Let $\{h_i: i \in \omega\}$ be such elements of $H$ that every $l \in L$ belonging to the same coset that $l_0$ is of the form $l_0 \circ h_i$. Clearly

$$\mu((T \cap l_0[C]) \setminus \bigcup_{i \in \omega} l_0 \circ h_i[Z_1]) = 0 .$$

However in view of property (c),

$$\mu((\bigcup_{i \in \omega} l_0 \circ h_i[Z_1]) \triangle l_0[Z_1]) = 0$$

which implies that the set $l_0[Z_1]$ contains a set of positive measure. This contradicts property (b).

## References


[1] A. B. Harazišvili, *On Sierpiński's problem concerning strict extendibility of an invariant measure*, Soviet Math. Dokl. 18 (1) (1977), pp. 71–74.
[2] — *Nekotorie voprosy teorii množestv i teorii miery*, Tbilisi 1978 (Russian).
[3] A. Hulanicki, *Invariant extensions of the Lebesgue measure*, Fund. Math. 51 (1962), pp. 111–115.
[4] J. Łoś, E. Marczewski, *Extensions of measure*, Fund. Math. 36 (1949), pp. 267–276.
[5] A. Pelc, *Semiregular invariant measures on abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 86 (1982), pp. 423–426.
[6] A. Pelc, *Invariant measures and ideals on discrete groups*, to appear.
[7] S. S. Pkhakadze, *K teorii lebegovskoi miery*, Trudy Tbilisskogo matematičeskogo instituta 25, Tbilisi 1958 (in Russian).
[8] E. Szpilrajn, *Sur l'extension de la mesure lebesguienne*, Fund. Math. 25 (1935), pp. 551–558.


INSTITUTE OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF WARSAW
PKiN Warszawa

*Received 29 March 1983*

---

# Über den Homotopietyp von Linsenraumprodukten

von

**Günther Huck** und **Wolfgang Metzler** (Frankfurt am Main)

**Abstract.** In this paper we derive a necessary criterion for products of lens spaces to have the same homotopy type. The criterion is a generalization of the Franz–Whitehead–criterion for a single factor.

**I. Einführung und Ergebnis.** Linsenräume wurden 1935 von W. Franz [2] und K. Reidemeister [7] kombinatorisch und 1941 von W. Franz [3] und J. H. C. Whitehead [9] bezüglich ihres Homotopietyps klassifiziert. Diese Arbeiten waren grundlegend für die Theorie des einfachen Homotopietyps, und Linsenräume waren die ersten Beispiele für die Stärke der damit zusammenhängenden Torsionsinvariante.

Für Mannigfaltigkeiten mit endlicher zyklischer Fundamentalgruppe sind Linsenräume besonders wichtige Beispiele. Dasselbe gilt für Produkte von Linsenräumen bezüglich endlicher abelscher Gruppen. Zwischen diesen Produkten können Diffeomorphismen existieren, die nicht von solchen der Faktoren herrühren: Einer der Sätze in [5] besagt z.B., daß der Diffeomorphietyp eines Produktes $\prod_{i=1}^{s} L_{m_i}(r_i)$ aus dreidimensionalen Linsenräumen $L_{m_i}(r_i)$ für $s \geqslant 2$ allein durch die Fundamentalgruppe bestimmt ist, falls mindestens zwei der Drehnenner $m_i$ teilerfremd sind und mindestens eine Verdrillungszahl die Bedingung $r_i \equiv \pm 1 \bmod m_i$ erfüllt.

Im Anhang von [5] wurden jedoch bereits ohne Beweis Beispiele dafür angegeben, daß auch für $s \geqslant 2$ die Fundamentalgruppe nicht immer den Homotopietyp bestimmt. Die dieser Bemerkung zugrundeliegende Idee wird in der vorliegenden Arbeit ausgeführt, d.h. das Homotopietypkriterium von Franz und Whitehead auf Produkte $(2n-1)$-dimensionaler Linsenräume $(n > 1)$ verallgemeinert. Wir beweisen die Verallgemeinerung als *notwendiges* Kriterium. Spezialfälle davon wurden bereits von R. Quetting [6] in Zusammenarbeit mit den Autoren erzielt. In einer weiteren Arbeit [4] wird gezeigt, daß für Produkte dreidimensionaler Linsenräume das Kriterium auch *hinreichend* ist.

Folgende Begriffe und Erläuterungen seien der Formulierung des Resultates vorausgeschickt:

Sei $m$ eine natürliche Zahl und $(r_1, \ldots, r_n)$ ein $n$-tupel zu $m$ teilerfremder ganzer

Zahlen und $n>1$. Auf $S^{2n-1} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in C^n\colon \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 1\}$ betrachte man die zu $Z_m$ isomorphe endliche Gruppe $G$ von Diffeomorphismen, die erzeugt wird von dem koordinatenweise als Drehoperation $z_i \to z_i \cdot e^{2\pi i r_i/m}$ definierten Diffeomorphismus $g\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}$. Der Quotientenraum $S^{2n-1}/G$ ist der *Linsenraum* $L^{2n-1}(m; r_1, \ldots, r_n)$ zum *Drehnenner* $m$ und mit den *Verdrillungszahlen* $r_1, \ldots, r_n$. Wegen $L^{2n-1}(m; r_1, \ldots, r_n) = L^{2n-1}(m; r_1^{-1}r_2, \ldots, r_1^{-1}r_n)$ (¹) ist es üblich, dreidimensionale Linsenräume $L^3(m; 1, r)$ auch mit $L_m(r)$ zu bezeichnen.

Die Projektion $p\colon S^{2n-1} \to L^{2n-1}(m; r_1, \ldots, r_n)$ ist wegen $n>1$ eine universelle Überlagerung, und es gilt $\pi_1(L) = G = Z_m$. Da $G$ durch orientierungserhaltende Diffeomorphismen operiert, erbt $L^{2n-1}(m; r_1, \ldots, r_n)$ von $S^{2n-1}$ die Struktur einer orientierbaren differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Diese Sachverhalte übertragen sich auf Produkte.

Eine Homotopieäquivalenz

$$\prod_{i=1}^{s} L^{2n-1}(m_i; r_1(i), \ldots, r_n(i)) \simeq \prod_{i=1}^{s} L^{2n-1}(m'_i; r'_1(i), \ldots, r'_n(i))$$

zwischen Linsenraumprodukten ergibt unmittelbar, daß die Fundamentalgruppen isomorph sind:

$$\bigoplus_{i=1}^{s} Z_{m_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} Z_{m'_i};$$

und für letzteres ist die Übereinstimmung der Elementarteilernormalformen notwendig und hinreichend. Die weiteren notwendigen Bedingungen unseres Satzes ergeben sich dann *für ungerades* $n$ als Kongruenzgleichung modulo dem ersten Elementarteiler

$$\mathrm{ggT}\colon = \mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s) = \mathrm{ggT}(m'_1, \ldots, m'_s).$$

Ist $n$ *gerade*, so verwendet der Satz hingegen ein System von Kongruenzgleichungen modulo der Faktoren der Primpotenzzerlegung von ggT. Zu diesem Zwecke betrachten wir für jeden Primteiler $p_j$ von ggT die Folge der Drehnenner $(m_1, \ldots, m_s)$ bzw. $(m'_1, \ldots, m'_s)$, welche eine Folge zugehöriger Primpotenzteiler zur Primzahl $p_j$: $(p_j^{x_{1j}}, \ldots, p_j^{x_{sj}})$ bzw. $(p_j^{x'_{1j}}, \ldots, p_j^{x'_{sj}})$ definiert; $p_j^{x_j}$ mit $x_j = \min_{1\leqslant i\leqslant s} x_{ij}$ sind dann die Primpotenzteiler von ggT. Dabei geht $(x'_{1j}, \ldots, x'_{sj})$ aus $(x_{1j}, \ldots, x_{sj})$ durch Umordnung hervor. Sei $\mathscr{P}$ die Menge der Primteiler von ggT. Man teile nun $\mathscr{P}$ auf in

$\overline{\mathscr{P}}\colon = \{p_j \in \mathscr{P}$: mindestens zwei Exponenten $x_{ij}$ und $x_{lj}$ $(i \neq l)$ sind gleich oder $(-1)$ ist $n$-te Potenz $\bmod p_j\}$;

$\mathscr{P}_{\mathrm{gerade}}\colon = \{p_j \in \mathscr{P} - \overline{\mathscr{P}}$: $(x'_{1j}, \ldots, x'_{sj})$ geht aus $(x_{1j}, \ldots, x_{sj})$ durch gerade Permutation hervor$\}$;

$\mathscr{P}_{\mathrm{ungerade}}\colon = \{p_j \in \mathscr{P} - \overline{\mathscr{P}}$: $(x'_{1j}, \ldots, x'_{sj})$ geht aus $(x_{1j}, \ldots, x_{sj})$ durch ungerade Permutation hervor$\}$.

(¹) $r_1^{-1}$ sei eine ganze Zahl mit $r_1^{-1}r_1 \equiv 1 \bmod m$.



Mit diesen Bezeichnungen lautet das Ergebnis dieser Arbeit:

SATZ. *Für die Existenz einer Homotopieäquivalenz zwischen zwei Linsenraumprodukten* $\prod_{i=1}^{s} L^{2n-1}(m_i; r_1(i), \ldots, r_n(i))$ *und* $\prod_{i=1}^{s} L^{2n-1}(m'_i; r'_1(i), \ldots, r'_n(i))$ *sind folgende Bedingungen notwendig*:

1. *Die Isomorphie der Fundamentalgruppen*

$$\bigoplus_{i=1}^{s} Z_{m_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{s} Z_{m'_i};$$

2. (a) *falls $n$ ungerade ist, die Gültigkeit einer Kongruenzgleichung*

$$\prod_{i=1}^{s} r_1(i) \cdot \ldots \cdot r_n(i) \equiv \pm k^n \cdot \prod_{i=1}^{s} r'_1(i) \cdot \ldots \cdot r'_n(i) \bmod \mathrm{ggT}$$

*für ein geeignetes* $k$;

(b) *falls $n$ gerade ist, für jeden Primpotenzteiler $p_j^{x_j}$ von* ggT *eine Kongruenzgleichung*

$$\prod_{i=1}^{s} r_1(i) \cdot \ldots \cdot r_n(i) \equiv \pm k^n \cdot \prod_{i=1}^{s} r'_1(i) \cdot \ldots \cdot r'_n(i) \bmod p_j^{x_j},$$

*wobei die Vorzeichen $\pm$ für die verschiedenen $p_j$ wie folgt gekoppelt sind: für alle $p_j \in \mathscr{P}_{\mathrm{gerade}}$ steht das gleiche Vorzeichen $\varepsilon = \pm 1$; für alle $p_j \in \mathscr{P}_{\mathrm{ungerade}}$ steht das dazu umgekehrte Vorzeichen $-\varepsilon$; für $p_j \in \overline{\mathscr{P}}$ ist das Vorzeichen beliebig* (²).

Damit lassen sich zum Beispiel die im Anhang von [5] angegebenen Fälle behandeln:

$$L_5(1) \times L_5(1) \not\simeq L_5(1) \times L_5(2) \not\simeq L_5(2) \times L_5(2).$$

Aufgrund der in [4] vom ersten Autor bewiesenen Tatsache, daß das Kriterium unseres Satzes für $n = 2$ auch hinreichend ist, folgt $L_5(1) \times L_5(1) \simeq L_5(2) \times L_5(2)$.

Aus dem obigen Satz und [4] ergibt sich auch, daß sich die Kongruenzbedingungen $\bmod p_j^{x_j}$ nicht immer zu einer einzigen Gleichung mod ggT — wie für ungerade $n$ — zusammenfassen lassen (³): Die Linsenraumprodukte $L_{21}(1) \times L_{21}(1)$ und $L_{21}(1) \times L_{21}(8)$ sind wegen $8 \equiv 1 \bmod 7 \in \overline{\mathscr{P}}$ und $8 \equiv -1 \bmod 3 \in \overline{\mathscr{P}}$ zwar homotop äquivalent, $\pm 8$ ist aber kein quadratischer Rest mod 21. Dieses Beispiel läßt sich leicht verallgemeinern.

Mit den Mitteln dieser Arbeit lassen sich auch Homotopieinvarianten für Produkte aus Linsenräumen verschiedener Dimensionen gewinnen.

Ferner sei auf die weitere Diskussion des Ergebnisses in [4] hingewiesen.

(²) Die Verwendung desselben $k$ für alle $p_j$ bei 2(b) bedeutet nach dem Hauptsatz über simultane Kongruenzen keine Zusatzforderung gegenüber der Lösbarkeit der Gleichungen mit je einer $n$-ten Potenz.

(³) In [8], Theorem 3, wurde für Produkte aus dreidimensionalen Linsenräumen mit gleichem Drehnenner eine solche "Klassifikation" angegeben. Der dortige Beweis enthält jedoch einen Fehler.

**II. Beweis.** $L, L'$ seien zwei Linsenräume gleicher Dimension $2n-1$, $g, g'$ zugehörige, erzeugende Operationen auf $S^{2n-1}$, $G$ bzw. $G'$ die von $g$ bzw. $g'$ erzeugten Homöomorphismengruppen und

$$p\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}/G = L,$$
$$p'\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}/G' = L'$$

die kanonischen Projektionen.

Eine Abbildung (4) $F\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ heißt $(g, g'^{\alpha})$ äquivariant, $\alpha \in \mathbf{Z}$, wenn $Fg = g'^{\alpha}F$ gilt, was zur Folge hat, daß $F$ eine wohldefinierte Abbildung $f\colon p'Fp^{-1}$ von $L$ nach $L'$ induziert.

Da die Projektionen $p$ und $p'$ zu universellen Überlagerungen gehören, läßt sich umgekehrt jede Abbildung $f\colon L \to L'$ zu einer äquivarianten Abbildung $\tilde{f}$ der überlagernden Sphären hochheben und zwar eindeutig bis auf nachgeschaltete Decktransformationen. Dasselbe gilt für Homotopien $f_t$, wobei $g'^{\alpha}$ aus Stetigkeitsgründen während der Homotopie konstant bleibt. Die Restklasse $\bar{\alpha} \in \mathbf{Z}_m$ ist also $f$ bzw. $f_t$ durch $g, g'$ unabhängig von der Wahl der Hochhebung zugeordnet und heiße *Äquivarianzgrad* (von $F, f$ resp. $f_t$) bezüglich $g, g'$. Im folgenden werden wir, um Kongruenzen nach anderen Moduln, z.B. Teilern von $m'$, bequem beschreiben zu können, jeweils einen festen Restklassenvertreter $\alpha$ wählen bzw. berechnen und diesen gleichfalls als Äquivarianzgrad bezeichnen. Die Gültigkeit der betreffenden Kongruenzbedingungen hängt von dieser Repräsentantenauswahl jedoch nicht ab.

Der Abbildungsgrad $d$ einer $(g, g'^{\alpha})$-äquivarianten Abbildung $F\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ ist ebenfalls unabhängig von nachgeschalteten Decktransformationen, da diese orientierungserhaltende Homöomorphismen sind; d.h. $d$ ist ebenfalls eine Invariante von $f = p'Fp^{-1}\colon L \to L'$. Abbildungsgrad $d$, hier immer bezogen auf die hochgehobene Abbildung $\tilde{f} = F$, und Äquivarianzgrad $\alpha$ einer Linsenraumabbildung

$$f\colon L = L(m;\, r_1, \ldots, r_n) \to L' = L(m';\, r'_1, \ldots, r'_n)$$

stehen in folgender Beziehung zueinander:

LEMMA 1. *Es existiert genau dann eine Abbildung $f$ vom Grad $d$ und Äquivarianzgrad $\alpha$, wenn $m'$ Teiler von $\alpha \cdot m$ und*

$$d \equiv \left(\frac{\alpha m}{m'}\right)^n \cdot r_1^{-1} \cdot \ldots \cdot r_n^{-1} \cdot r'_1 \cdot \ldots \cdot r'_n \bmod n \text{ ist.} \tag{1}$$ (5)

(4) Unter Abbildungen zwischen topologischen Räumen verstehen wir immer stetige Abbildungen.

(5) Formel (1) ist natürlich abhängig von der Auswahl der Erzeugenden $g, g'$. Eine andere Wahl bedingt z.B., daß die Verdrillungszahlen des zugehörigen Linsenraumes mit einem gemeinsamen Faktor durchmultipliziert werden; sie hat keinen Einfluß auf die Erfüllbarkeit der aus (1) abgeleiteten Kongruenzbedingungen des Satzes.



Der Beweis ist in Cohen [1], S. 92–95, Satz 29.3, 29.4, für den Spezialfall $m = m'$ durchgeführt und unmittelbar auf den allgemeinen Fall verschiedener Drehnenner übertragbar.

Bemerkung. Eine Abbildung $f\colon L \to L'$ definiert auch als Abbildung orientierter Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension einen Abbildungsgrad $\bar{d}$, der für $m \neq m'$ nicht mit dem Grad von $\tilde{f}\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ zusammenfällt. Es folgt vielmehr aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & S^{2n-1} \arrow[d, "p'"] \\ L \arrow[r, "f"] & L' \end{tikzcd}$$

da die vertikalen Projektionen $m$- bzw. $m'$-blättrige Überlagerungen darstellen, $m \cdot \bar{d} = d \cdot m'$ und somit $\bar{d} = \dfrac{m' \cdot d}{m}$. Wir verwenden im folgenden stets den Grad $d$ der hochgehobenen Abbildungen $\tilde{f}$.

Gegeben sei nun ein kommutatives Diagramm von Abbildungen:

$$\begin{tikzcd} \prod_{i=1}^{s} S_i^{2n-1} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p_1 \times \ldots \times p_s"'] & \prod_{j=1}^{s'} S_j^{2n-1} \arrow[d, "p'_1 \times \ldots \times p'_s"] \\ \prod_{i=1}^{s} L(m_i;\, r_1(i), \ldots, r_n(i)) \arrow[r, "f"] & \prod_{j=1}^{s'} L(m'_j;\, r'_1(j), \ldots, r'_n(j)) \end{tikzcd}$$

$p_i$ und $p'_j$ seien die kanonischen Linsenraumprojektionen. (Die senkrechten Abbildungen $p_1 \times \ldots \times p_s$ und $p'_1 \times \ldots \times p'_s$, sind universelle Überlagerungen).

Wir bezeichnen die in den Produkten auftretenden Linsenräume kurz als $L_i$ und $L'_j$ und legen Basispunkte fest:

$$P = (P_1, \ldots, P_s) \in \prod_{i=1}^{s} L_i, \qquad P' = f(P) = (P'_1, \ldots, P'_s) \in \prod_{j=1}^{s'} L'_j.$$

Damit erhalten wir kanonische Isomorphismen:

$$\pi_1\Big(\prod_{i=1}^{s} L_i, P\Big) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \pi_1(L_i, P_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbf{Z}_{m_i}$$

und

$$\pi_1\Big(\prod_{j=1}^{s'} L'_j, P'\Big) \cong \bigoplus_{j=1}^{s'} \pi_1(L'_j, P'_j) \cong \bigoplus_{j=1}^{s'} \mathbf{Z}_{m'_j}.$$

Die erzeugenden Linsenraumoperationen $g_i$ bzw. $g'_j$ bestimmen in der üblichen Weise ausgezeichnete Erzeugende der Fundamentalgruppen $\pi_1(L_i, P_i)$ bzw. $\pi_1(L'_j, P'_j)$.

Der von $f$ induzierte Fundamentalgruppenhomomorphismus sei hinsichtlich dieser Erzeugenden durch

$$f_{\#}(g_i) = g_1'^{\alpha_{i1}} \dots g_{s'}'^{\alpha_{is'}}$$

gegeben, werde also „additiv" durch die Matrix $\alpha_{ij}$ beschrieben. Mit der kanonischen Inklusion

$$i_k\colon L_k = \{P_1\} \times \dots \times \{P_{k-1}\} \times L_k \times \{P_{k+1}\} \times \dots \times \{P_s\} \to \prod_{i=1}^{s} L_i$$

und der kanonischen Projektion

$$q_l\colon \prod_{j=1}^{s'} L_j' \to L_l'$$

ist $\alpha_{kl}$ Äquivarianzgrad der *„partiellen Abbildung"*

$$f_{kl}\colon = q_l f i_k\colon L_k \to L_l' .$$

Wir nennen $(\alpha_{ij})$ die Matrix der *partiellen Äquivarianzgrade* oder einfach die *Fundamentalgruppenmatrix* von $f$. Analog definiere man die darüberliegenden partiellen Abbildungen der Sphären-Faktoren.

$$\tilde{f}_{kl}\colon = \tilde{q}_l \tilde{f} \tilde{i}_k\colon S^{2n-1} \to S^{2n-1},$$

wobei die Inklusionen bezüglich der Basispunkte $\tilde{P}_k \in p_k^{-1}(P_k)$ gebildet werden. Die Abbildungsgrade $d_{kl}$ der „partiellen Sphärenabbildungen" $\tilde{f}_{kl}$ setzen sich zu einer Matrix von partiellen Abbildungsgraden $(d_{ij})$ zusammen, welche den induzierten Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \tilde{f}_*\colon H_{2n-1}\left(\prod_{i=1}^{s} S_i^{2n-1}\right) & \to & H_{2n-1}\left(\prod_{j=1}^{s'} S_j^{2n-1}\right) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbf{Z}^s & \longrightarrow & \mathbf{Z}^{s'} \end{array}$$

der (ganzzahligen) Homologiegruppen in der Dimension $2n-1$ beschreibt. Dabei ist die Matrix $(d_{ij})$ unabhängig von der Wahl der Basispunkte und der Hochhebung.

Reduziert man die Kongruenzgleichungen, die Lemma 1 für die partiellen Abbildungen $f_{ij}$ angibt, modulo $\mathrm{ggT} = \mathrm{ggT}(m_1, \dots, m_s)$, so erhält man eine Kongruenzgleichung für Matrizen

$$(d_{ij}) \equiv \left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n} \cdot r_1^{-1}(i) \cdot \dots \cdot r_n^{-1}(i) \cdot r_1'(j) \cdot \dots \cdot r_n'(j)\right) \mod \mathrm{ggT}$$

woraus für den Fall $s = s'$ die Kongruenz der zugehörigen Determinanten folgt:

(2) $$|(d_{ij})| \equiv \left|\left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n}\right)\right| \cdot \prod_{i=1}^{s} r_1^{-1}(i) \cdot \dots \cdot r_n^{-1}(i) \cdot r_1'(i) \cdot \dots \cdot r_n'(i) \mod \mathrm{ggT}$$

Diese Beziehung verallgemeinert (1) für den Fall mehrerer Faktoren.



Wir kommen nun zu dem Fall, daß $f$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dann gilt $s = s'$, und die Matrix $(\alpha_{ij})$ gibt einen Isomorphismus

$$f_{\#}\colon \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbf{Z}_{m_i} \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j=1}^{s} \mathbf{Z}_{m'_j}$$

an, $|(\alpha_{ij})|$ ist also eine Einheit modulo $\mathrm{ggT} = \mathrm{ggT}(m_1, \dots, m_s) = \mathrm{ggT}(m_1', \dots, m_s')$.

Ebenso repräsentiert $(d_{ij})$ einen Automorphismus von $(\mathbf{Z})^s$ und hat folglich die Determinante $|(d_{ij})| = \pm 1$.

Da in der Kongruenzgleichung (2) nun alle übrigen Faktoren Einheiten modulo ggT sind, stellt sich auch $|(\alpha_{ij}^n m_i^n / m_j'^n)|$, das sich wegen $m_1 \cdot \dots \cdot m_s = m_1' \cdot \dots \cdot m_s'$ zu $|(\alpha_{ij}^n)|$ vereinfacht, als Einheit modulo ggT heraus, und Gleichung (2) lautet für Homotopieäquivalenzen

$$\pm 1 \equiv |(\alpha_{ij}^n)| \prod_{i=1}^{s} r_1^{-1}(i) \cdot \dots \cdot r_n^{-1}(i) \cdot r_1'(i) \cdot \dots \cdot r_n'(i) \mod \mathrm{ggT},$$

bzw.

(3) $$\prod_{i=1}^{s} r_1(i) \cdot \dots \cdot r_n(i) \equiv \pm |(\alpha_{ij}^n)| \cdot \prod_{i=1}^{s} r_1'(i) \dots r_n'(i) \mod \mathrm{ggT}.$$

Ein Vergleich mit den Kongruenzgleichungen 2(a) und 2(b) unseres Satzes zeigt, daß der Rest des Beweises darin besteht, $|(\alpha_{ij}^n)|$ zu untersuchen.

Allgemein zahlentheoretisch lassen sich 2(a) und 2(b) aus (3) jedoch nicht folgern, z.B. ist die Determinante einer modulo ggT regulären Matrix mit $n$-ten Potenzen als Eintragungen i.a. keine $n$-te Potenz modulo ggT, auch nicht für ungerades $n$. Man muß vielmehr die spezielle Voraussetzung, daß $(\alpha_{ij})$ den Fundamentalgruppenhomomorphismus einer Abbildung zwischen Linsenraumprodukten beschreibt (und dabei wiederum Lemma 1), ausnutzen. Dies geschieht mittels Lemma 2 und einer zahlentheoretischen Folgerung (Lemma 3).

Lemma 2. *Sei* $f\colon \prod_{i=1}^{s} L(m_i; r_1(i), \dots, r_n(i)) \to L(m'; r_1', \dots, r_n')$ *eine Abbildung mit der Fundamentalgruppenmatrix*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix}$$

*d.h.* $f_{\#}$ *sei gegeben durch* $f(g_1^{x_1}, \dots, g_s^{x_s}) = g'^{(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_s x_s)}$ *dann gilt für beliebige ganze Zahlen* $n_1, \dots, n_s$

$$\left(\sum_{i=1}^{s} n_i \frac{\alpha_i m_i}{m'}\right)^n \equiv \sum_{i=1}^{s} \left(n_i \frac{\alpha_i m_i}{m'}\right)^n \mod \mathrm{ggT}(m_1, \dots, m_s, m').$$

Beweis. Sei ggT: $=$ ggT$(m_1, \ldots, m_s)$ uns seien

$$h_i\colon L(\mathrm{ggT};\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{n\text{-mal}}) \to L(m_i;\ r_1(i), \ldots, r_n(i))$$

Abbildungen vom Äquivarianzgrad $n_i \dfrac{m_i}{\mathrm{ggT}}$. Nach Lemma 1 kann man, da $n_i \dfrac{m_i}{\mathrm{ggT}} \cdot \mathrm{ggT}$ durch $m_i$ teilbar ist, solche Abbildungen stets finden. Man betrachte nun die aus den $h_i$ zusammengesetzte Abbildung

$$h = (h_1, \ldots, h_s)\colon L(\mathrm{ggT};\ 1, \ldots, 1) \to \prod_{i=1}^{s} L(m_i;\ r_1(i), \ldots, r_n(i))$$

und schalte sie vor die Abbildung $f$. „Der" Äquivarianzgrad der Komposition $fh\colon L(\mathrm{ggT};\ 1, \ldots, 1) \to L(m';\ r_1', \ldots, r_n')$ wird durch das Produkt der Matrizen

$$\left(n_1 \frac{m_1}{\mathrm{ggT}}, \ldots, n_s \frac{m_s}{\mathrm{ggT}}\right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{s} n_i \frac{m_i}{\mathrm{ggT}} \cdot \alpha_i$$

beschrieben.

Bei Hintereinanderausführung der Abbildungen $\tilde{h}$ und $\tilde{f}$ multiplizieren sich aber auch die Matrizen der partiellen Abbildungsgrade und ergeben:

$$(\mathrm{grad}\,\tilde{h}_1, \ldots, \mathrm{grad}\,\tilde{h}_s) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{grad}\,\tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \mathrm{grad}\,\tilde{f}_s \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\,\tilde{f}\tilde{h}$$

wobei $\tilde{f}_j$ die partielle Abbildung $\tilde{f}\,\tilde{\imath}_j$ bezeichne.

Wendet man nun Formel (1) auf die Abbildungen $f, h$ sowie auf $fh$ an, so ergibt sich die Kongruenzgleichung mod ggT:

$$\sum_{i=1}^{s} \left(n_i \frac{m_i}{\mathrm{ggT}} \cdot \frac{\mathrm{ggT}}{m_i}\right)^n r_1(i) \cdot \ldots \cdot r_n(i) \cdot \left(\frac{\alpha_i m_i}{m'}\right)^n \cdot r_1^{-1}(i) \cdot \ldots \cdot r_n^{-1}(i) \cdot r_1' \ldots r_n'$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{s} \left(n_i \frac{\alpha_i m_i}{m'}\right)^n \cdot r_1' \ldots \cdot r_n' \equiv \left(\sum_{i=1}^{s} n_i \frac{m_i}{\mathrm{ggT}} \alpha_i \frac{\mathrm{ggT}}{m'}\right)^n \cdot r_1' \ldots r_n' .$$

Da $r_k'$ Einheiten modulo $m'$ sind, erhält man reduziert modulo ggT$(m_1, \ldots, m_s, m')$ die gewünschte Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{s} \left(n_i \frac{\alpha_i m_i}{m'}\right)^n \equiv \left(\sum_{i=1}^{s} n_i \frac{\alpha_i m_i}{m'}\right)^n \bmod \mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s, m') .$$

Lemma 3. *Seien* $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *sowie* $m$ *ganze Zahlen, welche die Kongruenzgleichung*

$$\Big(\sum_{i=1}^{s} n_i \alpha_i\Big)^n \equiv \sum_{i=1}^{s} (n_i \alpha_i)^n \bmod m, \quad (n > 1),$$



*für beliebige* $s$*-Tupel* $(n_i)$ *ganzer Zahlen erfüllen, so folgt:*

(a) *falls* $p^t$ *Primpotenzteiler von* $m$ *ist, für den* $(p-1)$ *nicht Teiler von* $(n-1)$ *ist,*

$$\alpha_i^n \equiv 0 \bmod p^t \quad \textit{für alle } i \textit{ außer höchstens einem},$$

(b) *falls* $p^t$ *Primpotenzteiler von* $m$ *ist, für den* $(p-1)$ *Teiler von* $(n-1)$ *ist,*

$$\alpha_i^n \equiv 0 \bmod p^{t-1} \quad \textit{für alle } i \textit{ außer höchstens einem}.$$

Beweis. Es genügt den Beweis für ein Indexpaar $i_1, i_2$ zu führen; das entspricht der Wahl der Koeffizienten $n_i = 0$ für $i \neq i_1, i_2$. Gilt nämlich die Aussage für beliebige Paare $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}$, so gilt sie auch für das ganze $s$-Tupel $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$.

O.B.d.A. sei $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, es gelte also:

$$(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)^n \equiv (n_1\alpha_1)^n + (n_2\alpha_2)^n \bmod m$$

für beliebige ganze Zahlen $n_i$.

Zu (a): ($p^t$ sei ein Primpotenzteiler von $m$ und $(p-1) \mid (n-1)$). Sei

$$\alpha_1 = p^{x_1} \cdot \bar{\alpha}_1, \quad \bar{\alpha}_1 \in \mathbf{Z} \quad \text{und} \quad (\bar{\alpha}_1, p) = 1,$$
$$\alpha_2 = p^{x_2} \cdot \bar{\alpha}_2, \quad \bar{\alpha}_2 \in \mathbf{Z} \quad \text{und} \quad (\bar{\alpha}_2, p) = 1.$$

O.B.d.A. sei $x_1 \geqslant x_2$; die Behauptung des Lemmas ist dann äquivalent zu $nx_1 \geqslant t$. Wir nehmen an, dies wäre nicht der Fall, es gelte also $nx_1 < t$.

Man setze: $n_2 = \bar{n}_2 \cdot p^{x_1 - x_2}$, ($\bar{n}_2 \in \mathbf{Z}$ beliebig).

$$(n_1\bar{\alpha}_1 + \bar{n}_2\bar{\alpha}_2)^n p^{nx_1} \equiv \big((n_1\bar{\alpha}_1)^n + (\bar{n}_2\bar{\alpha}_2)^n\big) p^{nx_1} \bmod p^t$$

bzw., da nach Annahme $nx_1 < t$ ist,

$$(n_1\bar{\alpha}_1 + \bar{n}_2\bar{\alpha}_2)^n \equiv (n_1\bar{\alpha}_1)^n + (\bar{n}_2\bar{\alpha}_2)^n \bmod p^{t-nx_1}$$

für beliebige ganze Zahlen $n_1, n_2$.

Da $\bar{\alpha}_1$ und $\bar{\alpha}_2$ teilerfremd zu $p$ sind, durchlaufen $n_1\bar{\alpha}_1$ bzw. $\bar{n}_2\bar{\alpha}_2$ für $n_1 \in \mathbf{Z}$, $n_2 \in \mathbf{Z}$ alle Restklassen mod $p^{t-nx_1}$.

Das Kongruenzgleichungssystem ist demzufolge äquivalent zu

$$(a_1 + a_2)^n \equiv a_1^n + a_2^n \bmod p^{t-nx_1} \quad \text{für beliebige ganze Zahlenpaare } a_1, a_2$$

und dieses wiederum äquivalent zu

$$a^n \equiv a \bmod p^{t-nx_1} \quad \text{für alle } a \in \mathbf{Z}$$

(denn für $i = 1, 2, \ldots$ ergibt sich per Induktion

$$(i+1)^n \equiv i^n + 1^n \equiv i + 1 \bmod p^{t-nx_1}$$

und wegen

$$1^n + (-1)^n \equiv 0^n; \quad (-1)^n \equiv -1, \quad \text{also auch } (-i)^n \equiv -i \bmod p^{t-nx_1}).$$

Setzt man nun für $a$ eine Primitivwurzel modulo $p$, d.h. eine ganze Zahl von der multiplikativen Ordnung $(p-1)$ modulo $p$ ein, so kann, unter der Voraussetzung

$(p-1)\nmid(n-1)$ die Kongruenzgleichung $a^n \equiv a \bmod p^{t-nx_1}$ (für $t-nx_1>0$) nicht gültig sein.

Damit haben wir einen Widerspruch zur Annahme $t-nx_1>0$ erhalten; es folgt $nx_1 \geqslant t$ und somit $\alpha_1^n = (\bar{\alpha}_1 p^{x_1})^n \equiv 0 \bmod p^t$.

Zu (b): ($p^t$ sei Primpotenzteiler von $m$ und $(p-1)|(n-1)$). Bis zur Gleichung „$a^n \equiv a \bmod p^{t-nx_1}$ für beliebige $a \in Z$" kann der Beweis wörtlich übernommen werden, mit einer einzigen Abänderung, daß wir $nx_1 < t-1$ annehmen.

Man setze nun

$$a = p \Rightarrow p^n - p = p(p^{n-1}-1) \equiv 0 \bmod p^{t-nx_1},$$

$$p^{n-1}-1 \equiv 0 \bmod p^{t-nx_1-1}$$

(wobei $t-nx_1-1 \geqslant 1$ und $n>1$ ist nach Annahme). Dies ergibt einen Widerspruch, also gilt:

$$nx_1 \geqslant t-1 \quad \text{und} \quad \alpha_1^n = (\bar{\alpha}_1 \cdot p^{x_1})^n = \bar{\alpha}_1^n \cdot p^{nx_1} \equiv 0 \bmod p^{t-1}.$$

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis des Satzes:

(a) Sei $n$ ungerade. Zunächst zeigen wir allgemein: Ist $(\alpha_{ij})$ Fundamentalgruppenmatrix einer stetigen Abbildung:

$$\prod_{i=1}^{s} L^{2n-1}(m_i; \ldots) \to \prod_{j=1}^{s} L^{2n-1}(m_j'; \ldots),$$

dann gilt für ungerades $n$:

$$\left|\left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n}\right)\right| \equiv \left|\left(\frac{\alpha_{ij} m_i}{m_j'}\right)\right|^n \bmod \mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s, m_1', \ldots, m_s'). \tag{4}$$

(Induktion über $s$:) Für $s=1$ ist die Behauptung trivial; für $s>1$ entwickle man die Determinante $\left|\left(\frac{\alpha_{ij} m_i}{m_j'}\right)\right|$ nach der 1. Spalte, welche zur partiellen Abbildung $\prod_{i=1}^{s} L(m_i; \ldots) \to L(m_1'; \ldots)$ gehört. Wendet man Lemma 2 auf diese Abbildung an und setzt für $n_i$ die $(s-1)\times(s-1)$ Unterdeterminanten $\Delta_i \cdot (-1)^{i+1}$ aus der Laplaceschen Entwicklungsformel ein, so erhält man:

$$\left(\sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+1} \Delta_i \cdot \frac{\alpha_{i1} m_i}{m_1'}\right)^n \tag{5}$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{s} (-1)^{(i+1)n} \Delta_i^n \left(\frac{\alpha_{i1} m_i}{m_1'}\right)^n \bmod \mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s, m_1').$$

Auf der rechten Seite kann man $(-1)^{(i+1)n}$ durch $(-1)^{i+1}$ ersetzen, da $n$ ungerade ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt aber die „Behauptung" für die $(s-1)\times(s-1)$ Unterdeterminanten $\Delta_i$, da sie zu partiellen Abbildungen

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{s} L(m_k; \ldots) \to \prod_{k=2}^{s} L(m_k'; \ldots) \quad (i = 1, \ldots, s)$$

gehören. Modulo $\mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s, m_1', \ldots, m_s')$ kann man demnach in Gleichung (5) die Potenzen $\Delta_i^n$ durch die Determinanten der „elementweise potenzierten" Untermatrizen ersetzen und erhält so Gleichung (4).

Angewendet auf eine Homotopieäquivalenz $f$ folgt nun, daß man in Gleichung (3) (falls $n$ ungerade ist)

$$|(\alpha_{ij}^n)| = \left|\left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n}\right)\right|$$

durch $|(\alpha_{ij})|^n$ ersetzen darf und somit Aussage (2a) des Satzes.

(b) Sei $n$ gerade und $f$ eine Homotopieäquivalenz.

(α) $p^t$ sei Primpotenzteiler von $\mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s) = \mathrm{ggT}(m_1', \ldots, m_s')$ zur Primzahl $p>2$ ($\Rightarrow (p-1)\nmid(n-1)$, da $(p-1)$ gerade und $(n-1)$ ungerade ist).

Wir betrachten die partiellen Abbildungen von $f$:

$$\prod_{i=1}^{s} L(m_i; \ldots) \to L(m_j'; \ldots) \quad (j = 1, \ldots, s),$$

die zu den Spalten der Fundamentalgruppenmatrix gehören. Nach Lemma 2 und 3 folgt, daß in jeder Spalte der Matrix $\left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n}\right)$ höchstens eine Eintragung nicht kongruent 0 modulo $p^t$ ist. Andererseits gilt nach Voraussetzung

$$|(\alpha_{ij}^n)| = \left|\left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n}\right)\right| \not\equiv 0 \bmod \mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s)$$

$$\Rightarrow \left|\left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n}\right)\right| \not\equiv 0 \bmod p^t.$$

Folglich bilden die modulo $p^t$ nichttrivialen Elemente der Matrix $(\alpha_{ij}^n m_i^n / m_j'^n)$ genau eine Nebendiagonale, und $\pm |(\alpha_{ij}^n m_i^n / m_j'^n)|$ ist modulo $p^t$ kongruent zu dem Produkt dieser Nebendiagonalelemente, d.h.

$$|(\alpha_{ij}^n)| = \left|\left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n}\right)\right| \equiv \pm (n\text{-te Potenz}) \text{ modulo } p^t,$$

wobei für das Vorzeichen + oder − steht, je nachdem, ob die Nebendiagonale zu einer geraden oder ungeraden Permutation gehört.

(β) Sei $2^t$ ($t \geqslant 1$) Primpotenzteiler von $\mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s)$. Im Fall $t=1$ folgt aus der Regularität von $(\alpha_{ij})$ modulo $\mathrm{ggT}(m_1, \ldots, m_s)$: $|(\alpha_{ij}^n)| \equiv 1$ modulo 2.

Im Fall $t>1$ folgt aus Lemma 2 und 3(b) wie oben: In der Matrix $(\alpha_{ij}^n m_i^n / m_j'^n)$ bilden die modulo $2^{t-1}$ nichttrivialen Elemente eine Nebendiagonale. Ist $s \geqslant 2$, so enthält jede andere Nebendiagonale mindestens 2 Elemente, die kongruent 0 modulo $2^{t-1}$ sind, deren Produkt also kongruent 0 mod $2^{2(t-1)}$ und damit auch kongruent 0 modulo $z^t$ ist. $\left|\left(\frac{\alpha_{ij}^n m_i^n}{m_j'^n}\right)\right| \equiv \pm$ $n$-te Potenz mod $2^t$, je nachdem ob die modulo $2^{t-1}$ nichttriviale Nebendiagonale zu einer geraden oder ungeraden Permutation gehört.

(Für $s = 1$ ist die Determinante trivialerweise eine $n$-te Potenz.)

Falls für einen Primteiler $p$ von ggT keine zwei Primpotenzanteile in der Folge der Drehnenner dieselben sind, bestimmt die Lage der nichttrivialen Nebendiagonale die Permutation dieser Primpotenzanteile.

Im Zusammenhang mit Formel (3) folgt somit aus (α) und (β) die Aussage (2b) des Satzes.

### Literaturverzeichnis


[1] M. M. Cohen, *A Course in Simple-Homotopy Theory*, New York, Heidelberg, Berlin 1973.

[2] W. Franz, *Über die Torsion einer Überdeckung*, J. Reine Angew. Math. 173 (1935), S. 245–254.

[3] — *Abbildungsklassen und Fixpunktklassen dreidimensionaler Linsenräume*, ibid. 185 (1941), S. 65–77.

[4] G. Huck, *Homotopieäquivalenzen zwischen Produkten aus dreidimensionalen Linsenräumen* (in Vorbereitung).

[5] W. Metzler, *Diffeomorphismen zwischen Produkten mit dreidimensionalen Linsenräumen als Faktoren*, Dissert. Math. 65, Warszawa 1969.

[6] R. Quetting, *Homotopieinvarianten für Produkte mit zwei Linsenräumen als Faktoren*, Diplomarbeit, Frankfurt am Main 1978.

[7] K. Reidemeister, *Homotopieringe und Linsenräume*, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 11 (1935), S. 102–109.

[8] A. J. Sieradski, *Non-cancellation and a related phenomenon for the lens spaces*, Topology 17 (1978), S. 85–93.

[9] J. H. C. Whitehead, *On incidence matrices, nuclei and homotopy types*, Ann. Math. 42 (1941), S. 1197–1239.


*Received 29 April 1983*

# Embedding inverse limits of interval maps as attractors

by

**Michał Misiurewicz** (Warszawa)

**Abstract.** We prove that the inverse limit of the map $4x(1-x)$ of the interval $[0, 1]$ onto itself can be embedded as an attractor into a $C^\infty$ diffeomorphism of any manifold of dimension at least 3 and into a homeomorphims of any manifold of dimension 2.

**1. Inverse limits of dynamical systems.** We start by recalling some topological facts.

Let $I$ be a compact space and $T: I \to I$ a continuous map. We may regard our system $(I, T)$ as an inverse system $\ldots \xrightarrow{T} I \xrightarrow{T} I \xrightarrow{T} I$ and consider its inverse limit. It is a subset $K$ of the product of an infinite number of copies of $I$: $\prod_0^\infty I$, defined as

$$K = \{(t_n)_{n=0}^\infty : T(t_n) = t_{n-1} \text{ for } n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Denote by $\Psi_n$ the projection of $K$ to the $n$th coordinate: $\Psi_n((t_i)_{i=0}^\infty) = t_n$. There exists a unique map $\tau: K \to K$ such that $\Psi_n \circ \tau = T \circ \Psi_n$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$ It is given by $\tau((t_n)_{n=0}^\infty) = (T(t_n))_{n=0}^\infty$. Notice that since $T(t_n) = t_{n-1}$, the $n$th coordinate of $\tau((t_n)_{n=0}^\infty)$ is equal to $t_{n-1}$ (for $n \geq 1$). We consider $K$ as a topological space with topology induced by the product topology in $\prod_0^\infty I$. The map $\tau$ is then a homeomorphism. We call $\tau$ the *inverse limit* of $T$. This notion is an analogue of the notion of a natural extension of a measure preserving endomorphism.

If $\tilde{\tau}: \tilde{K} \to \tilde{K}$ is a homeomorphism and $\tilde{\Psi}: \tilde{K} \to I$ a continuous map such that $\tilde{\Psi} \circ \tilde{\tau} = T \circ \tilde{\Psi}$, then there exists a unique map $\Phi: \tilde{K} \to K$ such that $\Phi \circ \tilde{\tau} = \tau \circ \Phi$ and $\tilde{\Psi} = \Psi_0 \circ \Phi$. This $\Phi$ is continuous. Thus, the inverse limit is the simplest homeomorphism having $T$ as a factor. This property can be used as a characterization of an inverse limit, up to conjugacy.

**2. Problems and results.** We want to embed an inverse limit of a continuous map of an interval into itself into a diffeomorphism (homeomorphism) of a mani-