

(b) Si $\langle y_n; x_n\rangle_{n\in N}\in A$ et $(x'_n)_{n\in N}$ est une suite de E telle que $y_n R x_n S x'_n R y_{n+1}$ pour tout $n\in N$, alors $\langle y_n; x'_n\rangle_{n\in N}\in A$.

(c) Si E' est une partie de E cofinale pour S à droite $(\forall x\in E, \exists x'\in E'\colon xSx')$ et si $\vartheta\colon E\to E'$ vérifie $xS\vartheta(x)$ pour tout $x\in E$, il découle de (b) que pour toute stratégie gagnante σ pour α on peut construire une stratégie gagnante σ' qui prend ses valeurs dans E' en posant $\sigma' = \vartheta\circ\sigma$.

EXEMPLES 3. Soit X un espace topologique.

(a) Si $E = F$ et R est une relation de préordre sur E alors (i) est automatiquement vérifié puisque $(xR)\subset(xS)$. Dans le cas où $E = F = \mathscr{T}^*(X)$ est l'ensemble des ouverts non vides de X, R la relation $\supset$ et A l'ensemble des suites décroissantes d'ouverts d'intersection non vide, on retrouve le jeu de Banach–Mazur.

(b) On fixe $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(X)$ et on prend $E=F=\mathscr{T}^*(X)\times\mathscr{C}$ et $R=(\supset)\times(\subset)$, la relation de préordre produit de $\supset$ et $\subset$ sur E, et A l'ensemble des suites $(V_n, C_n)_{n\in N}$ qui sont croissantes (resp. décroissantes) en la première (resp. deuxième) coordonnée et qui vérifient $\bigcap_{n\in N} V_n\cap\big(\overline{\bigcup_{n\in N} C_n}\big)\neq\emptyset$. Dans le cas où $\mathscr{C}$ est la classe des parties compactes (ou $\mathscr{K}$-analytiques) de X on retrouve un jeu topologique étudié dans [4].

(c) Le dernier exemple est celui du jeu de Christensen (étudié dans [3]). On prend $E=\mathscr{T}^*(X)\times X$, $F=\mathscr{T}^*(X)$, R défini par:

$$UR(V,x)\Leftrightarrow(V,x)RV\Leftrightarrow U\supset V$$

et A l'ensemble des suites alternées $\langle V_n; (U_n, x_n)\rangle_{n\in N}$ telles que $V_n\supset U_n\supset V_{n+1}$ pour tout $n\in N$, et que toute sous-suite de $(x_n)_{n\in N}$ admette une valeur d'adhérence dans $\bigcap_{n\in N} V_n$. La condition (ii) est clairement réalisée et pour $(V,x)\in E$ on a:

$$\operatorname{card}[(V;x)R]=\operatorname{card}[\mathscr{T}^*(V)]$$

et

$$\operatorname{card}[(V;x)S]=\operatorname{card}[\mathscr{T}^*(V)\times X]$$

ce qui montre que (i) est réalisé dans beaucoup de cas.

THÉORÈME 4. *Dans tout jeu asymptotique pour α et α-favorable, il existe une stratégie gagnante pour α qui ne dépend que des deux derniers coups joués.*

Notons par:

$$H=\{x\in E:\ \forall x'\in(xS),\ \operatorname{card}(x'S)=\operatorname{card}(xS)>1\}$$

et

$$I=\{x\in E:\ \operatorname{card}(xS)=1\}.$$

Le principe de la démonstration est le suivant: Partant d'une stratégie gagnante σ, le joueur α va construire — en un premier temps — une stratégie σ' plus fine que σ (au sens de la remarque c), qui ne dépend que des deux derniers coups, et telle que sachant que la partie a commencé par (y_0, x_0) l'élément $\sigma'(x_0, y_1)$ soit en fait un "code" pour la suite (y_0, x_0, y_1) et ainsi de suite. C'est pourquoi on a besoin du lemme de codage suivant:

LEMME 5. *Pour tout $h\in H$ il existe des fonctions $\varphi\colon E\times F\times E\to E$ et $\psi\colon E\to\mathscr{R}$ vérifiant:*

(a)$_1$ $\operatorname{Dom}\varphi=\{(x,y,z)\in E\times F\times E:\ hSxRyRz\}$,
(a)$_2$ *φ est injective (sur son domaine)*,
(a)$_3$ *$\varphi(x,y,z)\neq h$ et $zS\varphi(x,y,z)$, pour tout $(x,y,z)\in\operatorname{Dom}\varphi$*,
(b)$_1$ $\operatorname{Dom}\psi=(\operatorname{Im}\varphi)\cup\{h\}$,
(b)$_2$ $\psi(h)=h$,
(b)$_3$ *Si $x'=\varphi(x,y,z)$ et $x\in\operatorname{Dom}\psi$ alors $\psi(x')=\psi(x)^\frown(y,z)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si $h\in H$ alors $\varkappa=\operatorname{card}(hS)$ est nécessairement infini. Or si $(x,y,z)\in D=\operatorname{Dom}\varphi$ défini par (a)$_1$ alors on a: $x,z\in hS$ et $y\in xR$; et comme $\operatorname{card}(xR)\leqslant\operatorname{card}(xS)\leqslant\operatorname{card}(hS)$, on en déduit que $\varkappa\leqslant\operatorname{card}(D)\leqslant\varkappa^3=\varkappa$.

Soit $D=\{(x_\xi, y_\xi, z_\xi);\ \xi<\varkappa\}$ une énumération injective des éléments de D. Pour tout $\xi<\varkappa$, choisissons par récurrence sur ξ, un élément $\varphi(x_\xi, y_\xi, z_\xi)$ de l'ensemble:

$$(z_\xi S)\setminus\{h, x_\xi, \varphi(x_\eta, y_\eta, z_\eta), x_\eta;\ \text{pour } \eta<\xi\}.$$

Cette construction est possible puisque $\operatorname{card}(z_\xi S)=\varkappa$. Ainsi définie la fonction φ vérifie (a)$_2$ et (a)$_3$.

On définit maintenant $\psi(\varphi(x_\xi, y_\xi, z_\xi))\in(E\cup F)^{(N)}$ inductivement sur $\xi<\varkappa$ par:

$$\psi(\varphi(x_\xi, y_\xi, z_\xi))=\begin{cases}\psi(x_\xi)^\frown(y_\xi, z_\xi) & \text{s'il existe } \eta<\xi \text{ tel que } x_\xi\\ & =\varphi(x_\eta, y_\eta, z_\eta),\\ (x_\xi, y_\xi, z_\xi) & \text{sinon.}\end{cases}$$

On voit que pour tout $(x,y,z)\in\operatorname{Dom}\varphi$, la suite $\psi(\varphi(x,y,z))$ est alternée, commence dans E et se termine par z. Vérifions par récurrence sur ξ, que $r_\xi=\psi(\varphi(x_\xi, y_\xi, z_\xi))\in\mathscr{R}$. Supposons que $r_\eta\in\mathscr{R}$ pour tout $\eta<\xi$: Si $x_\xi=\varphi(x_\eta, y_\eta, z_\eta)$ pour $\eta<\xi$ alors $\psi(x_\xi)$ se termine par z_η et on a:

$$z_\eta S\varphi(x_\eta, y_\eta, z_\eta)=x_\xi R y_\xi R z_\xi,$$

donc $r_\xi=r_\eta^\frown(y_\xi, z_\xi)\in\mathscr{R}$. Sinon $r_\xi=(x_\xi, y_\xi, z_\xi)\in\mathscr{R}$.

Enfin on définit $\psi(h)$ comme étant la suite réduite à l'élément h. Pour vérifier (b)$_3$ considérons $x'=\varphi(x_\xi, y_\xi, z_\xi)$ tel que $x_\xi\in\operatorname{Dom}\psi$. Si $x_\xi=\varphi(x_\eta, y_\eta, z_\eta)\in\operatorname{Im}\varphi$ alors d'après la construction même de φ on a nécessairement $\eta<\xi$; et par suite $\psi(x')=\psi(x_\xi)^\frown(y_\xi, z_\xi)$. Sinon $x_\xi=h$ et $\psi(x')=(x_\xi, y_\xi, z_\xi)=\psi(x_\xi)^\frown(y_\xi, z_\xi)$ puisque $\psi(x_\xi)=x_\xi=h$ dans ce cas. ■

Démonstration du théorème 4. Remarquons d'abord que $H\cup I$ est cofinal à droite pour S. En effet si $x\in E$ et $h\in xS$ tel que $\operatorname{card}(hS)=\operatorname{Min}\{\operatorname{card}(x'S);\ x'\in xS\}$ alors: $(hSx')\Rightarrow(xSx')\Rightarrow\operatorname{card}(x'S)=\operatorname{card}(hS)$ par minimalité, donc xSh et $h\in H\cup I$. Donc on peut supposer que le joueur α possède une stratégie gagnante σ qui prend ses valeurs dans $H\cup I$ (voir remarque 2 (c)).

Soit $K=\{x:\ \exists y\in F,\ \sigma(y)=x\}$ où $\sigma(y)$ désigne la réponse par σ à la suite réduite à l'élément y; et fixons $\varrho\colon K\to F$ tel que $\sigma\circ\varrho=\mathrm{Id}_K$. Enfin fixons un élément a de E. Pour tout $h\in K$, définit alors $\tau_h\colon R_\beta\to E$ par:

$$\tau_h(x,y)=\begin{cases}\varphi_h\big(x,y,\sigma(\varrho(h)^\frown\psi_h(x)^\frown y)\big) & \text{si défini},\\ a & \text{sinon}\end{cases}$$

où φ_h et ψ_h désignent respectivement deux fonctions φ et ψ qui vérifient la conclusion du lemme précédent, pour un h donné.

Considérons une partie $\langle y_n; x_n\rangle_{n\in N}$ vérifiant:

$$y_0 = \varrho(h); \quad x_0 = h; \quad x_n R y_{n+1}; \quad x_{n+1} = \tau_h(x_n, y_{n+1}).$$

Nous allons montrer alors par récurrence sur n, les propriétés (i), (ii) et (iii) suivantes:

(i) $x_n \in \mathrm{Dom}\psi_h$,

(ii) $\psi_h(x_n) = h\hat{}(\langle y_p; z_p\rangle)_{1\leqslant p\leqslant n}$ avec $z_0 = h$ et $z_p = \sigma(y_0\hat{}\psi_h(x_{p-1})\hat{}y_p)$ défini pour tout $1\leqslant p\leqslant n$,

(iii) $y_n R z_n S x_n$.

Pour $n = 0$: $x_0 = h \in \mathrm{Dom}\psi_h$; $\psi_h(x_0) = h$; $y_0 = \varrho(h)$ et $\varrho(h) Rh$ puisque $h = \sigma(\varrho(h))$.

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n, alors pour tout $0 < p \leqslant n$ on a $z_p = \sigma((\langle y_i; z_i\rangle_{0\leqslant i<p})\hat{}y_p)$ et par suite σ étant une stratégie on a:

$$y_0 R z_0 R y_1 R \ldots R y_n R z_n$$

et on peut définir (puisque $x_n \in \mathrm{Dom}\psi_h$ par hypothèse de récurrence)

$$z_{n+1} = \sigma((\langle y_i, z_i\rangle_{0\leqslant i\leqslant n+1})\hat{}y_{n+1}) = \sigma(y_0\hat{}\psi_h(x_n)\hat{}y_{n+1})$$

qui vérifie alors $hSx_nRy_{n+1}Rz_{n+1}$; donc $(x_n, y_{n+1}, z_{n+1}) \in \mathrm{Dom}\varphi_h$ et on peut définir:

$$\varphi_h(x_n, y_{n+1}, z_{n+1}) = \tau_h(x_n, y_{n+1}) = x_{n+1}.$$

Ce qui montre que $x_{n+1} \in (\mathrm{Im}\varphi_h) \subset \mathrm{Dom}(\psi_h)$ et d'après la condition $(\mathrm{b})_3$ du lemme précédent on a:

$$\psi_h(x_{n+1}) = \psi_h(\varphi_h(x_n, y_{n+1}, z_{n+1})) = \psi_h(x_n)\hat{}(y_{n+1}, z_{n+1}) = h\hat{}(\langle y_p, z_p\rangle_{1\leqslant p\leqslant n+1}).$$

D'où $(\mathrm{ii})_{n+1}$. Enfin d'après la condition $(\mathrm{a})_3$ du lemme précédent on a:

$$z_{n+1} S \varphi(x_n, y_{n+1}, z_{n+1}) = x_{n+1}.$$

Ce qui prouve (i), (ii), (iii). En particulier d'après (ii) la partie $(\langle y_n; z_n\rangle_{n\in N})$ est licite et gagnante pour α puisque jouée selon la stratégie σ. Il en est de même alors pour la partie $(\langle y_n; x_n\rangle_{n\in N})$ puisque pour tout $n\in N$:

$$y_n R z_n S x_n R y_{n+1}.$$

Nous allons maintenant définir une stratégie τ qui est gagnante pour α et qui ne dépend que des deux derniers coups joués. Pour celà fixons un bon ordre $<$ quelconque sur K. Si $h\in K$ disons qu'un élément $(x, y) \in R_\beta$ est compatible avec h s'il existe une suite finie $(\langle y_p; x_p\rangle_{0\leqslant p\leqslant n}) \in \mathscr{R}$ telle que:

$$\begin{aligned}(y_0, x_0) &= (\varrho(h), h),\\ x_p &= \tau_h(x_{p-1}, y_p) \quad \text{si} \quad 0<p<n,\\ x_n &= x,\end{aligned}$$

Remarquons que pour h fixé une telle suite si elle existe est unique d'après ce qui précède, puisque:

$$x_p = \tau_h(x_{p-1}, y_p) = \varphi_h(x_{p-1}, y_p, \psi_h(x_{p-1}, y_p))$$

et que φ_h est injective. Pour tout $(x, y)\in R_\beta$ notons par $\vartheta(x, y)$ le premier $h\in K$ (s'il en existe) tel que (x, y) soit compatible avec h; et par $\vartheta(x, y) = \infty$ si un tel élément h n'existe pas. On définit alors τ: $F\cup R_\beta \to E$ en posant

$$\forall y\in F, \qquad \tau(y) = \sigma(y)$$

et

$$\forall (x, y)\in R_\beta, \qquad \tau(x, y) = \begin{cases}\sigma(y) & \text{si } \vartheta(x, y) = \infty,\\ \tau_{\vartheta(x,y)}(x, y) & \text{sinon}.\end{cases}$$

Soit $\langle y_n; x_n\rangle_{n\in N}$ une partie vérifiant:

$$x_0 = \tau(y_0) \text{ et } x_{n+1} = \tau(x_n, y_{n+1}) \text{ pour tout } n\in N.$$

Il découle de la définition et de ce qui précède que $y_0 R x_0 = \sigma(y_0)$ et $y_{n+1} R x_{n+1}$ pour tout $x\in N$, donc la partie $\langle y_n; x_n\rangle_{n\in N}$ est licite et $x_0 S x_{n+1}$.

Si $\tau(y_0) = x_0 \in I$ alors $x_0 S = \{b\}$; donc $b = x_{n+1} = \sigma((\langle y_i, x_i\rangle_{0\leqslant\leqslant n})\hat{}y_{n+1})$ par unicité de b. Ce qui montre que $\langle y_n; x_n\rangle_{n\in N}$ est conforme à σ, donc gagnante pour σ.

Si $\tau(y_0)\in H$ alors on peut vérifier facilement par récurrence que $\vartheta(x_n, y_n) \neq \infty$ pour tout n et que la suite $(\vartheta(x_n, y_n))_{n\in N}$ est décroissante pour $<$, donc stationnaire. Donc pour tout $n\geqslant N$, $\vartheta(x_n, y_n) = h\in K$ et on peut trouver une suite (unique) $r_n \in \mathscr{R}$ qui soit compatible avec τ_h et finissant par (x_n, y_n), et par suite vérifiant (par unicité): $r_{n+1} = r_n\hat{}(x_{n+1}, y_{n+1})$. D'après ce qui précède la partie définie par les r_n est gagnante pour α, et il en est de même alors pour la partie $\langle y_n; x_n\rangle_{n\in N}$ qui lui est égale à partir d'un certain rang. ■

4. Un contre-exemple.

Notations 6. Dans toute la suite on note par:

$\boldsymbol{R}^*$: $= \boldsymbol{R}\setminus\{0\}$.

$\mathscr{I}$: l'ensemble des intervalles de $\boldsymbol{R}^*$ qui sont bornés, ouverts, non vides et à extrémités rationnelles.

$\mathscr{D}$: la famille des parties au plus dénombrables et non vides de $\boldsymbol{R}^*$.

$\mathscr{S}$: l'ensemble des fonctions partielles S: $\boldsymbol{R}^* \to \{0, 1\}$ qui sont surjectives (i.e. non constantes) et à domaine dénombrable. Cet ensemble sera muni de la relation d'inclusion $\subset$ induite par celle de $\boldsymbol{R}^*\times\{0, 1\}$.

X: l'ensemble des applications x: $\mathscr{D}\to\boldsymbol{R}$ vérifiant: $\exists\Delta(x)\in\mathscr{D}$, $\exists\tau(x)\in\boldsymbol{R}^*\setminus\Delta(x)$ tels que:

(i) $\forall D\subset\Delta(x)$, $x(D) = \tau(x)$;

(ii) $\forall D\not\subset\Delta(x)$, $x(D) = 0$;

On munit X de la topologie de la convergence uniforme sur les parties dénombrables de $\mathscr{D}$.

Pour $I \in \mathscr{I}$, et $S \in \mathscr{S}$;

$$V[S, I] = \{x \in X\colon\ x(\{S = 1\}) \in I,\ x(\{t\}) = 0\ \ \forall t \in \{S = 0\}\}\,.$$

PROPOSITION 7. *Sur l'espace complètement régulier X la famille*

$$\{V[S, I];\ S \in \mathscr{S},\ I \in \mathscr{I}\}$$

forme une base de topologie et on a: $(V[S_1, I_1] \supset V[S_2, I_2]) \Leftrightarrow (S_1 \subset S_2$ *et* $I_1 \supset I_2)$

Démonstration. Remarquons que si pour $\delta > 0$ on a $]-\delta, \delta[\, \cap I = \emptyset$ alors: $V[S, I] = \{x \in X\colon x(\{S = 1\}) \in I\} \cap \{x \in X\colon x(\{t\}) \in\,]-\delta, \delta[,\ \forall t \in \{S = 0\}\}$ puisqu'un élément de X ne prend qu'une seule valeur $\neq 0$ et que $0 \notin I$; donc les $V[S, I]$ sont ouverts dans X.

Soit U un voisinage élémentaire d'un élément $x_0 \in X$:

$$U = \{x \in X\colon\ |x(D_i) - x_0(D_i)| < \varepsilon,\ \forall i \in N\}$$

où $\varepsilon > 0$ et $\{D_i;\ i \in N\}$ est une partie dénombrable de $\mathscr{D}$. Considérons l'élément S de $\mathscr{S}$ défini par $(\{S = 1\} = \varDelta(x_0)$ et $\{S = 0\} = \bigcup_{i \in N} (D_i \setminus \varDelta(x_0)) \cup \{t_0\})$ où t_0 est un élément quelconque de $R^* \setminus (\bigcup_{i \in N} D_i \cup \varDelta(x_0))$ et soit $I \in \mathscr{I}$ tel que $\tau(x_0) \in I$ et $\operatorname{diam}(I) < \varepsilon$, alors $V[S, I] \subset U$. En effet si $x \in V[S, I]$ alors $x(\varDelta(x_0)) \neq 0$ donc $\varDelta(x_0) \subset \varDelta(x)$; par suite:

$$(D_i \subset \varDelta(x_0) \subset \varDelta(x)) \Rightarrow (x(D_i) \text{ et } x_0(D_i) \in I) \Rightarrow (|x(D_i) - x_0(D_i)| < \varepsilon)\,,$$
$$(D_i \not\subset \varDelta(x_0)) \Rightarrow (\exists t \in D_i \setminus \varDelta(x_0)\colon x(\{t\}) = 0) \Rightarrow (x(D_i) = x_0(D_i) = 0)$$

et $x \in U$. Donc pour S, I ainsi définis on a: $x_0 \in V[S, I] \subset U$. Enfin si $x_0 \in V[S_1, I_1] \cap V[S_2, I_2]$ alors S_1 et S_2 sont nécessairement compatibles $(S_1 \cup S_2 \in \mathscr{S})$ et $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$; donc

$$x_0 \in V[S_1 \cup S_2, I_1 \cap I_2] \subset V[S_1, I_1] \cap V[S_2, I_2]\,.$$

Supposons maintenant que $V_2 = V[S_2, I_2] \subset V[S_1, I_1] = V_1$:

(a) Si $I_2 \not\subset I_1$ et $t \in I_2 \setminus (I_1 \cup \operatorname{Dom} S_1 \cup \operatorname{Dom} S_2) \neq \emptyset$ (puisque $I_2 \setminus I_1 = \emptyset$ ou $\notin \mathscr{D}$), alors pour l'élément x de X défini par: $(\tau(x) = t$ et $\varDelta(x) = \{S_2 = 1\})$ on a: $x \in V_2 \setminus V_1$.

(b) Si $S_1 \not\subset S_2$ alors on a:

$$\exists t \in \operatorname{Dom} S_1\colon\ (t \notin \operatorname{Dom} S_2) \quad \text{ou} \quad (t \in \operatorname{Dom} S_2 \text{ et } S_1(t) \neq S_2(t))$$

de sorte que, en posant $S(t) = 1 - S_1(t)$, on ait: $S = S_2 \cup \{t, S(t)\} \in \mathscr{S}$. Soient $r \in I_2 \setminus \operatorname{Dom} S$ et x l'élément de X défini par: $(\tau(x) = r$ et $\varDelta(x) = \{S = 1\})$, alors $x \in V_2$ puisque $S_2 \subset S$ et $x \notin V_1$ puisque:

$$x(\{t\}) = r \neq 0 \Leftrightarrow S_1(t) = 0$$

et

$$x(\{t\}) = 0 \notin I_1 \Leftrightarrow S_1(t) = 1\,.$$

Donc $I_2 \subset I_1$ et $S_1 \subset S_2$ ce qui démontre l'équivalence annoncée puisque l'implication inverse est triviale. ■

THÉORÈME 8. *Il existe sur X une stratégie gagnante pour le joueur α qui ne dépend que des deux derniers coups joués par le joueur β.*

Fixons pour tout $D \in \mathscr{D}$: une suite $(\Phi_n(D))_{n \in N}$ de parties dénombrables deux à deux disjointes de $R^* \setminus D$, et une suite $(\varphi_{n,D})_{n \in N}$ de bijections $\varphi_{n,D}\colon D \to \Phi_n(D)$; et posons $\Phi(D) = \bigcup_{n \in N} \Phi_n(D) \subset R^* \setminus D$, et $\mathscr{T}_{-1} = \emptyset$.

Pour tout $n \in N$, on définit:

$$\mathscr{T}_n = (T', T) \in \{\mathscr{S} \times \mathscr{S}\colon\ T' \subset T;\ \Phi(\operatorname{Dom} T') \subset \operatorname{Dom} T\,,$$
$$T_{|\Phi_p}(\operatorname{Dom} T') = 1,\ \forall p \geqslant n\}\,.$$

$\mathscr{T} = \bigcup_{n \in N} \mathscr{T}_n$ et $\mathscr{F}$ l'ensemble des parties finies de $\mathscr{D}$. La démonstration du théorème repose sur le lemme suivant:

LEMME 9. *Il existe deux applications $f\colon \mathscr{S} \cup \mathscr{T} \to \mathscr{S}$ et $d\colon \mathscr{S} \cup \mathscr{T} \to \mathscr{F}$ vérifiant:*

(a) *Si $T \in \mathscr{S}$ alors $(T, f(T)) \in \mathscr{T}_0$,*

(b) *Si $(T', T) \in \mathscr{T}_n$ alors $(T, f(T', T)) \in \mathscr{T}_{n+1}$.*

(c) *Si $f(T_0) \subset T_1$ et $f(T_{n-1}, T_n) \subset T_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors*

$$d(T_{n-1}, T_n) = \{\operatorname{Dom} T_p;\ 0 \leqslant p \leqslant n\}\,.$$

Démonstration. Pour $T \in \mathscr{S}$ et $D = \operatorname{Dom} T$, on définit $f(T) \in \mathscr{S}$ par:

$$\operatorname{Dom} f(T) = D \cup \Phi(D);\qquad f(T)|_D = T;\qquad f(T)|_{\Phi(D)} = 1\,.$$

Donc (a) est vérifié.

Pour $(T', T) \in \mathscr{T}_n \setminus \mathscr{T}_{n-1}$ avec $D' = \operatorname{Dom} T' \subset \operatorname{Dom} T = D$ on définit $S = f(T', T)$ et $d(T', T)$ par:

(1) $$d(T', T) = \{l_p(T', T);\ 0 \leqslant p \leqslant n+1\}\,,$$

(2) $$l_p(T', T) = \varphi_{p,D'}^{-1}(\Phi_p(D') \cap \{T = 1\}) \quad \text{si} \quad 0 \leqslant p \leqslant n\,,$$

(3) $$l_p(T', T) = \operatorname{Dom} T = D \quad \text{si} \quad n+1 \leqslant p\,,$$

(4) $$\operatorname{Dom} S = D \cup \Phi(D)\,,$$

(5) $$S|_D = T\,,$$

(6) $$\Phi_p(D) \cap \{S = 1\} = \varphi_{p,D}(l_p(T', T)) \qquad \forall p \in N\,.$$

Il découle de (3) et (6) que $S|_{\Phi_p(D)} = 1$ pour tout $p \geqslant n+1$ donc $(T, f(T', T)) \in \mathscr{T}_{n+1}$ et (b) est vérifié.

De plus $(T, f(T', T)) \notin \mathscr{T}_n$; en effet:

$$\begin{aligned} \Phi_n(D) \cap \{S = 1\} &= \varphi_{n,D}(l_n(T', T)) \\ &= \varphi_{n,D}(D') \\ &\subset \Phi_n(D) \end{aligned}$$

et la dernière inclusion est stricte puisque D' est contenu strictement dans D.

Soit $(T_n)_{n\in N}$ une suite satisfaisant les hypothèses de (c) et posons: $D_n = \operatorname{Dom} T_n$ et $S_n = f(T_n, T_{n+1})$. Comme $T_1|_{\Phi(D_0)} = S_0|_{\Phi(D_0)} = 1$ on a $(T_0, T_1) \in \mathcal{T}_0$ et d'après (b) on a alors $(T_n, T_{n+1}) \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n-1}$. Nous allons maintenant montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $l_p(T_{n-1}, T_n) = D_p$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$. Pour $n = 1$, on a d'après (2) et (3):

$$l_0(T_0, T_1) = \varphi_{0,D_0}^{-1}(\Phi_0(D_0) \cap \{T_1 = 1\}) = \varphi_{0,D_0}^{-1}(\Phi_0(D_0)) = D_0$$

$$l_1(T_0, T_1) = D_1$$

Supposons la relation établie pour n alors d'après (3):

$$l_{n+1}(T_n, T_{n+1}) = D_{n+1}$$

et pour $p \leqslant n$ on a d'après (2) et (6):

$$\begin{aligned} l_p(T_n, T_{n+1}) &= \varphi_{p,D_n}^{-1}(\Phi_p(D_n) \cap \{S_n = 1\}) = \varphi_{p,D_n}^{-1}(\varphi_{p,D_n}(l_p(T_{n-1}, T_n))) \\ &= l_p(T_{n-1}, T_n) = D_n . \end{aligned}$$

Donc d'après (1) on a $d(T_{n-1}, T_n) = \{D_p;\ 0 \leqslant p \leqslant n\}$. ∎

Démonstration du théorème 8. Fixons pour tout $D \in \mathcal{D}$ une surjection $\vartheta_D\colon N \to D$. Si $(T', T) \in \mathcal{T}$ et $d(T', T) = \{D_p;\ 0 \leqslant p \leqslant n\}$ on choisit pour tout $J \in \mathcal{I}$ un élément $I = g(T', T, J)$ de $\mathcal{I}$ vérifiant

(1) $$\operatorname{diam}(I) < \tfrac{1}{2}\operatorname{diam}(J)$$

(2) $$\bar{I} \subset J,$$

(3) $$I \cap \{\vartheta_{D_p}(q);\ 0 \leqslant p, q \leqslant n\} = \emptyset .$$

On définit ainsi une application $g\colon \mathcal{T} \times \mathcal{I} \to \mathcal{I}$.

Considérons maintenant la α-stratégie σ qui ne dépend que des deux derniers jeux de β et qui est définie par

$$\sigma(V[T, J]) = V[f(T), J],$$

$$\sigma(V[T', J'], V[T, J]) = V[f(T', T), g(T', T, J)] .$$

Si dans une partie compatible avec σ le joueur β a joué au $n$ème coup: $V[T_n, J_n] = V_n$ alors en posant: $D_n = \operatorname{Dom} T_n$ et $I_n = g(T_{n-1}, T_n, J_n)$ on a d'après (1) et (2) que $\bigcap_{n\in N} I_n = \bigcap_{n\in N} J_n = \{t\}$ et d'après (3) et lemme 9 (c) que $t \notin \bigcup_{p,q\in N} \{\vartheta_{D_p}(q)\} = \bigcup_{n\in N} D_n$. Donc l'élément a de X défini par $(\tau(a) = t$ et $\Delta(a) = \bigcup_{n\in N} \{T_n = 1\})$ vérifie $a \in \bigcap_{n\in N} V_n$ et par suite la stratégie σ est gagnante pour α. ∎

Théorème 10. *Il n'existe pas sur X de stratégie gagnante pour le joueur α qui ne dépende que du dernier coup joué par le joueur β.*

Dans toute la suite on désigne par μ une stratégie qui ne dépende que du dernier coup joué, et on munit $\mathcal{S} \times \mathcal{I}$ de la relation de préordre $\prec$ définie par:

$$((S, I) \prec (T, J)) \Leftrightarrow (S \prec T;\ \bar{J} \subset I;\ \operatorname{diam} J < \tfrac{1}{2}\operatorname{diam} I).$$

Lemme 11. *Si μ est gagnante pour α alors il existe $g\colon \mathcal{S} \times \mathcal{I} \to \mathcal{S} \times \mathcal{I}$ vérifiant:*

(a) *$(T, J) \prec g(T, J)$ pour tout $(T, J) \in \mathcal{S} \times \mathcal{I}$.*

(b) *Si $g(T_n, J_n) \prec (T_{n+1}, J_{n+1})$ pour tout $n \in N$, alors $(\bigcap_{n\in N} J_n) \cap (\bigcup_{n\in N} \operatorname{Dom} T_n) = \emptyset$.*

Démonstration. On peut supposer que $\mu(V[T, J]) = V[h(T, J)]$ où $h\colon \mathcal{S} \times \mathcal{I} \to \mathcal{S} \times \mathcal{I}$ vérifie $(T, J) \prec h(T, J)$ (proposition 7).

Pour tout $S \in \mathcal{S}$ notons par $\tilde{S}$ l'élément de $\mathcal{S}$ défini par: $(\operatorname{Dom} \tilde{S} = \operatorname{Dom} S = D$ et $\tilde{S}(t) = 1 - S(t),\ \forall t \in D)$. Si $h(T, J) = (S, I)$, posons $\tilde{h}(T, J) = (\tilde{S}, I)$. On définit maintenant g par:

$$g(T, J) = \tilde{h}(\tilde{h}(T, J))$$

qui vérifie évidemment (a).

Soit $(T_n, J_n)_{n\in N}$ une suite satisfaisant les hypothèses de (b) et posons $h(T_n, J_n) = (S_n, I_n)$ alors on a:

$$(T_n, J_n) \prec h(T_n, J_n) = (S_n, I_n) \prec \tilde{h}(\tilde{S}_n, I_n) = g(T_n, J_n) \prec (T_{n+1}, J_{n+1}) .$$

Donc:

$$h(T_n, J_n) \prec (T_{n+1}, J_{n+1}) \quad \text{et} \quad h(\tilde{S}_n, I_n) \prec (\tilde{T}_{n+1}, J_{n+1}) \prec (\tilde{S}_{n+1}, I_{n+1}) .$$

Donc en posant $V_n = V[T_n, J_n]$ on définit les coups joués par β dans une partie compatible avec la stratégie μ et de même pour $W_n = V[\tilde{S}_n, I_n]$. Si $a \in \bigcap_{n\in N} V_n$ et $b \in \bigcap_{n\in N} W_n$ alors on a:

(1) $$\bigcap_{n\in N} J_n = \bigcap_{n\in N} I_n = \{\tau(a)\} = \{\tau(b)\},$$

(2) $$\Delta(a) \supset \bigcup_{n\in N} \{T_n = 1\} \quad \text{et} \quad \tau(a) \notin \Delta(a),$$

(3) $$\Delta(b) \supset \bigcup_{n\in N} \{\tilde{T}_n = 1\} \quad \text{et} \quad \tau(b) \notin \Delta(b).$$

Donc $(\bigcap_{n\in N} J_n) \cap (\bigcup_{n\in N} \operatorname{Dom} T_n) = \emptyset$. ∎

Dans la suite on note par $g_1\colon \mathcal{S} \times \mathcal{I} \to \mathcal{S}$ et $g_2\colon \mathcal{S} \times \mathcal{I} \to \mathcal{I}$ les deux composantes de g.

Lemme 12. *Si μ est gagnante pour α alors il existe $A \in \mathcal{S}$, $a \in \mathbf{R}^*$ et $(J_n)_{n\in N} \subset \mathcal{I}$ tels que:*

(a) $$\bigcap_{n\in N} J_n = \{a\},$$

(b) $$\forall S \succ A, \quad \forall n \in N, \quad \exists T \succ S, \quad g_2(T, J_n) = J_{n+1} .$$

Démonstration. Remarquons d'abord qu'on a:

(*) $$\forall (B, J), \quad \exists (B', J') \succ (B, J), \quad \forall S \succ B', \quad \exists T \succ S, \quad g_2(T, J) = J'$$

$$\text{où} \quad B, B', S, T \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad J, J' \in \mathcal{I} .$$

En effet supposons le contraire et soit $\mathscr{I} = \{I_n;\ n \in N\}$ une énumération de $\mathscr{I}$. On construit alors par récurrence une suite $(B_n)_{n\in N}$ dans $\mathscr{S}$ vérifiant:

(1) $$B = B_0 \prec B_n \prec B_{n+1}$$

(2) $$\forall T \succ B_n, \quad g_2(T, J) \neq I_n$$

D'où pour $B_\infty = \bigcup_{n\in N} B_n \in \mathscr{S}$ on a: $g_2(B_\infty, J) \neq I_n$ pour tout $n \in N$ ce qui est impossible et démontre (*). En notant dans (*) $(B', J') = \pi(B, J)$ on peut construire inductivement une suite $(A_n, J_n)_{n\in N}$ de $\mathscr{S} \times \mathscr{I}$ avec (A_0, J_0) quelconque et $(A_{n+1}, J_{n+1}) = \pi(A_n, J_n) \succ (A_n, J_n)$. Alors $\{a\} = \bigcap_{n\in N} J_n$ et $A = \bigcup_{n\in N} A_n$ vérifient (a) et (b). ■

Démonstration du théorème 10. Par l'absurde: supposons μ gagnante et considérons a, A et J_n comme dans le lemme 12 et notons pour $S \succ A$ et $n \in N$, par $\gamma_n(S)$ un élément T de $\mathscr{S}$ vérifiant la condition (b) du lemme 12. On définit alors inductivement:

(1) $$S_0 = \begin{cases} A & \text{si } a \in \operatorname{Dom} A, \\ A \cup \{a, 0\} & \text{sinon}, \end{cases}$$

(2) $$T_n = \gamma_n(S_n),$$

(3) $$S_{n+1} = g_1(T_n, J_n).$$

Alors d'après lemme 12 (b) on a $g_2(T_n, J_n) = J_{n+1}$ donc:

$$(T_n, J_n) \prec g(T_n, J_n) = (S_{n+1}, J_{n+1}) \prec (T_{n+1}, J_{n+1})$$

et $a \in \left(\bigcap_{n\in N} J_n\right) \cap \operatorname{Dom} T_0 \neq \varnothing$, ce qui met en défaut le lemme 11 (b). ■

Remarques 13. (a) Dans une première tentative de contre-exemple on considérait le même espace de base X muni de la topologie de la convergence simple. Il est encore α-favorable, mais admet une tactique gagnante pour α (ceci est dû à D. H. Fremlin).

(b) Si σ est une stratégie gagnante pour α sur un espace α-favorable quelconque, alors on peut en déduire facilement une stratégie gagnante σ' qui ne dépend que des coups joués par β. Par contre il n'est pas du tout clair (et probablement faux) qu'on puisse déduire d'une stratégie gagnante τ de type (II), une stratégie gagnante de type III (avec les notations de l'introduction). Cependant on n'a pas d'exemple d'espace α-favorable sans stratégie gagnante de type (III).

Travaux cités

[1] G. Choquet, *Lecture of on Analysis*, Vol. 1, Math. Lecture Notes Ser., W. A. Benjamin, New York 1969.
[2] W. G. Fleissner and K. Kunen, *Barely Baire spaces*, Fund. Math. 101 (1978), 229–240.
[3] J. P. P. Christensen, *Joint continuity of separately continuous functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981).

[4] G. Debs, *Points de continuité d'une fonction séparément continue*, to appear.
[5] D. Mauldin, *The Scottish Book; Mathematics from the Scottish Café*, Bikhäuser, Boston 1981.
[6] J. C. Oxtoby, *The Banach–Mazur game and Baire Cagegory Theorem in Contributions to the Theory of Games*, Vol. 3, Ann. of Math. Stud. 39, Princeton 1957, 159–163.
[7] F. Galvin and R. Telgarski, *Stationary strategies in topological games*, preprint.

ÉQUIPE D'ANALYSE
Équipe de Recherche
associée au C. N. R. S. N° 294
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, Place Jussieu
75230 — Paris Cedex 05

Received 19 March 1984;
in revised form 4 October 1984