Sur le maximum approximatif

par

Z. Grande (Bydgoszcz)

Résumé. Dans cet article on donne des exemples de fonction p.p. semi-continue supérieurement qui n'admet aucun maximum relatif et un exemple de fonction approximativement continue qui n'admet aucun maximum p.p. De plus, on démontre que toute fonction mesurable (p.p. semi-continue supérieurement) admet un maximum approximatif faible (un maximum p.p. faible) et que toute fonction approximativement (p.p.) semi-continue supérieurement satisfaisant à certaines conditions supplémentaires admet un maximum approximatif (un maximum p.p.) en un point.

Soit T une topologie de sous-ensembles de l'intervalle $[0, 1]$. On dit qu'une fonction $f\colon [0, 1] \to R$ admet un maximum au point x_0 par rapport à la topologie T lorsqu'il existe un ensemble $U \in T$ tel que $x_0 \in U$ et $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in U$. Si T est la topologie euclidienne (la topologie de densité) le maximum est dit relatif (approximatif, v. [1]).

Dans l'article [2] O'Malley a étudié une topologie qui est une sous-famille de la topologie de densité. Elle est composée de tous les ensembles d-ouverts A (c'est-à-dire, des ensembles appartenant à la topologie de densité) tels que $m(A) = m(\mathrm{Int} A)$ (m désignant la mesure de Lebesgue et $\mathrm{Int} A$ l'intérieur euclidien de l'ensemble A) et elle est dite topologie p.p. Le maximum par rapport à la topologie p.p. sera dit maximum p.p. Dans l'article [1] O'Malley a démontré que toute fonction $f\colon [0, 1] \to R$ approximativement continue admet un maximum approximatif en un point $x \in [0, 1]$. D'autre part Bruckner a indiqué un exemple de fonction $f\colon [0, 1] \to R$ approximativement continue qui n'admet de maximum relatif en aucun point $x \in [0, 1]$. Dans cet article je donne un exemple de fonction p.p. semi-continue supérieurement (semi-continue supérieurement par rapport à la topologie p.p.) qui n'admet de maximum relatif en aucun point et un exemple de fonction approximativement continue qui n'admet de maximum p.p. en aucun point.

De plus, je démontre qu'une fonction approximativement (p.p.) semi-continue supérieurement satisfaisant à certaines conditions supplémentaires admet un maximum approximatif (un maximum p.p.) en un point et qu'une fonction mesurable (p.p. semi-continue supérieurement) admet un maximum approximatif faible (un maximum p.p. faible). On dit qu'une fonction f: $[0,1]\to R$ admet un maximum approximatif faible (un maximum p.p. faible) au point x_0 lorsque la densité supérieure de l'ensemble $\{x: f(x)\leqslant f(x_0)\}$ (de l'intérieur $\operatorname{Int}\{x: f(x)\leqslant f(x_0)\}$) au point x_0 est égale à 1.

THÉORÈME 1. *Il existe une fonction bornée f: $[0,1]\to R$ p.p. semi-continue supérieurement qui n'admet de maximum relatif en aucun point.*

Démonstration. Désignons par A l'ensemble de tous les points d'accumulation bilatérale de l'ensemble de Cantor. Soit $(a_1, a_2, \ldots)$ une suite croissante de points de l'ensemble A convergente vers 1 et telle que $a_1>0$. Il existe pour tout $k=1,2,\ldots$ une suite croissante $(a_{k1}, a_{k2}, \ldots)$ de points de l'ensemble A convergente vers a_k et telle que $a_{k1}>a_{k-1}$. En général, le $n^{\text{ème}}$ pas donne pour tout système d'indices $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1})$ une suite croissante $(a_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}, a_{i_1,\ldots,i_{n-1},2}, \ldots)$ de points de l'ensemble A convergente vers le point $a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ et telle que $a_{i_1,\ldots,i_{n-1},1}>a_{i_1,\ldots,i_{n-1}-1}$. Posons, pour $x\in[0,1]$,

$$f(x)=x \quad \text{lorsque } x\notin \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{(i_1,\ldots,i_{n-1})}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{a_{i_1,\ldots,i_{n-1},k}\},$$

$$f(a_k)=\tfrac{3}{2} \quad \text{pour } k=1,2,\ldots,$$

et
$$f(a_{i_1,\ldots,i_{n-1},k})=f(a_{i_1,\ldots,i_{n-1}})+2^{-n}$$

pour $i_1,\ldots,i_{n-1}$, $k=1,2,\ldots$ et $n=2,3,\ldots$ La fonction f satisfait à toutes les conditions exigées.

THÉORÈME 2. *Il existe une fonction approximativement continue qui n'admet de maximum p.p. en aucun point $x\in[0,1]$.*

Démonstration. Il existe une fonction approximativement continue f_1: $[0,1]\to[0,1]$ telle que l'ensemble $\{x: f_1(x)=0\}$ est dense dans $[0,1]$, de mesure zéro et $f_1(1)>0$. La fonction

$$f(x)=x-f_1(x) \quad \text{lorsque } x\in[0,1]$$

est aussi approximativement continue, mais elle n'admet de maximum p.p. en aucun point.

THÉORÈME 3. *Soit f: $[0,1]\to R$ une fonction approximativement semi-continue supérieurement et telle qu'il existe une constante $c>0$ telle que, quels que soient le point $x\in[0,1]$ et le nombre $\varepsilon>0$, la densité de l'ensemble $\{t\in[0,1]: f(t)>f(x)-\varepsilon\}$ est égale à zéro au point x ou bien une densité inférieure de cet ensemble*

$$\{t: f(t)>f(x)-\varepsilon\}$$

en ce point x est plus grande que c. Dans ces hypothèses il existe un point $z\in[0,1]$ où la fonction f admet un maximum approximatif.

Dans la démonstration de ce théorème j'appliquerai la méthode d'O'Malley qui s'appuie sur le lemme suivant:

LEMME (v. [1]). *Soient H un sous-ensemble mesurable (au sens de Lebesgue) d'un intervalle I et $H_i=\bigcup J$: $J=(a,b)\subset I$ où $m(H\cap J)>2^{-i}m(J)$. On a alors*

$$m(H\cap(c,d))\geqslant 2^{-i-1}(d-c)$$

pour toute composante (c,d) de l'ensemble H_i et par conséquent $m(H_i)\leqslant 2^{i+1}m(H)$.

Démonstration du théorème 3. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la fonction f est bornée, sinon on pourrait considérer la fonction $\operatorname{arctg} f$ ayant les mêmes propriétés. Afin d'établir ce théorème, supposons que la fonction f n'admet de maximum approximatif en aucun point et construisons, dans cette hypothèse, une suite d'intervalles fermés $[a_n, b_n]\subset[0,1]$ et une suite croissante de nombres $y_n (n=1,2,\ldots)$ telles que:

1) $[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset(a_n, b_n)$;
2) $b_{n+1}-a_{n+1}<(b_n-a_n)/2$;
3) $m(\{x: f(x)>y_n\}\cap[a_n,b_n])>c(b_n-a_n)/2$;
4) $m(\{x: f(x)>y_n\}\cap(c,d))\leqslant 2^{-n}(d-c)$ pour tout intervalle ouvert $(c,d)\subset(a_{n-1}, b_{n-1})$ et contenant le point a_n ou bien b_n; et
5) $\max(f(a_n), f(b_n))<\sup\limits_{x\in(a_n,b_n)} f(x)$ pour $n=1,2,\ldots$

Par conséquent, il existera un point $z\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ et il résultera de la condition 3) et de la semi-continuité approximative supérieure de la fonction f que $f(z)>y_n$ pour tout n. De la condition 4) résultera que l'ensemble $\{x: f(x)>f(z)\}$ a une densité supérieure égale à zéro au point z.

Il suffit donc de construire une suite d'intervalles $[a_n,b_n]$ et de lui associer une suite de nombres y_n satisfaisant aux conditions 1)–5). Nous ne construirons que y_1, $[a_1,b_1]$, y_2 et $[a_2,b_2]$, puisque les suivants s'obtiennent par induction.

On peut supposer que $[a_1,b_1]=[0,1]$ et $y_1=\inf\limits_{x\in[0,1]} f(x)$.

Le choix du nombre y_2 et de l'intervalle $[a_2,b_2]$. Désignons par r_0 la borne supérieure $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x)$. Posons

$$\varepsilon=\tfrac{1}{2}[r_0-\max(f(0),f(1))]$$

et remarquons que $\varepsilon>0$. La fonction f étant approximativement semi-continue supérieurement, il existe un nombre positif $\delta<\frac{1}{2}$ tel que, quel que soit le nombre positif $x<\delta$, on a

$$m(\{x: f(x)>r_0-\varepsilon\}\cap[0,x])<\tfrac{1}{4}x$$

et

$$m(\{x: f(x)>r_0-\varepsilon\}\cap[1-x,1])<\tfrac{1}{4}x.$$

Le nombre y étant fixé, désignons par $H(y)$ l'ensemble $\{x: f(x)>y\}$ et par $H_1(y)$ l'ensemble

$$\bigcup J: J=(a,b) \quad \text{et} \quad m(H(y)\cap(a,b))>2^{-1}(b-a),$$

Il résulte du lemme que $\lim_{y\to r_0^+} m(H_1(y)) = 0$. Soit u_1 un nombre tel que $r_0-\varepsilon<u_1<r_0$ et $0<m(H_1(u_1))<\delta$. Démontrons que les points 0 et 1 ne sont les extrémités d'aucune composante de l'ensemble $H_1(u_1)$. En effet, supposons au contraire que 0 soit une extrémité d'une composante de l'ensemble $H_1(u_1)$ de la forme $(0, b)$. Puisque $m(H_1(u_1))<\delta$, on a donc $b<\delta$ et par conséquent

$$m(\{x\colon f(x)>r_0-\varepsilon\} \cap (0, b))<4^{-1}b\,.$$

Mais $u_1>r_0-\varepsilon$, on a donc également

$$m(\{x\colon f(x)>u_1\} \cap (0, b))<4^{-1}b,$$

en contradiction avec le lemme, d'après lequel on a

$$m(\{x\colon f(x)>u_1\} \cap (c, d))\geqslant\tfrac{1}{4}(d-c)$$

pour toute composante (c, d) de l'ensemble $H_1(u_1)$.

De même on démontre que le point 1 n'est une extrémité d'aucune composante de l'ensemble $H_1(u_1)$. Remarquons que les fermetures de toutes les composantes de l'ensemble $H_1(u_1)$ et le nombre u_1 satisfont aux conditions 1), 2) et 4). Fixons une composante (c_1, d_1) de l'ensemble $H_1(u_1)$. Si $f(c_1)>u_1$, il existe un point $\bar{c}_1<c_1$ tel que $f(\bar{c}_1)\leqslant u_1$, $\bar{c}_1\notin H_1(u_1)$, $d_1-\bar{c}_1<\frac{1}{2}$ et $m(\{x\colon f(x)>u_1\} \cap (\bar{c}_1, d_1))>\frac{1}{5}(d_1-\bar{c}_1)$. Si $f(c_1)\leqslant u_1$, posons $\bar{c}_1 = c_1$. De même, si $f(d_1)>u_1$, il existe un point $\bar{d}_1>d_1$ tel que $(f(\bar{d}_1)\leqslant u_1$, $\bar{d}_1\notin H_1(u_1)$, $\bar{d}_1-\bar{c}_1<\frac{1}{2}$ et $m(\{x\colon f(x)>u_1\} \cap (\bar{c}_1, \bar{d}_1))>\frac{1}{5}(\bar{d}_1-\bar{c}_1)$. Si $f(d_1)\leqslant u_1$, posons $\bar{d}_1 = d_1$. L'intervalle $(\bar{c}_1, \bar{d}_1)$ et le nombre u_1 satisfont déjà aux conditions 1), 2), 4) et 5).

En procédant de même que dans la construction $[\bar{c}_1, \bar{d}_1]$ et u_1, on obtient par induction une suite d'intervalles fermés $[\bar{c}_n, \bar{d}_n]$ et une suite croissante de nombres u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ telles que, quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, on a

1′) $[\bar{c}_{n+1}, \bar{d}_{n+1}]\subset(\bar{c}_n, \bar{d}_n)$;

2′) $\bar{d}_{n+1}-\bar{c}_{n+1}<2^{-1}(\bar{d}_n-\bar{c}_n)$;

3′) $m(\{x\colon f(x)>u_n\} \cap [\bar{c}_n, \bar{d}_n])\geqslant 5^{-1}(\bar{d}_n-\bar{c}_n)$;

4′) $m(\{x\colon f(x)>u_n\} \cap (c, d))\leqslant 2^{-1}(d-c)$ pour tout intervalle ouvert $(c, d) \subset[\bar{c}_{n-1}, \bar{d}_{n-1}]$ et contenant le point $\bar{c}_n$ ou bien $\bar{d}_n$; et

5′) $\max(f(\bar{c}_n), f(\bar{d}_n))< \sup_{x\in[\bar{c}_n, \bar{d}_n]} f(x)$.

Par conséquent, il existera un point $u\in\bigcap_{n=1}^{\infty} [\bar{c}_n, \bar{d}_n]$ et il résultera de la condition 3′) et de la semi-continuité approximative de la fonction f que $f(u)>u_n$ pour tout n. D'après l'hypothèse du théorème il existera un indice n_0 tel que

$$m(\{x\colon f(x)>u_{n_0}\} \cap [\bar{c}_{n_0}, \bar{d}_{n_0}])>\tfrac{1}{2}c(d_{n_0}-c_{n_0})\,.$$

Posons $a_2 = c_{n_0}$, $b_2 = d_{n_0}$ et $y_2 = u_{n_0}$, et la démonstration est achevée.

THÉORÈME 4. *Soit $f\colon [0, 1]\to R$ une fonction p.p. semi-continue supérieurement et telle qu'il existe une constante $c>0$ telle que, quels que soient le point $x\in[0, 1]$ et le nombre $\varepsilon>0$, la densité de l'ensemble $\{t\in[0, 1]\colon f(t)>f(x)-\varepsilon\}$ est égale à zéro au point x ou bien une densité inférieure de cet ensemble $\{t\colon f(t)>f(x)-\varepsilon\}$ en ce point x est plus grande que c. Dans ces hypothèses il existe un point $z\in[0, 1]$ où la fonction f admet un maximum p.p.*

Démonstration. Puisque la fonction f est approximativement semi-continue supérieurement, elle admet un maximum approximatif en un point. S'il existe un point $x_0\in[0, 1]$ où la fonction f admet un maximum approximatif tel que $m(\{x\colon f(x) = f(x_0)\}) = 0$, on a

$$m(\{x\colon f(x)\leqslant f(x_0)\}) = m(\{x\colon f(x)<f(x_0)\}) = m(\mathrm{Int}\{x\colon f(x)<f(x_0)\})$$

et par conséquent la fonction f admet un maximum p.p. au point x_0.

Sinon, on suppose que la fonction f n'admet de maximum p.p. en aucun point $x\in[0, 1]$ et on construit de même que dans la démonstration du théorème 3 une suite d'intervalles fermés $[a_n, b_n]$ et une suite croissante de nombres y_n satisfaisant aux conditions 1)–5) de la démonstration du théorème 3 et telles que

$$m(\{x\colon f(x) = y_n\}) = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ce qui contredit l'hypothèse.

La possibilité de cette construction résulte du fait que l'ensemble

$$\{y\in R\colon m(f^{-1}(y)) \neq 0\}$$

est au plus dénombrable.

THÉORÈME 5. *Soient $f\colon [0, 1]\to R$ une fonction mesurable (au sens de Lebesgue) et $A\subset[0, 1]$ un ensemble fermé de mesure (de Lebesgue) positive. Il existe un point $z\in A$ où la fonction f admet un maximum approximatif faible.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité on peut supposer que la fonction f est bornée, sinon on pourrait considérer la fonction $\operatorname{arctg} f$. D'après le théorème de Lusin il existe un ensemble fermé $B\subset[0, 1]$ tel que $m(A \cap B)>0$ et la fonction réduite f/B est continue. Soit $C\subset A \cap B$ un ensemble fermé tel que $m(C) = m(A \cap B)$ et $m(C \cap I)>0$ pour tout intervalle ouvert I tel que $I \cap C \neq 0$. S'il existe $y_0\in R$ tel que $m(f^{-1}(y_0) \cap C)>0$, la fonction f admet un maximum approximatif. Supposons donc que $m(f^{-1}(y) \cap C) = 0$ pour tout $y\in R$. Soit $x_1\in C$ un point de densité de l'ensemble C. La fonction réduite f/C étant continue au point x_1, il existe un intervalle fermé I_1 contenant x_1 dans son intérieur et tel que $m(I_1\cap C)>\frac{1}{2}m(I_1)$ et $f(x)>f(x_1)-\frac{1}{2}$ pour tout $x\in I_1\cap C$. Si la fonction f n'admet de maximum approximatif faible en aucun point $x\in C \cap I_1$, il existe un nombre $y_1< \sup_{t\in I_1\cap C} f(t)$ tel que

$$m(I_1 \cap \{t\in C\colon f(t)\leqslant y_1\})>\tfrac{1}{2}m(I_1) \quad \text{et} \quad m(\{t\in I_1 \cap C\colon f(t)>y_1\})>0\,.$$

Soit $x_2\in \mathrm{Int}\, I_1 \cap C$ un point de densité de l'ensemble C tel que $f(x_2)>y_1$. Il existe un intervalle fermé $I_2\subset\mathrm{Int}\, I_1$ contenant x_2 dans son intérieur et tel que $m(I_2 \cap C)$

$>(1-2^{-2})m(I_2)$, $m(I_2)<\frac{1}{2}m(I_1)$ et $f(x)>y_1$ pour tout $x \in I_2 \cap C$. Soit y_2 un nombre tel que $y_1<y_2<\sup_{t \in I_2 \cap C} f(t)$,

$$m(I_2 \cap \{t \in C\colon f(t) \leqslant y_2\})>(1-2^{-2})m(I_2) \quad \text{et} \quad m(\{t \in I_2 \cap C\colon f(t)>y_2\})>0\,.$$

En général, le n$^{\text{ème}}$ pas donne un intervalle fermé I_n et un nombre y_n tels que:

$y_n>y_{n-1}$;
$m(I_n \cap \{t \in C\colon f(t) \leqslant y_n\})>(1-2^{-n})m(I_n)$;
$f(x)>y_{n-1}$ pour tout $x \in I_n \cap C$;
$m(I_n)<\frac{1}{2}m(I_{n-1})$; et
$m(\{t \in I_n \cap C\colon f(t)>y_n\})>0$.

L'intersection $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{z\}$ où $z \in C$. La fonction réduite f/C étant continue au point z, on a $f(z)>y_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Remarquons, en outre, que

$$m(I_n \cap \{t \in [0,1]\colon f(t)<f(z)\})/m(I_n) \geqslant m(I_n \cap \{t \in C\colon f(t) \leqslant y_n\})/m(I_n)>1-2^{-n}$$

pour $n = 1, 2, \ldots$

Par conséquent, z est un point de densité supérieure de l'ensemble

$$\{t \in [0,1]\colon f(t)<f(z)\}$$

et la démonstration est achevée.

Remarque. Il existe une fonction $f\colon [0,1] \to R$ approximativement semi-continue supérieurement qui n'admet de maximum p.p. faible en aucun point $x \in [0,1]$.

Telle est, par exemple, toute fonction f égale à zéro presque partout et telle que $f(I) = [0, \infty)$ pour tout intervalle ouvert I $(I \neq 0)$.

THÉORÈME 6. *Si une fonction $f\colon [0,1] \to R$ est p.p. semi-continue supérieurement, elle admet un maximum p.p. faible en un point $x_0 \in [0,1]$.*

Démonstration. Puisque la fonction f est mesurable, elle admet un maximum approximatif faible en un point. S'il existe un point $x_0 \in [0,1]$ où la fonction f admet un maximum approximatif faible tel que $m(\{x\colon f(x) = f(x_0)\}) = 0$, on a

$$m(\{x\colon f(x) \leqslant f(x_0)\}) = m(\{x\colon f(x)<f(x_0)\}) = m(\mathrm{Int}\{x\colon f(x)<f(x_0)\})$$

et par conséquent la fonction f admet un maximum p.p. faible au point x_0.

Sinon, on suppose que la fonction f est bornée et n'admet de maximum p.p. faible en aucun point $x \in [0,1]$ et on construit de même que dans la démonstration du théorème 3 une suite d'intervalles fermés $[a_n, b_n] \subset [0,1]$ et une suite croissante de nombres y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ telles que:

1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset (a_n, b_n)$;
2) $b_{n+1}-a_{n+1}<2^{-1}(b_n-a_n)$;

3) $m(\{x\colon f(x)>y_{2n-1}\} \cap [a_{2n-1}, b_{2n-1}])>5^{-1}(b_{2n-1}-a_{2n-1})$;
4) $m(\{x\colon f(x)<y_{2n}\} \cap (c,d)) \leqslant 2^{-2n}(d-c)$ pour tout intervalle ouvert (c,d) tel que $(c,d) \subset [a_{2n-1}, b_{2n-1}]$ et contenant le point a_{2n} ou bien b_{2n}; et
5) $\max(f(a_n), f(b_n))<\sup_{x \in [a_n, b_n]} f(x)$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Il résulte de ces conditions que la fonction f admet un maximum p.p. faible au point $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Bibliographie

[1] R. J. O'Malley, *Approximate maxima*, Fund. Math. 94 (1977), pp. 75–81.
[2] — *Approximately differentiables functions. The r topology*, Pacific J. Math. 72 (1977), pp. 207–222.
[3] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), pp. 1–54.

INSTYTUT MATEMATYKI
WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
Bydgoszcz

Received 8 March 1982