Quelques remarques sur la semi-continuité supérieure

par

Zbigniew Grande (Bydgoszcz)

Résumé. Ce travail est consacré à la recherche des ensembles des points de semi-continuité supérieure, de semi-continuité qualitative supérieure et de semi-continuité approximative supérieure de certaine fonction $f: R \to R$ et dans la deuxième partie la preuve de la nouvelle condition suffisante pour la mesurabilité de certaine fonction $f: R^2 \to R$ semi-continue supérieurement par rapport à chacune de deux variables.

Dans la première partie de ce travail j'examine la structure de l'ensemble des points auxquels une fonction réelle d'une variable réelle $f: R \to R$ est semi-continue supérieurement (approximativement semi-continue supérieurement, respectivement qualitativement semi-continue supérieurement). Dans la deuxième — je démontre une nouvelle condition suffisante pour qu'une fonction $f: R^2 \to R$ semi-continue supérieurement par rapport à chacune de deux variables soit mesurable (au sens de Lebesgue).

I. Soient R l'espace des nombres réels et $f: R \to R$ une fonction. Désignons par $C(f)$ l'ensemble des points de continuité de la fonction f, par $S(f)$ l'ensemble de tous les points auxquels la fonction f est semi-continue supérieurement et par $T(f)$ l'ensemble de tous les points $x \in R$ tels que $f(x) > \limsup_{t \to x} f(t)$.

REMARQUE 1. *L'ensemble $T(f)$ est dénombrable.*

Preuve. Si $x \in T(f)$, il existe un intervalle ouvert $U(x)$ d'extrémités rationnelles contenant x et un intervalle ouvert $V(x)$ d'extrémités rationnelles contenant $f(x)$ tels que $f(t) \notin V(x)$ pour $t \in U(x) - \{x\}$. Remarquons que $(U(x), V(x)) \neq (U(y), V(y))$ lorsque $x \neq y$. L'ensemble de tous les couples d'intervalles ouverts d'extrémités rationnelles étant dénombrable, l'ensemble $T(f)$ est le même.

Remarquons maintenant que, quelle que soit la fonction $f: R \to R$, l'ensemble $C(f)$ est du type G_δ ([9], p. 64, Th. 3) dense dans l'intérieur $\operatorname{Int} S(f)$ de l'ensemble $S(f)$.

Démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soient A, B, D des ensembles tels que B soit du type G_δ, D dénombrable, $B \subset A$, $D \subset A - B$ et B dense dans $\operatorname{Int} A$. Il existe une fonction $f: R \to R$ telle que $S(f) = A$, $C(f) = B$ et $T(f) = D$.*

Preuve. Désignons par E la fermeture $\operatorname{Cl} B$ de l'ensemble B. L'ensemble $E - B$ est du type F_σ et de première catégorie. Par conséquent $E - B = \bigcup_n F_n$, où tous les ensembles F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont fermés et disjoints deux à deux ([10]). Il résulte du théorème de Cantor–Bendixon que $F_n = G_n \cup H_n$, où l'ensemble G_n est parfait, l'ensemble H_n est dénombrable et $G_n \cap H_n = \emptyset$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Si $\bigcup_n H_n \neq \emptyset$, rangeons tous ses points en une suite $(a_1, a_2, \ldots)$ (peut-être finie) telle que $a_i \neq a_j$ lorsque $i \neq j$. Soit $(b_i)_i$ une suite de nombres positifs telle que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i \leqslant 1$.

Posons

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x < a_i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, \\ \sum_{a_i \leqslant x} b_i & \text{dans le cas contraire}. \end{cases}$$

La fonction g est croissante, continue en tout point $t \neq a_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, discontinue en tout point a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ et continue à droite en tout point $x \in R$. Par conséquent elle est semi-continue supérieurement en tout point $x \in R$ et $T(g) = \emptyset$.

Soit maintenant

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \in (R-E) \cup B \cup \bigcup_n H_n \cup \\ & \quad \cup \bigcup_n [(G_n \cap A) - \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}_{G_n}(G_n \cap A)], \\ g(x) + 1/n & \text{pour } x \in A \cap \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}_{G_n}(G_n \cap A), \quad n = 1, 2, \ldots, \\ g(x) - 1/n & \text{pour } x \in G_n - A, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

($\mathrm{Int}_{G_n} X$ et $\mathrm{Cl}\, X$ désignant l'intérieur de l'ensemble X relativement à l'ensemble G_n, respectivement la fermeture de l'ensemble X.)

Remarquons que $S(h) = (R-E) \cup (A \cap \bigcup_n G_n) \cup \bigcup_n H_n \cup B$, $C(h) = (R-E) \cup \cup B$ et $T(h) = \emptyset$.

En effet, on voit facilement que $(R-E) \cup B \subset C(h)$. Si $x \in E - B = \bigcup_n (G_n \cup H_n)$, il existe un indice n_0 tel que $x \in G_{n_0} \cup H_{n_0}$ et par conséquent quatre cas sont à considérer:

1) $x \in H_{n_0}$;
2) $x \in (G_{n_0} \cap A) - \mathrm{Cl}\mathrm{Int}_{G_{n_0}}(G_{n_0} \cap A)$;
3) $x \in A \cap \mathrm{Cl}\mathrm{Int}_{G_{n_0}}(G_{n_0} \cap A)$;

et

4) $x \in G_{n_0} - A$.

Cas 1. Si $x \in H_{n_0}$, on a $g(x) = h(x)$, $x \in S(g) - C(g)$, par conséquent $x \in S(H) - C(h)$.

Cas 2. Si $x \in (G_{n_0} \cap A) - \mathrm{Cl}\mathrm{Int}_{G_{n_0}}(G_{n_0} \cap A)$, il existe une suite de points $t_k \in G_{n_0} - A$ $(k = 1, 2, \ldots)$ convergente vers x; par conséquent d'après la continuité de la fonction g au point x, on a

$$h(x) = g(x) > g(x) - 1/n_0 = \lim_{k\to\infty} g(t_k) - 1/n_0 = \lim_{k\to\infty} h(t_k).$$

Puisque, de plus,

$$h(x) = g(x) = \lim_{t\to x} g(t) = \lim_{t\to x} \sup h(t),$$

on a $x \in S(h) - C(h)$.

Cas 3. Si $x \in A \cap \mathrm{Cl}\mathrm{Int}_{G_{n_0}}(G_{n_0} \cap A)$, il existe une suite de points $t_k \in B$ $(k = 1, 2, \ldots)$ convergente vers x, par conséquent

$$h(x) = g(x) + 1/n_0 = \lim_{k\to\infty} g(t_k) + 1/n_0 = \lim_{k\to\infty} h(t_k) + 1/n_0.$$

De plus, quelle que soit la suite $(u_k)_k$ convergente vers x, on a

$$h(x) = g(x) + 1/n_0 = \lim_{k\to\infty} g(u_k) + 1/n_0 \geqslant \limsup_{k\to\infty} h(u_k).$$

Il en résulte que $x \in S(h) - C(h)$.

Cas 4. Si $x \in G_{n_0} - A$, il existe une suite de points $t_k \in B$ $(k = 1, 2, \ldots)$ convergente vers x, par conséquent

$$h(x) = g(x) - 1/n_0 = \lim_{k\to\infty} g(t_k) - 1/n_0 = \lim_{k\to\infty} h(t_k) - 1/n_0 < \lim_{k\to\infty} h(t_k).$$

Il en résulte que $x \notin S(h)$.

L'égalité $T(h) = \emptyset$ résulte immédiatement de la continuité à droite de la fonction g.

En posant maintenant

$$h_1(x) = \begin{cases} h(x) - 1/n & \text{lorsque } x \in \bigcup_k H_k - A \text{ et } x = a_n \ (n = 1, 2, \ldots), \\ h(x) & \text{dans le cas contraire} \end{cases}$$

et en remarquant que la fonction h est continue à droite et continue supérieurement en tout point $x \in \bigcup_n H_n$, on vérifie que

$$S(h_1) = (R-E) \cup (A \cap E),\ C(h_1) = (R-E) \cup B \text{ et } T(h_1) = \emptyset.$$

Soit $((c_n, d_n))_n$ une suite de toutes les composantes ouvertes de l'ensemble $E - R$ $((c_n, d_n) \neq (c_m, d_m)$ lorsque $m \neq n)$. Il existe une fonction $l\colon R \to R$ de deuxième classe de Baire qui transforme tout intervalle ouvert nonvide sur toute droite R ([7]). Posons, pour $x \in R$, $\mathrm{dist}(x, E) = \inf_{y\in E} |x - y|$ et

$$m(x) = h_1(x) + \mathrm{dist}(x, E)\,\mathrm{arctg}\, l(x) \quad \text{pour} \quad x \in R.$$

De nouveau remarquons que $C(m) = B$, $S(m) = A \cap E$ et $T(m) = \emptyset$. Soit $(e_n)_n$ une suite de tous les points de l'ensemble D $(e_i \neq e_j$ pour $i \neq j)$,

$$r(x) = \begin{cases} h_1(x) + \mathrm{dist}(x, E)\cdot\pi/2 & \text{pour } x \in A \cap (c_n, d_n),\ n = 1, 2, \ldots, \\ m(x) & \text{pour } x \in R - ((R-E) \cap A) \end{cases}$$

et

$$f(x)=\begin{cases} r(x)+1/n & \text{lorsque } x=e_n,\ n=1,2,\ldots,\\ r(x) & \text{lorsque } x\neq e_n,\ n=1,2,\ldots \end{cases}$$

On a $C(r)=B$, $S(r)=A$, $T(r)=\emptyset$, $C(f)=B$, $S(f)=A$ et $T(f)=D$ et la preuve est achevée.

Il résulte de la preuve du Théorème 1:

REMARQUE 2. *Dans les hypothèses du Théorème* 1, *si l'ensemble A est mesurable (à la propriété de Baire), la fonction f peut être mesurable (avec la propriété de Baire).*

COROLLAIRE 1. *Tout ensemble $A\subset R$ est l'ensemble de tous les points de semi-continuité supérieure d'une fonction $f\colon R\to R$.*

On sait ([8]) que, quelle que soit la fonction $f\colon R\to R$ ayant la propriété de Baire, il existe un ensemble résiduel $A\subset R$ tel que la fonction partielle $f|A$ est continue. Il en résulte que l'ensemble de tous les points de continuité qualitative d'une fonction ayant la propriété de Baire est résiduel. D'autre part, la fonction indicatrice d'un ensemble résiduel $A\subset R$ est qualitativement continue en tout point $x\in A$ et n'est qualitativement semi-continue supérieurement en aucun point $x\in R-A$.

Étant donnée une fonction $f\colon R\to R$, désignons par $Q(f)$ l'ensemble de tous les points auxquels la fonction f est qualitativement continue, par $S_q(f)$ l'ensemble de tous les points auxquels elle est qualitativement semi-continue supérieurement et par $T_q(f)$ l'ensemble de tous les points $x\in R$ tels que

$$f(x)>\inf\{y\in R\colon \text{l'ensemble } \{t\colon f(t)<y\} \text{ est résiduel au point } x\} \overset{\mathrm{df}}{=} q\text{-}\limsup_{t\to x} f(t)\quad (\inf\emptyset=\infty).$$

THÉORÈME 2. *Soit $A\subset R$ un ensemble. Pour qu'il existe une fonction $f\colon R\to R$ telle que $Q(f)=A$, il faut et il suffit que $A=B-C$, où B soit du type G_δ et C de première catégorie.*

Preuve. Nécessité. Soit $f\colon R\to R$ une fonction. Désignons par D l'intérieur $\operatorname{Int}Q(f)$ de l'ensemble $Q(f)$ et par E la fermeture $\operatorname{Cl}D$ de l'ensemble D. Si $R=E$, on a $Q(f)=R-(R-Q(f))$ et $R-Q(f)\subset E-D$, d'où il vient que l'ensemble $R-Q(f)$ est de première catégorie et $Q(f)$ est de la forme $B-C$, où B $(=R)$ est du type G_δ et C est de première catégorie. Supposons donc que $R-E\neq\emptyset$. L'ensemble ouvert $R-E$ est l'union de ses composantes ouvertes (a_n,b_n) $(n=1,2,\ldots)$ Il suffit donc de prouver que tout ensemble $(a_n,b_n)\cap Q(f)=B_n-C_n$, où B_n est du type G_δ et C_n de première catégorie $(n=1,2,\ldots)$. Fixons des nombres naturels n et m et supposons que $(a_n,b_n)\cap Q(f)\neq\emptyset$. Il existe pour tout point $x\in(a_n,b_n)\cap Q(f)$ un intervalle ouvert $U(x,m)\subset(a_n,b_n)$ d'extrémités rationnelles tel que $x\in U(x,m)$ et l'ensemble $A(x,m)=\{t\in U(x,m)\colon |f(t)-f(x)|<1/m\}$ est de première catégorie. Remarquons que $|f(u)-f(x)|<1/m$ pour tout point $u\in Q(f)\cap U(x,m)$. La famille de tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles étant dénombrable, il existe un ensemble dénombrable $D_m\subset Q(f)\cap(a_n,b_n)$ tel que

$$\bigcup_{x\in D_m}U(x,m)=\bigcup_{x\in Q(f)\cap(a_n,b_n)}U(x,m).$$

Posons

$$G_m=\bigcup_{x\in D_m}U(x,m)\quad\text{et}\quad H_m=G_m-\bigcup_{x\in D_m}A(x,m).$$

On voit que $\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{x\in D_m}A(x,m)$ est un ensemble de première catégorie, $Q(f)\cap(a_n,b_n)\subset\bigcap_{m=1}^{\infty}H_m=\bigcap_{m=1}^{\infty}G_m-\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{x\in D_m}A(x,m)$ et $\bigcap_{m=1}^{\infty}G_m$ est un ensemble du type G_δ. Démontrons encore que $\bigcap_{m=1}^{\infty}H_m\subset(a_n,b_n)\cap Q(f)$.

Fixons un point $t_0\in\bigcap_{m=1}^{\infty}H_m$ et un nombre $\varepsilon>0$. Il existe un indice naturel m_0 et un point $x_0\in D_{m_0}$ tels que $1/m_0<\varepsilon/2$ et $t_0\in U(x_0,m_0)-\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{x\in D_m}A(x,m)$. On a pour tout $t\in U(x_0,m_0)-\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{x\in D_m}A(x,m)$ l'inégalité suivante

$$|f(t)-f(t_0)|\leqslant|f(t)-f(x_0)|+|f(t_0)-f(x_0)|<1/m_0+1/m_0<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

ce qui termine la preuve de la nécessité.

Suffisance. Si $A=B-C$, où B est du type G_δ et $C\subset B$ est de première catégorie, il existe une fonction $g\colon R\to[0,1]$ continue en tout point $x\in B$, discontinue en tout point $x\notin B$ et telle que $g(x)=0$ pour tout $x\in B$ ([11]). Dans le cas où $\operatorname{Cl}B=R$ la fonction

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{lorsque } x\in B-C,\\ q\text{-}\limsup_{t\to x} f(t)+1 & \text{lorsque } x\in R-(B-C)\end{cases}$$

satisfait aux conditions exigées. Dans le cas contraire où $R-\operatorname{Cl}B\neq\emptyset$, on peut écrire $R-\operatorname{Cl}B=\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i$, où tous les ensembles K_i $(i=1,2,\ldots)$ sont de deuxième catégorie dans tout intervalle ouvert contenu dans $R-\operatorname{Cl}B$ et $K_i\cap K_j=\emptyset$ lorsque $i\neq j$. En posant

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{lorsque } x\in A,\\ 1 & \text{lorsque } x\in\operatorname{Cl}B-A,\\ \operatorname{dist}(x,\operatorname{Cl}B)/i & \text{lorsque } x\in K_i\ (i=1,2,\ldots),\end{cases}$$

on obtient la fonction f qui satisfait à toutes les conditions exigées.

REMARQUE 3. *Soit $f\colon R\to R$ une fonction. L'ensemble $T_q(f)$ est de première catégorie.*

Preuve. En effet, si $x \in T_q(f)$, on a $f(x) > q\text{-}\limsup_{t\to x} f(t)$; par conséquent il existe un intervalle ouvert $U(x)$ d'extrémités rationnelles contenant x et un intervalle ouvert $V(x)$ d'extrémités rationnelles contenant $f(x)$ tels que $f^{-1}(V(x)) \cap \cap U(x)$ est de première catégorie. Remarquons que, quel que soit le couple (U, V) d'intervalles ouverts d'extrémités rationnelles, l'ensemble $A(U, V) = \{x \in T_q(f)$: au point x correspond le couple $(U(x), V(x)) = (U, V)\}$ est de première catégorie. Comme, de plus, l'ensemble de tous les couples d'intervalles ouverts d'extrémités rationnelles est dénombrable, l'ensemble $T_q(f) \subset \bigcup_{(U,V)} A(U, V)$ est également de première catégorie.

REMARQUE 4. *Si une fonction $f\colon R \to R$ est qualitativement semi-continue supérieurement en tout point de certain ensemble A ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie, elle est qualitativement continue en tout point de cet ensemble à l'exception de certain ensemble de première catégorie.*

Preuve. En effet, la fonction réduite $f|A$ a la propriété de Baire et par conséquent il existe un ensemble $B \subset A$ de première catégorie tel que la fonction partielle $f|A-B$ est continue. La fonction f est donc qualitativement continue en tout point $x \in A-B$ auquel l'ensemble $A-B$ est résiduel.

THÉORÈME 3. *Supposons que les ensembles A, B, C soient tels que C est de première catégorie, $B \subset A$, $C \subset A$, $A-B$ ne contient aucun ensemble ayant la propriété de Baire, de deuxième catégorie et $B = D-C$, où D est un ensemble du type G_δ. Dans ces hypothèses il existe une fonction $g\colon R \to R$ telle que $Q(g) = B$, $S_q(g) = A$ et $T_q(g) = C$.*

Preuve. Désignons par E la fermeture $\mathrm{Cl}\,B$ de l'ensemble B et remarquons que l'ensemble $E-D$ est du type F_σ, de première catégorie. On a donc $E-D = \bigcup_n F_n$, où tous les ensembles F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont fermés et disjoints deux à deux ([10]). Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres positifs tels que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ et $a_n > 2\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Posons, pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$h_n(x) = \begin{cases} a_n \sin(1/\mathrm{dist}(x, F_n)) & \text{lorsque } x \notin F_n, \\ 0 & \text{lorsque } x \in F_n. \end{cases}$$

Toute fonction h_n est continue en tout point $x \notin F_n$ et discontinue en tout point $x \in F_n$. Soit

$$h(x) = \sum_n h_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in R.$$

Si $E = R$, il suffit de poser

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{lorsque } x \in C, \\ q\text{-}\limsup_{t\to x} h(t) & \text{lorsque } x \in A-C, \\ h(x) & \text{lorsque } x \in R-A \end{cases}$$

et la fonction g satisfait aux conditions exigées.

En effet, la fonction h étant la somme d'une suite uniformément convergente, on a $C(h) = D$. Si $x \in R-D$, il existe un indice n_0 tel que $x \in F_{n_0}$. On a

$$h = \sum_n h_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} h_n + h_{n_0} + \sum_{n > n_0+1} h_n.$$

Il existe une suite d'intervalles ouverts nonvides $I_k \subset R-F_{n_0}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ disjoints deux à deux et tels que, quelle que soit une suite de points $u_k \in I_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, on a $\lim_{k\to\infty} u_k = x$ et $h_{n_0}(u_k) > a_{n_0} - a_{n_0}/3k$. Puisque $h_{n_0}(x) = 0$, $\sum_{n=1}^{n_0-1} h_n$ est continue au point x et $a_{n_0} > 2\sum_{n > n_0} a_n$, on a $h(x) < q\text{-}\limsup_{t\to x} h(t)$. Par conséquent $(R-D) \cap \cap S_q(h) = \emptyset$. Comme $g(x) = 2$ pour tout $x \in C$ et $h(t) \leqslant 1$ pour tout $t \in R$, on a $C \subset T_q(g)$. De la définition de la fonction g résulte que $A-C \subset S_q(g)-T_q(g)$ et $(R-A) \cap S_q(g) = \emptyset$. Mais $\{t \in R\colon h(t) \neq g(t)\}$ est de première catégorie et $B \subset \{t \in R\colon h(t) = g(t)\}$, on a donc $B \subset Q(g) \subset D$.

Dans le cas contraire, si $E \neq R$, il existe une suite d'ensembles G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ disjoints deux à deux, de deuxième catégorie dans tout intervalle ouvert contenu dans $R-E$ et tels que $R-E = \bigcup_n G_n$. Rangeons tous les nombres rationnels de l'intervalle $(-1, 1)$ en une suite $(b_n)_n$ telle que $b_n \neq b_k$ lorsque $k \neq n$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$, posons

$$g_1(x) = \begin{cases} 2 & \text{lorsque } x \in C, \\ h(x) & \text{lorsque } x \in E-C, \\ b_n\,\mathrm{dist}(x, E)/(1+\mathrm{dist}(x, E)) & \text{lorsque } x \in G_n,\ n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{lorsque } x \in (R-A) \cup C, \\ q\text{-}\limsup_{t\to x} g_1(t) & \text{lorsque } x \in A-C \end{cases}$$

et remarquons que la fonction g satisfait aux conditions exigées. En effet, si $x \in B$, la fonction h est continue au point x. Il en résulte que $x \in Q(g_1)$ et par conséquent $x \in Q(g)$. Dans le cas où $x \in C$ on voit que $x \in T_q(g_1)$ et par conséquent $x \in T_q(g)$. Si $x \in (R-A) \cap (R-E)$, on a $x \notin S_q(g_1)$ et par conséquent $x \notin S_q(g)$, puisque $A \cap (R-E)$ ne contient aucun ensemble de deuxième catégorie, ayant la propriété de Baire. Si $x \in (R-A) \cap E$, on a de même que dans le cas où $E = R$ que $x \in S_q(g)$. Enfin, si $x \in A-C$, il résulte de la définition de la fonction g que $x \in S_q(g)-T_q(g)$.

PROBLÈME 1. *La conclusion du théorème 3 reste-t-elle vraie lorsqu'on remplace l'hypothèse "B est de la forme $D-C$, où D est du type G_δ" par l'hypothèse "$B = D-D_1$, où D est du type G_δ et D_1 est de première catégorie et $B \cap C = \emptyset$"?*

Étant donnée une fonction $f\colon R \to R$, désignons par $A(f)$ l'ensemble de tous les points de continuité approximative de la fonction f, par $S_a(f)$ l'ensemble de tous les points auxquels la fonction f est approximativement semi-continue supérieurement et par $T_a(f)$ l'ensemble de tous les points x tels que $f(x) > \mathrm{ap}\limsup_{t\to x} f(t)$, où $\mathrm{ap}\limsup_{t\to x} f(t) = \inf\{y\colon$ l'ensemble $\{t\colon f(t) > y\}$ est de densité 0 au point $x\}$.

Puisque toute fonction mesurable est approximativement continue presque partout, l'ensemble de tous les points de semi-continuité supérieure approximative d'une fonction mesurable est de mesure pleine. Réciproquement, tout ensemble de mesure pleine est l'ensemble de tous les points de continuité approximative de sa fonction indicatrice.

REMARQUE 5. *Soit $f\colon R \to R$ une fonction. L'ensemble $T_a(f)$ est de mesure zéro.*

Preuve. Remarquons qu'il existe pour tout $x \in T_a(f)$ un nombre rationnel $r(x)$ tel que $\operatorname{ap}\limsup_{t\to x} f(t) < r(x) < f(x)$. Supposons, au contraire, que $m^*(T_a(f)) > 0$, où m^* désigne, comme d'habitude, la mesure extérieure de Lebesgue. D'une part, x est un point de dispersion de l'ensemble $\{t\colon f(t) > r(x)\}$ et $f(x) > r(x)$ pour tout $x \in T_a(f)$. D'autre part, il existe un nombre rationnel r_0 tel que $m^*(H) > 0$, où $H = \{x \in T_a(f)\colon$ au point x correspond $r(x) = r_0\}$. Soit $x_0 \in H$ un point de densité extérieure de l'ensemble H. Puisque $\{t\colon f(t) > r_0\} \supset H$, on a une contradiction avec le fait que x_0 est un point de dispersion de l'ensemble $\{t\colon f(t) > r_0\}$.

REMARQUE 6. *Soit $f\colon R \to R$ une fonction. L'ensemble $A(f)$ est mesurable.*

Preuve. Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f\colon R \to R$ telle que l'ensemble $A(f)$ ne soit pas mesurable. Par conséquent il existe un ensemble $B \subset A(f)$ de mesure extérieure positive tel que l'ensemble B_1 de tous les points de densité extérieure de l'ensemble B ne contient aucun sous-ensemble mesurable, de mesure positive de l'ensemble $A(f)$. La fonction partielle $f|B_1$ n'est pas mesurable, puisque l'ensemble $B_1 - A(f)$ est de mesure extérieure positive. D'autre part, quel que soit l'ensemble mesurable, de mesure positive $C \subset B_1$, il existe un point $x_0 \in C \cap A(f)$ qui est un point de densité de l'ensemble C. La fonction $f|C$ étant approximativement continue au point x_0, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-ensemble mesurable $D \subset C \subset B_1$, de mesure positive tel que $\operatorname{osc}_D f \leqslant \varepsilon$. Du lemme 2 de l'article [1] résulte que la fonction $f|B_1$ est mesurable. Cette contradiction montre que l'ensemble $A(f)$ est mesurable.

REMARQUE 7. *Soit $f\colon R \to R$ une fonction. Si la fonction f est approximativement semi-continue supérieurement en tout point d'un ensemble mesurable, de mesure positive, la fonction f est approximativement continue en presque tous les points de cet ensemble.*

Cette remarque résulte du théorème 1 de l'article [2].

THÉORÈME 4. *Soient $A, B, C \subset R$ des ensembles tels que $m(C) = 0$, $C \subset A$, $B \subset A$, $B = D - C$, D est du type G_δ, $R - D = M \cup N$, M et N sont du type F_σ, $m(N) = 0$, tout point $x \in M$ est un point de densité de l'ensemble M et $A - B$ ne contient aucun ensemble mesurable, de mesure positive. Dans ces hypothèses, il existe une fonction $f\colon R \to R$ telle que $A(f) = B$, $S_a(f) = A$ et $T_a(f) = C$.*

Preuve. Cas I. $m(R-D) = 0$. Dans ce cas $R - D = \bigcup_n F_n$, où les ensembles F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont fermés, de mesure zéro et disjoints deux à deux ([10]). Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres positifs telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ une fonction $g_n\colon R \to [0, a_n]$ continue en tout point $x \notin F_n$, approximativement discontinue en tout point $x \in F_n$ et telle que $g_n(x) = 0$ pour tout $x \in F_n$ et $\operatorname{ap}\limsup_{t\to x} g_n(t) = a_n$ pour tout $x \in F_n$. Posons

$$g(x) = \sum_n g_n(x) \quad \text{pour} \quad x \in R$$

et

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{lorsque } x \in C, \\ g(x) + a_n & \text{lorsque } x \in (A \cap F_n) - C,\ n = 1, 2, \ldots, \\ g(x) & \text{lorsque } x \in B \cup \bigcup_n (F_n - A). \end{cases}$$

On a $A(f) = B$, $S_a(f) = A$ et $T_a(f) = C$. En effet, g étant continue en tout point $x \in D$, $B \subset D$ et $m(R-B) = 0$, f est approximativement continue en tout point $x \in B$. Puisque $g(x) \leqslant 1$ pour tout x, $f(x) = 2$ pour tout $x \in C$, $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in B$ et $m(R-B) = 0$, on a $T_a(f) \supset C$. Si $x \in (R-D) \cap A$, il existe un indice n_0 tel que $x \in (A \cap F_{n_0}) - C$ et par conséquent $f(x) = g(x) + a_{n_0} = \sum_n g_n(x) + a_{n_0} = \sum_{n \neq n_0} g_n(x) + g_{n_0}(x) + a_{n_0}$. Toutes les fonctions $g_n (n \neq n_0)$ étant continues au point x et $\operatorname{ap}\limsup_{t\to x} g_{n_0}(t) = a_{n_0}$ et $g_{n_0}(x) = 0$, on a $x \in S_a(f)$. Enfin, si $x \in (R-D) - A$, il existe un indice n_1 tel que $x \in F_{n_1} - A$ donc $f(x) = g(x) = \sum_{n \neq n_1} g_n(x) + g_{n_1}(x)$. Toutes les fonctions $g_n (n \neq n_1)$ étant continues au point x, $g_{n_1}(x) = 0$ et $\operatorname{ap}\limsup_{t\to x} g_{n_1}(t) = a_{n_1}$, on a $x \notin S_a(f)$.

Cas II. $m(R-D) > 0$. D'après le lemme 11 du travail [13] il existe une fonction approximativement continue $h\colon R \to [0, 1]$ telle que $h(x) = 0$ pour tout $x \notin M$, $0 < h(x) \leqslant 1$ pour $x \in M$ et tout point $x \notin M$ est un point de continuité de la fonction h. On a $N = \bigcup_n F_n$, où tous les ensembles F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont fermés et disjoints deux à deux. De même que dans le cas I définissons la fonction g et posons $k = h + g$. La fonction k est approximativement continue en tout point $x \notin N$, $k(x) < \operatorname{ap}\limsup_{t\to x} k(t)$ pour tout $x \in N$ et $0 \leqslant k(x) \leqslant 2$ pour tout x. Soit $(K_n)_n$ une suite d'ensembles disjoints deux à deux, de mesure intérieure zéro et tels que leurs complémentaires $M - A - K_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont de mesure intérieure zéro et $M - A = \bigcup_n K_n$. Soit $(b_n)_n$ la suite de tous les nombres rationnels de l'intervalle $(0, 1)$ telle que $b_n \neq b_m$ lorsque $n \neq m$, $(n, m = 1, 2, \ldots)$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{lorsque } x \in C, \\ k(x) & \text{lorsque } x \in B \cup (N - A) \cup (M \cap (A - C)), \\ \operatorname{ap}\limsup_{t\to x} k(t) & \text{lorsque } x \in N \cap (A - C), \\ g(x) + b_n h(x) & \text{lorsque } x \in (M - A) \cap K_n \ (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

et remarquons que la fonction f satisfait à toutes les conditions exigées. En effet, on voit facilement que $T_a(f) \supset C$, $N \cap (A-C) \subset S_a(f)$ et $M \cap (A-C) \subset S_a(f)$. Puisque $k(x) = g(x)+h(x) = g(x)$ pour $x \in B$ et $f(x) \leqslant k(x)$ pour $x \in M-C$ et h est approximativement continue, on a $A(f) \supset B$. Si $x \in M-A$, il existe n_0 tel que $x \in (M-A) \cap K_{n_0}$. On a alors $f(x) = g(x)+b_{n_0}h(x)$ et x est un point de densité extérieure de certain ensemble $(M-A) \cap K_{n_1}$ tel que $b_{n_1} > b_{n_0}$. Comme, de plus, $h(x) > 0$ pour tout $x \in M$, on a

$$f(x) = g(x)+b_{n_0}h(x) < g(x)+b_{n_1}h(x) = g(x)+$$
$$+b_{n_1}\operatorname{ap}\limsup_{t\to x} h(t) \leqslant \operatorname{ap}\limsup_{t\to x} f(t)$$

et par conséquent $(M-A) \cap S_a(f) = \emptyset$.

Enfin, si $x \in N-A$, on a $f(x) = k(x) = g(x)+h(x)$. La fonction h étant approximativement continue au point x, $g(x) < \operatorname{ap}\limsup_{t\to x} g(t)$ et $\sup_n b_n = 1$, il existe n_2 tel que $g(x) < \operatorname{ap}\limsup_{t\to x} b_{n_2} g(t)$. Comme, de plus, x est un point de densité extérieure de l'ensemble $B \cup (M \cap (A-C)) \cup ((M-A) \cap K_{n_2})$, on a $f(x) < \operatorname{ap}\limsup_{t\to x} f(t)$ donc $(N-A) \cap S_a(f) = \emptyset$.

PROBLÈME 2. *Soient A, B, $C \subset R$ des ensembles tels que $B \subset A$, $C \subset A$, $B \cap C = \emptyset$, C est de mesure zéro, B est mesurable et $A-B$ ne contient aucun ensemble mesurable de mesure positive. Existe-t-il une fonction $f\colon R \to R$ telle que $A(f) = B$, $S_a(f) = A$ et $T_a(f) = C$?*

II. Dans l'article [12] Sierpiński a montré un exemple d'un ensemble $A \subset [0, 1]\times[0, 1]$ nonmesurable et ayant au plus deux points communs avec toute droite. La fonction indicatrice de l'ensemble A est nonmesurable et semi-continue supérieurement par rapport à chacune des deux variables.

DÉFINITION 1. On dit qu'une fonction $f\colon [0, 1] \to R$ est *fortement (essentiellement) semi-continue supérieurement au point x_0* lorsqu'elle est semi-continue supérieurement au point x_0 et qu'il existe un ensemble ouvert $U \subset [0, 1]$ tel que $x_0 \in \operatorname{Cl} U$ et $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in U}} f(x) = f(x_0)$ (et $x_0 \notin T(f)$, c'est-à-dire $\lim_{t\to x_0}\sup f(t) = f(x_0)$).

On a le théorème suivant:

THÉORÈME 5. *Si toutes les sections $f_x(t) = f(x, t)$ d'une fonction $f\colon [0, 1]\times\times[0, 1] \to R$ sont fortement semi-continues supérieurement en tout point $t \in R$ et si toutes les sections $f^y(t) = f(t, y)$ sont semi-continues supérieurement, la fonction f est mesurable.*

Preuve. Supposons, au contraire, que la fonction f ne soit pas mesurable. Il existe donc un nombre $a \in R$ tel que l'ensemble $\{(x, y) \in [0, 1]\times[0, 1]\colon f(x, y) < a\}$ n'est pas mesurable et par conséquent il existe un ensemble mesurable

$$A \subset \{(x, y) \in [0, 1]\times[0, 1]\colon f(x, y) < a\}$$

tel que la mesure intérieure $m_*(\{(x, y)\colon f(x, y) < a\}-A) = 0$ et la mesure extérieure $m^*(\{(x, y)\colon f(x, y) < a\}-A) > 0$. Puisque

$$\{(x, y)\colon f(x, y) < a\} = \bigcup_n \{(x, y)\colon f(x, y) < a-1/n\},$$

1 existe un indice naturel n_0 tel que

$$m^*(\{(x, y)\colon f(x, y) < a-1/n_0\}-A) > 0 .$$

Posons $B = \{(x, y)\colon f(x, y) < a-1/n_0\}-A$ et remarquons que, quel que soit l'ensemble mesurable $X \subset [0, 1]\times[0, 1]$ tel que $m^*(X \cap B) > 0$, on a aussi

$$m^*(X \cap \{(x, y)\colon f(x, y) \geqslant a\}) > 0 .$$

Procédons par induction. Toutes les sections f^y étant semi-continues supérieurement, il existe pour tout point $(x, y) \in B$ un intervalle ouvert $I(x, y) \subset R$ d'extrémités rationnelles contenant x et tel que $f(t, y) < a-1/n_0$ pour tout $t \in I(x, y)$. L'ensemble de tous les intervalles d'extrémités rationnelles étant dénombrable et $m^*(B) > 0$, il existe un intervalle ouvert I_0 d'extrémités rationnelles tel que l'ensemble

$$C = \{(x, y) \in B\colon \text{au point } (x, y) \text{ correspond l'intervalle } I(x, y) = I_0\}$$

est de mesure extérieure positive. Posons $D = \operatorname{Pr}_Y C$ (la projection de l'ensemble C sur l'axe des y) et $E = \{t \in R\colon t \text{ est un point de densité extérieure de l'ensemble } D\}$ et remarquons que $m^*(D) = m^*(D \cap E) > 0$ et l'ensemble E est mesurable. Fixons un nombre $y_0 \in D \cap E$. On a pour $t \in I_0$, $f(t, y_0) < a-1/n_0$. Toutes les sections f_x étant fortement semi-continues supérieurement, il existe pour tout point $(x, y) \in (I_0\times E) \cap \{(x, v)\colon f(u, v) \geqslant a\}$ un intervalle ouvert $J(x, y)$ d'extrémités rationnelles, contenu dans $[0, 1]$ et tel que $f(x, t) > a-1/2n_0$ pour tout $t \in J(x, y)$. L'ensemble de tous les intervalles d'extrémités rationnelles étant dénombrable et

$$m^*((I_0\times E) \cap \{(u, v)\colon f(u, v) \geqslant a\}) > 0 ,$$

il existe un intervalle ouvert J_1 d'extrémités rationnelles tel que l'ensemble $F_1 = \{(x, y) \in (I_0\times E) \cap \{(u, v)\colon f(u, v) \geqslant a\}\colon$ au point (x, y) correspond l'intervalle $J(x, y) = J_0\}$ est de mesure extérieure positive. Soient $G_1 = \operatorname{Pr}_X F_1$ (la projection de l'ensemble F_1 sur l'axe des x) et $H_1 = \operatorname{Cl} G_1$. Remarquons que $m^*(G_1) > 0$ et $f(x, y) \geqslant a-1/2n_0$ pour tout point $(x, y) \in H_1\times J_1$ (puisque toutes les sections f^y sont semi-continues supérieurement). D'une façon analogue il existe pour tout point $(x, y) \in [H_1\times(E \cap (y_0-1/2, y_0+1/2))] \cap \{(u, v)\colon f(u, v) \geqslant a\}$ un intervalle ouvert $J(x, y)$ d'extrémités rationnelles, contenu dans l'intervalle $(y_0-1/2, y_0+1/2)$ et tel que $f(x, t) \geqslant a-1/2n_0$ pour tout $t \in J(x, y)$; par conséquent il existe un intervalle ouvert $J_2 \subset (y_0-1/2, y_0+1/2)$ tel que l'ensemble $F_2 = \{(x, y) \in [H_1\times(E \cap (y_0-1/2, y_0+1/2))] \cap \{(u, v)\colon f(u, v) \geqslant a\}\colon$ au point (x, y) correspond l'intervalle $J(x, y) = J_2\}$ est de mesure extérieure positive. Posons $G_2 = \operatorname{Pr}_X F_2$ et $H_2 = \operatorname{Cl} G_2$. On a $f(x, y) \geqslant a-1/2n_0$ pour tout point $(x, y) \in H_2\times J_2$ et $m^*(G_2) > 0$. Remarquons encore que $H_2 \subset H_1$ et H_2 est de mesure positive.

En général, le $n^{\text{ème}}$ pas donne un ensemble fermé $H_n \subset H_{n-1}$ de mesure positive et un intervalle ouvert $J_n \subset (y_0 - 1/n, y_0 + 1/n)$ ($J_n \neq \emptyset$) tels que $f(x, y) \geqslant a - 1/2n_0$ pour tout point $(x, y) \in H_n \times J_n$. Soit x_0 un point de l'ensemble $\bigcap_n H_n$. Puisque $x_0 \in I_0$, on a donc $f(x_0, y_0) < a - 1/n_0$. Mais d'autre part $y_0 \in \mathrm{Cl} \bigcup_n J_n$ et $f(x_0, y) \geqslant a - 1/2n_0$ pour tout $y \in \bigcup_n J_n$, en contradiction avec la semi-continuité de la fonction f_{x_0} au point y_0.

REMARQUE 8. *L'hypothèse du continu implique qu'il existe une fonction f: $[0, 1] \times [0, 1] \to R$ nonmesurable, n'ayant pas la propriété de Baire et telle que toutes les sections f_x et f^y sont essentiellement semi-continues supérieurement. Une telle fonction est définie dans la preuve du théorème dans mon article* [3].

REMARQUE 9. *Si toutes les sections f^y d'une fonction f: $[0, 1] \times [0, 1] \to R$ sont semi-continues supérieurement et toutes les sections f_x sont mesurables et non dégénérées en tout point (c'est-à-dire, quel que soit l'ensemble ouvert $V \neq \emptyset$, l'ensemble $(f_x)^{-1}(V)$ ne se compose que de points auxquels la densité supérieure de l'ensemble $(f_x)^{-1}(V)$ est positive), la fonction f est mesurable* ([4]).

PROBLÈME 3. *Soit f: $[0, 1] \times [0, 1] \to R$ une fonction semi-continue supérieurement par rapport à chacune de deux variables et telle qu'il existe pour tout point $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ deux ensembles mesurables $A \subset [0, 1]$* et *$B \subset [0, 1]$ de mesure positive dans tout entourage ouvert du point x et y respectivement et tels que la fonction réduite $f_x/B \cup \{y\}$ est continue au point y et la fonction réduite $f^y/A \cup \{x\}$ est continue au point x. La fonction f doit-elle être mesurable?*

DÉFINITION 2. On dit que les fonctions f_s: $R \to R$ ($s \in S$ et S désigne un ensemble d'indices) sont *ordinairement approximativement semi-équicontinues supérieurement au point* $x \in R$ lorsqu'il existe un ensemble mesurable $A(x)$ contenant le point x, de densité 1 au point x et tel qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que $f_s(t) - f_s(x) < \varepsilon$ lorsque $t \in A(x)$, $|t - x| < \delta$ et $\lim_{\substack{t \to x \\ t \in A(x)}} f_s(t) = f_s(x)$, quel que soit $s \in S$.

Dans l'article [6] je montre à l'aide de l'hypothèse du continu qu'il existe une fonction nonmesurable f: $R^2 \to R$ ayant toutes les sections f^y mesurables et toutes les sections f_x approximativement semi-équicontinues supérieurement. Les sections f_x de la fonction f de cet exemple de l'article [6] ne sont pas ordinairement approximativement semi-équicontinues supérieurement.

PROBLÈME 4. *Admettons l'axiom de Martin. Existe-t-il une fonction f: $R^2 \to R$ nonmesurable, ayant les sections f^y mesurables et ses sections f_x ordinairement approximativement semi-équicontinues supérieurement en tout point?*

Travaux cités

[1] R. O. Davies, *Separate approximate continuity implies measurability*, Proc. Camb. Philos. Soc. 73 (1973), 461–465.

[2] Z. Grande, *Quelques remarques sur un théorème de Kamke et les fonctions sup-mesurables*, Real Analys. Exchange 4 (1978–79), 167–177.

[3] Z. Grande, *Un exemple d'une fonction non mesurable*, Revue Roum. Math. Pures et Appl. 24 (1979), 101–102.

[4] — *On the measurability of functions of two variables*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 77 (1975), 335–336.

[5] — *Sur la propriété de Baire des fonctions de deux variables*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 25 (1977), 349–354.

[6] — *Semi-équicontinuité approximative et mesurabilité*, Colloq. Math. 45 (1981), 133–135.

[7] I. Halperin, *Discontinuous functions with the Darboux property*, Amer. Math. Monthly 57, (1950), 539–540.

[8] K. Kuratowski, *Topologie* I, Warszawa 1958.

[9] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN Warszawa 1973.

[10] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles F_σ linéaires*, Fund. Math. 14 (1929), 216–220.

[11] — *Funkcje przedstawialne analitycznie*, Lwów–Warszawa–Kraków 1925.

[12] — *Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement*, Fund. Math. 1 (1920), 112–115.

[13] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 1–54.

INSTYTUT MATEMATYKI,
WSP w BYDGOSZCZY

Received 3 March 1983;
in revised form 2 November 1983