Quelques remarques sur la superposition $F(x, f(x))$

by

Eulalia Grande et Zbigniew Grande (Bydgoszcz)

Résumé. Dans cet article on démontre quelques conditions suffisantes pour la (B)sup-mesurabilité et la sup-mesurabilité d'une fonction réele de deux variables réelles. Une fonction $F\colon R^2 \to R$ (R désignant l'espace des nombres réels et $R^2 = R \times R$) est dite (B)sup-mesurable (sup-mesurable) lorsque, quelle que soit la fonction $f\colon R \to R$ ayant la propriété de Baire (mesurable), la superposition $g(x) = F(x, f(x))$ a aussi la propriété de Baire (est mesurable).

Désignons par R l'espace des nombres réels et par R^2 l'espace produit $R \times R$.

Une fonction $F\colon R^2 \to R$ est dite:

(a) sup-mesurable lorsque la superposition $g(x) = F(x, f(x))$ est mesurable (au sens de Lebesgue), quelle que soit la fonction mesurable $f\colon R \to R$ (Szragin [6]);

(b) (B)sup-mesurable lorsque la superposition $g(x) = F(x, f(x))$ a la propriété de Baire, quelle que soit la fonction $f\colon R \to R$ ayant la propriété de Baire.

Dans le livre [1] et les travaux [6] et [2] on trouve de nombreuses conditions suffisantes pour la sup-mesurabilité d'une fonction $F\colon R^2 \to R$.

En particulier on y trouve les suivantes:

(1) la continuité de toutes les sections $F_x(t) = F(x, t)$ et la mesurabilité de toutes les sections $F^y(t) = F(t, y)$ ([1]);

(2) la mesurabilité (au sens de Lebesgue) de la fonction F et la continuité approximative de toutes ses sections F_x ([2]);

(3) la semi-équicontinuité supérieure de toutes les sections F_x et la mesurabilité de toutes les sections F^y ([2]);

(4) la semi-continuité approximative inférieure de la fonction F et la semi-continuité supérieure de toutes ses sections F_x ([2]);

(5) la semi-continuité supérieure de toutes les sections F_x et la semi-continuité approximative inférieure de toutes les sections F^y ([2]).

D'autre part l'hypothèse de continu implique l'existence d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ qui n'est pas sup-mesurable, dont toutes les sections F_x sont approximativement continues et toutes les sections F^y son mesurables ([2]), ainsi que l'existence d'une fonction sup-mesurable qui n'est pas mesurable ([3]).

Dans cet article nous démontrons quelques conditions suffisantes analogues pour la (B)sup-mesurabilité d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ et quelques nouvelles conditions suffisantes pour la sup-mesurabilité d'une fonction $F\colon R^2 \to R$.

DÉFINITION 1. On dit qu'un *ensemble* $A \subset R$ *a la propriété* (Z) lorsque, quel que soit le point $x \in A$, il existe un ensemble ouvert $U \subset A$ et un nombre $\delta > 0$ tels que $m(J \cap U)/m(J) > 1/2$ pour tout intervalle J contenant le point x et de longueur inférieure à δ (comme d'habitude, m désigne la mesure de Lebesgue dans R).

DÉFINITION 2. On dit qu'une *fonction* $f\colon R \to R$ *a la propriété* (Z_1) lorsque, quel que soit le nombre réel a, les ensembles $\{x \in R\colon f(x) < a\}$ et $\{x \in R\colon f(x) > a\}$ ont la propriété (Z).

THÉORÈME 1. *Si toutes les sections F_x d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ ont la propriété (Z_1) et si toutes ses sections F^y ont la propriété de Baire (sont mesurables), la fonction F est (B)sup-mesurable (sup-mesurable).*

Démonstration. Nous démontrerons seulement que la superposition $g(x) = F(x, f(x))$ a la propriété de Baire lorsque la fonction f a la propriété de Baire, puisque la démonstration de la mesurabilité de la superposition g dans l'hypothèse que la fonction f est mesurable est analogue.

Supposons, au contraire, qu'il existe une fonction $f\colon R \to R$ ayant la propriété de Baire et telle que la superposition g ne possède pas la propriété de Baire. Il existe donc un nombre réel a tel que l'ensemble $\{x \in R\colon g(x) < a\}$ ne possède pas la propriété de Baire. Désignons par A la différence de l'espace R et de l'union de tous les intervalles ouverts d'extrémités rationnelles dans lesquels l'un des ensembles $\{x \in R\colon g(x) < a\}$ et $\{x \in R\colon g(x) \geqslant a\}$ est de première catégorie. Il existe un nombre naturel n tel que l'ensemble $C = A \cap \{x\colon g(x) < a - 1/n\}$ est de deuxième catégorie. Soit $I \subset A$ un intervalle ouvert tel que, pour tout intervalle ouvert $J \subset I$, l'ensemble $J \cap \{x\colon g(x) < a - 1/n\}$ est de deuxième catégorie.

Toutes les sections F_x ayant la propriété (Z_1), on peut faire correspondre à chaque point $x \in I \cap C$ un intervalle ouvert $U(x)$ d'extrémités rationnelles, contenant $f(x)$ et tel que, pour tout intervalle ouvert $V \subset U(x)$ contenant $f(x)$, on a

$$m\big(V \cap \operatorname{Int}(\{t\colon F(x, t) < a - 1/n\})\big)/m(V) > 1/2$$

($\operatorname{Int}(X)$ désigne, comme d'habitude, l'intérieur de l'ensemble X). La famille des intervalles ouverts d'extrémités rationnelles étant dénombrable et l'ensemble $I \cap C$ étant de deuxième catégorie, il existe un intervalle $U(x)$, que nous désignons par U, tel que l'ensemble $D = \{x \in I \cap C\colon$ au point x correspond l'intervalle $U\}$ est de deuxième catégorie. Soit $I_1 \subset I$ un intervalle ouvert tel que, pour tout intervalle ouvert $J \subset I_1$, l'ensemble $J \cap D$ soit de deuxième catégorie. Désignons par D_1 l'ensemble $\{x \in I_1\colon f(x) \in U\}$. La fonction f ayant la propriété de Baire et l'ensemble $I_1 \cap D$ étant de deuxième catégorie et $I_1 \cap D \subset D_1$, l'ensemble D_1 a la propriété de Baire et il est de deuxième catégorie. Il existe un intervalle ouvert $I_2 \subset I_1$ dans lequel l'ensemble D_1 est résiduel. Remarquons que l'ensemble $G = I_2 \cap D_1 \cap \{x \in R\colon g(x) \geqslant a\}$ est aussi de deuxième catégorie. Les sections F_x ayant la propriété (Z_1), on peut faire correspondre à chaque point $x \in G$ un intervalle ouvert $U(x) \subset U$ d'extrémités rationnelles, contenant $f(x)$ et tel que

$$m\big(U_1 \cap \operatorname{Int}(\{t \in R\colon F(x, t) > a - 1/2n\})\big)/m(U_1) > 1/2,$$

pour tout intervalle $V \subset U(x)$ et contenant $f(x)$.

D'autre part, il existe un intervalle $U(x)$, que nous désignons par U_1, tel que l'ensemble $H = \{x \in G\colon$ au point x correspond l'intervalle $U_1\}$ est de deuxième catégorie. On a

$$m\big(U_1 \cap \operatorname{Int}(\{t \in R\colon F(x, t) > a - 1/2n\})\big)/m(U_1) > 1/2,$$

quel que soit $x \in H$. Il existe donc pour tout $x \in H$ un système fini d'intervalles ouverts d'extrémités rationnelles $V_1(x), \ldots, V_{k(x)}(x)$, contenus dans $\operatorname{Int}(\{t \in R\colon F(x, t) > a - 1/2n\}) \cap U_1$, disjoints deux à deux et tels que

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{k(x)} V_i(x)\Big) > m(U_1)/2.$$

La famille de tous les systèmes finis d'intervalles ouverts d'extrémités rationnelles étant dénombrable, il existe un système fini d'intervalles ouverts $V_1(x), \ldots, V_{k(x)}(x)$, que nous désignons par $V_1, \ldots, V_k$, tel que l'ensemble $K = \{x \in H\colon$ au point x correspond le système d'intervalles $V_1, \ldots, V_k\}$ est de deuxième catégorie. Soit $I_3 \subset I_2$ un intervalle ouvert tel que, pour tout intervalle ouvert $J \subset I_3$, l'ensemble $J \cap K$ est de deuxième catégorie. Comme l'ensemble $\{x \in I_3 \cap D\colon f(x) \in U_1\}$ est également de deuxième catégorie, il existe donc un ensemble $L \subset I_3 \cap D$ de deuxième catégorie et un système fini d'intervalles ouverts $W_1, \ldots, W_l$ d'extrémités rationnelles contenus dans U_1 et tels que

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{l} W_i\Big) > m(U_1)/2 \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^{l} W_i \subset \operatorname{Int}(\{t \in R\colon F(x, t) < a - 1/n\}),$$

quel que soit le point $x \in L$. Soit $I_4 \subset I_3$ un intervalle ouvert tel que l'ensemble $J \cap L$ est de deuxième catégorie, quel que soit l'intervalle ouvert $J \subset I_4$. L'ensemble

$$S = \Big(\bigcup_{i=1}^{k} V_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{l} W_i\Big) \neq \emptyset,$$

donc il existe un point $t_0 \in S$. On a donc $F(x, t_0) < a - 1/n$ pour tout $x \in L$ et $F(x, t_0) > a - 1/2n$ pour tout $x \in K$, d'où il vient que la section F^{t_0} ne possède pas la propriété de Baire, en contradiction avec l'hypothèse de notre théorème.

THÉORÈME 2. *Il existe une fonction* $F\colon R^2 \to R$ *ayant la propriété de Baire, mesurable, qui n'est ni (B)sup-mesurable, ni sup-mesurable, et telle que toutes ses sections* F^y *sont boréliennes et qu'il existe pour tout* $(x, y) \in R^2$ *un ensemble ouvert* $U(x, y) \subset R$ *tel que la densité inférieure de l'ensemble* $U(x, y)$ *au point* y *est* $\geqslant 1/2$ *et les fonctions partielles* $F_x/U(x, y)$ *sont continues au point* y.

Démonstration. Soit $C \subset [0, 1]$ l'ensemble de Cantor de mesure nulle. L'ensemble ouvert $[0, 1]-C$ est la somme de ses composantes (α_n, β_n), où $\alpha_n < \beta_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Il existe pour tout $n = 1, 2, \ldots$ deux suites (a_k^n) et (b_k^n) telles que:

(a) $a_1^n = b_1^n = (\alpha_n + \beta_n)/2$;

(b) $a_k^n > a_{k+1}^n$ et $b_k^n < b_{k+1}^n$ pour $k = 1, 2, \ldots$;

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k^n = \alpha_n$ et $\lim\limits_{k\to\infty} b_k^n = \beta_n$; et $(a_k^n - a_{k+1}^n)/(a_{k+1}^n - \alpha_n) < 1/n$ et $(b_{k+1}^n - b_k^n)/\beta_n - b_{k+1}^n) < 1/n$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$;

(d) $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k^n - a_{k+1}^n)/(a_{k+1}^n - \alpha_n) = 0$ et $\lim\limits_{k\to\infty} (b_{k+1}^n - b_k^n)/(\beta_n - b_k^n) = 0$.

Posons $c_k^n = (a_k^n + a_{k+1}^n)/2$ et $d_k^n = (b_k^n + b_{k+1}^n)/2$ pour $k, n = 1, 2, \ldots$ et

$$h(y) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } y \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [c_i^n, a_i^n) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [b_i^n, d_i^n)\Big), \\ 0 & \text{lorsque } y \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [c_i^n, a_i^n) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} [b_i^n, d_i^n)\Big). \end{cases}$$

D'après le théorème de Mazurkiewicz ([4], p. 349) il existe une homéomorphie $g\colon N \xrightarrow{\text{sur}} [C - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{\alpha_n, \beta_n\}]$, où N désigne l'espace des nombres irrationnels de l'intervalle $[0, 1]$. Il existe deux ensembles A, B qui n'ont pas la propriété de Baire et ne sont pas mesurables, tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = N$. Posons

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{lorsque } x \in N, \\ 0 & \text{lorsque } x \notin N \end{cases}$$

et

$$F(x, y) = \begin{cases} h(y) & \text{lorsque } y \notin C, \\ 1 & \text{lorsque } x \in A \text{ et } y = f(x), \\ 0 & \text{lorsque } y \in C \text{ et } x \notin A \text{ ou bien } x \in A \text{ et } y \neq f(x). \end{cases}$$

La fonction f a la propriété de Baire et est mesurable et la superposition $g_f(x) = F(x, f(x))$ ne possède pas la propriété de Baire et n'est pas mesurable. De plus, la fonction F satisfait à toutes les conditions exigées et la démonstration est ainsi achevée.

THÉORÈME 3. *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction* $F\colon R^2 \to R$ *qui a la propriété de Baire et n'est pas (B)sup-mesurable, dont toutes les sections* F_x *sont approximativement continues et toutes les sections* F^y *ont la propriété de Baire.*

Démonstration. Soient A, B deux ensembles parfaits, non vides et tels que $A \subset B$, $m(A) = 0$ et supposons que tout point $x \in A$ soit un point de densité de l'ensemble B. D'après le théorème de Mazurkiewicz ([4], p. 349) il existe une homéomorphie $g\colon N \to A$, où N désigne l'espace des nombres irrationnels de l'intervalle $[0, 1]$. Soient C, D deux ensembles n'ayant pas la propriété de Baire tels que $C \cap D = \emptyset$ et $C \cup D = N$. Fixons un élément $y_0 \in A$ et posons

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{lorsque } x \in N, \\ y_0 & \text{lorsque } x \notin N. \end{cases}$$

La fonction f a la propriété de Baire (elle est même borélienne). Soit $E \subset B$ un ensemble du type F_σ et tel que $A \subset E$ et que tout point $x \in E$ est un point de densité de l'ensemble E.

Rangeons tous les points de l'espace R en une suite transfinie du type Ω (Ω désignant le plus petit nombre transfini qui n'est pas dénombrable):

(a) $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha, \ldots$, $\alpha < \Omega$ et $a_\alpha \neq a_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$, et tous les points de l'ensemble E en une suite transfinie,

(b) $b_1, b_2, \ldots, b_\alpha, \ldots$, $\alpha < \Omega$ et $b_\alpha \neq b_\beta$ pour $\alpha \neq \beta$.

Posons $A_\alpha = \{b_\beta\colon \beta < \alpha\}$ pour $\alpha < \Omega$. Soit $\alpha < \Omega$. L'ensemble A_α étant dénombrable, il existe un ensemble G_α du type G_δ, de mesure nulle, qui contient l'ensemble A_α. Si $a_\alpha \in C$, soit $h_\alpha\colon R \to R$ une fonction approximativement continue qui satisfait aux conditions:

$$\begin{aligned} 0 < h_\alpha(y) \leqslant 1 \quad & \text{lorsque } y \in (E - G_\alpha) \cup \{f(a_\alpha)\}, \\ h_\alpha(y) = 0 \quad & \text{lorsque } y \in [(R-E) \cup G_\alpha] - \{f(a_\alpha)\}. \end{aligned}$$

Dans le cas contraire, où $a_\alpha \notin C$, soit $h_\alpha\colon R \to R$ une fonction approximativement continue qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} 0 < h_\alpha(y) \leqslant 1 \quad & \text{lorsque } y \in E - G_\alpha - \{f(a_\alpha)\}, \\ h_\alpha(y) = 0 \quad & \text{lorsque } y \in (R-E) \cup G_\alpha \cup \{f(a_\alpha)\}. \end{aligned}$$

Les fonctions h_α satisfaisant à ces conditions existent d'après le lemme 11 du travail [7]. Posons

$$F(x, y) = h_\alpha(y) \quad \text{lorsque } x = a_\alpha.$$

On voit facilement que toutes les sections F_x de la fonction F sont approximativement continues. La fonction F a la propriété de Baire, puisqu'elle s'annule sur l'ensemble $R \times (R-E)$ qui est résiduel dans l'espace R^2. La superposition $g_f(x) = F(x, f(x))$ est nulle sur l'ensemble $R - C$ et positive sur l'ensemble C qui ne possède pas la propriété de Baire, la fonction F n'est pas (B)sup-mesurable. Démontrons encore que toutes les sections F^y ont la propriété de Baire. Si $y \notin E$, on a $F^y(x) = 0$ pour tout $x \in R$ et la section F^y a la propriété de Baire. Fixons donc un point $y \in E$. Soit α_0 un nombre ordinal tel que $y = b_{\alpha_0}$. Remarquons que le point $y = b_{\alpha_0} \in G_\alpha$ pour tout $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \Omega$). Si $y \notin f(R)$, on a $h_\alpha(y) = h_\alpha(b_{\alpha_0}) = 0$ lorsque $\alpha > \alpha_0$. Dans le cas contraire, si $y \in f(R)$, désignons par H l'ensemble $\{\alpha < \Omega\colon f(a_\alpha) = y\}$ et remarquons que $h_\alpha(b_{\alpha_0}) = 0$ pour tout $\alpha > \alpha_0$ tel que $\alpha \notin H$ ($\alpha < \Omega$). Cela signifie que l'ensemble

$$\{x \in R\colon F^y(x) \neq 0\}$$

est dénombrable. La section F^y a donc la propriété de Baire et la démonstration est achevée.

Problème 1. L'existence d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ qui n'est pas (B)sup-mesurable et a la propriété de Baire, dont toutes les sections F^y ont la propriété de Baire et toutes les sections F_x sont approximativement continues implique-t-elle l'axiome de Martin?

Remarque. En posant dans le théorème 3

$$F_1(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{lorsque } x \in A, \\ 0 & \text{lorsque } x \notin A, \end{cases}$$

où $A \subset R$ est un ensemble dense, du type G_δ et de mesure nulle, on obtient une fonction satisfaisant à toutes les conditions exigées dans le théorème 3 et, de plus, mesurable.

Théorème 4. *Soit $F\colon R^2 \to R$ une fonction. Si toutes les sections F^y ont la propriété de Baire et s'il existe pour tout $y \in R$ un ensemble mesurable $A(y) \subset R$ et un nombre $\delta > 0$ tels que $m(A(y) \cap I)/m(I) > 1/2$ pour tout intervalle I contenant y et de longueur inférieure à δ et que les sections partielles $F_x/A(y)$ sont équicontinues au point y, la fonction F est (B)sup-mesurable.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que la fonction F ne soit pas (B)sup-mesurable. Il existe donc une fonction $f\colon R \to R$ ayant la propriété de Baire et telle que la superposition $g(x) = F(x, f(x))$ n'a pas la propriété de Baire. De même que dans la démonstration du théorème 1 on démontre l'existence d'un nombre a, d'un nombre naturel n et d'un intervalle ouvert I tels que, pour tout intervalle ouvert $J \subset I$, les ensembles

$$\{x \in R\colon g(x) < a - 1/n\} \cap J \quad \text{et} \quad \{x \in R\colon g(x) \geqslant a\} \cap J$$

sont tous deux de deuxième catégorie. D'après l'hypothèse de notre théorème on peut faire correspondre à chaque point $x \in I$ tel que $g(x) < a - 1/n$ un intervalle ouvert $U(x)$ d'extrémités rationnelles contenant $f(x)$ et tel que, pour tout intervalle ouvert $J \subset U(x)$ et contenant $f(x)$, on a

$$m\big(A(f(x)) \cap J\big)/m(J) > 1/2 \quad \text{et} \quad |F(u, f(x)) - F(u, y)| < 1/8n$$

pour tout $y \in A(f(x)) \cap U(x)$ et $u \in R$. Il existe un intervalle $U(x)$, que nous désignons par U, tel que l'ensemble $D = \{x \in I\colon g(x) < a - 1/n$ et au point x correspond l'intervalle $U\}$ est de deuxième catégorie. Soit $I_1 \subset I$ un intervalle ouvert tel que, pour tout intervalle ouvert $J \subset I_1$, l'ensemble $J \cap D$ soit de deuxième catégorie. Désignons par D_1 l'ensemble $\{x \in I_1\colon f(x) \in U\}$. L'ensemble D_1 a la propriété de Baire et il est de deuxième catégorie. Il existe un intervalle ouvert $I_2 \subset I_1$ dans lequel l'ensemble D_1 est résiduel. D'autre part on peut faire correspondre à chaque point $x \in I_2$ tel que $g(x) \geqslant a$ un intervalle ouvert $V(x) \subset U$ d'extrémités rationnelles contenant $f(x)$ et tel que, pour tout intervalle ouvert $J \subset V(x)$ et contenant $f(x)$, on a

$$m\big(A(f(x)) \cap J\big)/m(J) > 1/2 \quad \text{et} \quad |F(u, f(x)) - F(u, y)| < 1/8n$$

pour tout $y \in A(f(x)) \cap V(x)$ et $u \in R$.

Il existe un intervalle ouvert $V(x)$, que nous désignons par V, tel que l'ensemble $G = \{x \in I_2\colon g(x) \geqslant a$ et au point x correspond l'intervalle $V\}$ est de deuxième catégorie. Soit $I_3 \subset I_2$ un intervalle ouvert tel que, pour tout intervalle ouvert $J \subset I_3$, l'ensemble $J \cap G$ est de deuxième catégorie. Fixons un point $x_1 \in G \cap I_3$. Si $x \in I_3 \cap (G \cup D)$, on a

$$m\big(A(f(x)) \cap V\big)/m(V) > 1/2 \quad \text{et} \quad m\big(A(f(x_1)) \cap V\big)/m(V) > 1/2,$$

d'où il vient qu'il existe un point $z \in V \cap A(f(x_1)) \cap A(f(x))$ et par conséquent

$$\begin{aligned} |F(x, f(x)) - F(x, f(x_1))| &\leqslant |F(x, f(x)) - F(x, z)| + |F(x, z) - F(x, f(x_1))| \\ &< 1/8n + 1/8n = 1/4n. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$F(x, f(x_1)) > a - 1/4n$$

lorsque $x \in I_3 \cap G$ et

$$F(x, f(x_1)) < a - 1/n + 1/4n = a - 3/4n < a - 1/4n$$

lorsque $x \in I_3 \cap D$.

La section $F^{f(x_1)}$ ne possède pas la propriété de Baire, en contradiction avec l'hypothèse de notre théorème.

Théorème 5. *Si toutes les sections F_x d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ sont semi-équicontinues supérieurement en tout point $y \in R$* [1] *et toutes les sections F^y ont la propriété de Baire, la fonction F est (B)sup-mesurable.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que la fonction F ne soit pas (B)sup-mesurable. Il existe donc une fonction $f\colon R \to R$ ayant la propriété de Baire et telle que la fonction $g(x) = F(x, f(x))$ n'a pas la propriété de

[1] C'est-à-dire qu'il existe pour tout nombre $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que $F(x, u) - F(x, y) < \varepsilon$ pour tout $u \in (y - \delta, y + \delta)$, quel que soit $x \in R$.

Baire; par conséquent il existe un nombre a tel que l'ensemble $\{x\colon g(x)<a\}$ ne possède pas la propriété de Baire. Il existe également un nombre naturel n et un intervalle ouvert I tel que, pour tout intervalle ouvert $J\subset I$, les ensembles $\{x\colon g(x)<a-1/n\}$ et $\{x\colon g(x)\geqslant a\}$ sont tous deux de deuxième catégorie dans J. De même que dans la démonstration du théorème 1 on démontre l'existence d'un intervalle ouvert $I_1\subset I$, d'un intervalle ouvert $U\subset R$ et de deux ensembles $A\subset\{x\colon g(x)<a-1/n\}$ et $B\subset\{x\colon g(x)\geqslant a\}$ tels que, pour tout intervalle ouvert $J\subset I_1$, les ensembles $A\cap J$ et $B\cap J$ sont tous deux de deuxième catégorie et $F(x,u)-F(x,f(x))<1/8n$ pour tout $x\in A\cup B$ et tout $u\in U$. Soit $C\subset R$ un ensemble de première catégorie tel que la fonction réduite $f/R-C$ est continue. Fixons un point $x_0\in(I_1\cap A)-C$ et remarquons que l'ensemble

$$D=\{x\in I_1\colon F(x,f(x_0))<a-7/8n\}$$

a la propriété de Baire et qu'il est de deuxième catégorie. Les sections F_x étant semi-équicontinues supérieurement au point $f(x_0)$, il existe un intervalle ouvert $V\subset U$ contenant $f(x_0)$ et tel que, pour tout $y\in V$ et tout $x\in R$, on a

$$F(x,y)-F(x,f(x_0))<1/8n.$$

Comme $x_0\notin C$ et $f(x_0)\in V$, l'ensemble $E=\{x\in D\colon f(x)\in V\}$ est de deuxième catégorie et il a la propriété de Baire. Soit $I_2\subset I_1$ un intervalle ouvert dans lequel l'ensemble E est résiduel. Il existe un point $x_1\in F=I_2\cap(B-C)\cap D$. On a, d'une part,

(1) $$F(x_1,f(x_1))\geqslant a,$$

et d'autre part

$$F(x_1,f(x_0))<a-7/8n,$$

d'où il vient

$$F(x_1,f(x_1))<F(x_1,f(x_0))+1/8n<a-7/8n+1/8n<a,$$

en contradiction avec (1) et la démonstration est achevée.

THÉORÈME 6. *Il existe une fonction $F\colon R^2\to R$ qui n'est ni (B)sup-measurable ni sup-measurable, qui a la propriété de Baire, dont toutes les sections F^y sont boréliennes et telle qu'il existe pour tout point $y_0\in R$ et pour tout nombre $\varepsilon>0$ un ensemble ouvert $U\subset R$ de densité 1 au point y_0 et tel que, pour tout $x\in R$, on a $F(x,y)-F(x,y_0)<\varepsilon$ pour tout $y\in U$.*

Démonstration. Soient $C\subset[0,1]$ l'ensemble de Cantor, (α_n,β_n) $(n=1,2,\ldots)$ les composantes de l'ensemble $[0,1]-C$, N l'ensemble des nombres irrationnels et $g\colon N\xrightarrow{\text{sur}} C-\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\alpha_n,\beta_n\}$ une homéomorphie ([4], p. 349). Il existe deux ensembles A, B non mesurables et n'ayant pas la propriété de Baire, tels que $N=A\cup B$ et $A\cap B=\emptyset$. Posons

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & \text{lorsque } x\in N,\\ 0 & \text{lorsque } x\notin N\end{cases}$$

et

$$F(x,y)=\begin{cases}1 & \text{lorsque } x\in A \text{ et } y=f(x),\\ 0 & \text{lorsque } x\notin A \text{ ou bien } x\in A \text{ mais } y\neq f(x).\end{cases}$$

La fonction F satisfait à toutes les conditions exigées et la superposition $g(x)=F(x,f(x))$ n'est pas mesurable et ne possède pas la propriété de Baire.

THÉORÈME 7. *Si une fonction $F\colon R^2\to R$ est qualitativement semi-continue supérieurement (inférieurement) et s'il existe pour tout point $(x,y)\in R^2$ un ensemble $A(x,y)\subset R$ de deuxième catégorie au point y tel que la section partielle $F_x/A(x,y)$ est semi-continue inférieurement (supérieurement) au point y, la fonction F est (B)sup-mesurable.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que la fonction F ne soit pas (B)sup-mesurable. De même que dans la démonstration du théorème 1 on démontre l'existence d'une fonction $f\colon R\to R$ ayant la propriété de Baire, d'un nombre réel a, d'un intervalle ouvert I et d'un nombre naturel n tels que, pour tout intervalle ouvert $J\subset I$, chacun des deux ensembles

$$J\cap\{x\colon F(x,f(x))<a-1/n\}\quad\text{et}\quad J\cap\{x\colon F(x,f(x))\geqslant a\}$$

est de deuxième catégorie. Soit $x\in I$ un point tel que $F(x,f(x))<a-1/n$. La fonction F étant qualitativement semi-continue supérieurement au point $(x,f(x))$, il existe un ensemble plan A résiduel dans un rectangle ouvert $I_1\times I_2$, où $I_1\subset I$, contenant $(x,f(x))$ et tel que $F(u,y)<F(x,f(x))+1/8n$ pour tout point $(u,y)\in A$. L'ensemble $C=\{x\in I_1\colon$ la section $A_x=\{t\colon(x,t)\in A\}$ n'est pas résiduelle dans $I_2\}$ est de première catégorie. D'autre part, l'ensemble $E=I_1\cap\{x\colon F(x,f(x))\geqslant a\}$ est de deuxième catégorie, il existe donc un point $x_2\in E-C$ tel que $f(x_2)\in I_2$. D'après l'hypothèse de notre théorème il existe un ensemble $G\subset I_2$ de deuxième catégorie tel que

$$F(x_2,f(x))-F(x_2,y)<1/8n\quad\text{pour tout } y\in G.$$

Fixons un point $y_1\in G\cap A_{x_2}$. On a

(1) $$F(x_2,y_1)>F(x_2,f(x_2))-1/8n\geqslant a-1/8n,$$

et d'autre part, puisque $x_2\notin C$, le point $(x_2,y_1)\in A$ et par conséquent

$$F(x_2,y_1)<F(x,f(x))+1/8n<a-1/n+1/8n=a-7/8n,$$

en contradiction avec (1).

THÉORÈME 8. *Si toutes les sections F_x d'une fonction $F\colon R^2\to R$ sont qualitativement semi-continues inférieurement (supérieurement) et s'il existe pour tout point $(x,y)\in R^2$ un ensemble $A(x,y)$ ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie au point (x,y) tel que la fonction partielle $F/A(x,y)$ est* *semi-continue supérieurement (inférieurement) au point (x, y), la fonction F est (B)sup-mesurable.*

Démonstration. Supposons, au contraire, que la fonction F ne soit pas (B)sup-mesurable. Il existe donc une fonction $f: R \to R$ ayant la propriété de Baire, un nombre réel a, un nombre naturel n, un intervalle ouvert d'extrémités rationnelles U, un intervalle ouvert I et deux ensembles A et B, chacun de deuxième catégorie dans tout intervalle ouvert $J \subset I$, tels que

$$A \subset \{x\colon F(x, f(x)) < a - 1/n\}, \qquad B \subset \{x\colon F(x, f(x)) \geqslant a\}$$

et $F(x, f(x)) - F(x, y) < 1/8n$ pour tout $x \in B$ et pour tout y appartenant à un ensemble $C(x)$ (dépendant de x) résiduel dans U. Fixons un point $x_1 \in A \cap I$. On a $F(x_1, f(x_1)) < a - 1/n$. D'après l'hypothèse de notre théorème, il existe un ensemble $A(x_1, f(x_1)) \subset I \times U$ ayant la propriété de Baire, de deuxième catégorie et tel que $F(x, y) < F(x_1, f(x_1)) + 1/8n$ pour tout point $(x, y) \in A(x_1, f(x_1))$. Puisque l'ensemble $A(x_1, f(x_1)) \subset I \times U$ est de deuxième catégorie et possède la propriété de Baire et que, pour tout point $x \in B$, l'ensemble $C(x)$ est résiduel dans U, il existe un point $(x_2, y_2) \in A(x_1, f(x_1))$ tel que $x_2 \in B$ et $y_2 \in C(x_2)$. On a donc, d'une part,

(1) $$F(x_2, y_2) < F(x_1, f(x_1)) + 1/8n < a - 1/n + 1/8n = a - 7/8n,$$

et d'autre part

$$F(x_2, y_2) > F(x_2, f(x_2)) - 1/8n \geqslant a - 1/8n,$$

en contradiction avec (1) et la démonstration est achevée.

Théorème 9. *Si toutes les sections F_x d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ sont semi-continues supérieurement et toutes les sections F^y sont telles qu'il existe pour tout point (x, y) un ensemble $A(x, y)$ qui a la propriété de Baire et qui est de deuxième catégorie au point y et tel que la section partielle $F^y/A(x, y)$ est semi-continue inférieurement au point y, la fonction F est (B)sup-mesurable.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité on peut supposer que la fonction F est bornée, sinon on pourrait considérer la fonction $\operatorname{arctg} F$. Posons, pour $k = 1, 2, \ldots,$

$$M_k(x_0, y_0) = \sup_{y_0 - 1/k \leqslant y \leqslant y_0 + 1/k} F(x_0, y).$$

Toutes les sections F_x étant semi-continues supérieurement, on a $F(x, y) = \lim_{k \to \infty} M_k(x, y)$.

Pour établir notre théorème il suffit donc de démontrer que chaque fonction M_k satisfait à l'hypothèse du théorème 8. Fixons un nombre naturel k et remarquons, de la même façon que dans la démonstration du théorème

31 du travail [2], que toutes les sections $(M_k)_x$ sont semi-continues supérieurement. Fixons un point (x, y), un rectangle ouvert $I \times J$ contenant (x, y) et un nombre $\varepsilon > 0$. Il résulte de la définition $M_k(x, y)$ qu'il existe un point $y_1 \in [y - 1/k, y + 1/k]$ tel que

(1) $$F(x, y_1) > M_k(x, y) - \varepsilon/2.$$

D'après l'hypothèse de notre théorème il existe un ensemble $E \subset I$ ayant la propriété de Baire et de deuxième catégorie et tel que, pour tout point $u \in E$, on a

(2) $$F(u, y_1) > F(x, y_1) - \varepsilon/2.$$

Désignons par β la distance du point y_1 à la frontière de l'intervalle $[y - 1/k, y + 1/k]$. Comme $y_1 \in (v - 1/k, v + 1/k)$ pour tout point $v \in (y - \beta, y + \beta)$, on a

(3) $$M_k(u, v) \geqslant f(u, y_1) \quad \text{pour tout point } v \in [y - \beta, y + \beta].$$

De (1), (2) et (3) il vient

$$M_k(u, v) > M_k(x, y) - \varepsilon$$

pour tout point $(u, v) \in E \times [y - \beta, y + \beta]$. Mais l'ensemble $E \times [y - \beta, y + \beta] \subset I \times J$ a la propriété de Baire et il est de deuxième catégorie, la démonstration est donc achevée.

Théorème 10. *Soit $F\colon R^2 \to R$ une fonction et α un nombre tel que $0 < \alpha < 1$. S'il existe pour tout point (x, y) deux ensembles $A(x, y) \subset R^2$ et $B(x, y) \subset R$ tels que:*

(1) *l'ensemble $A(x, y)$ est mesurable et $(x, y) \in A(x, y)$;*
(2) *la densité inférieure de l'ensemble $A(x, y)$ au point (x, y) (par rapport à la base ordinaire v [5]) est supérieure à α;*
(3) *la fonction partielle $F/A(x, y)$ est semi-continue inférieurement au point (x, y);*
(4) *$y \in B(x, y)$ et la densité extérieure inférieure de l'ensemble $B(x, y)$ au point y est supérieure à $1 - \alpha$;*
(5) *la section partielle $F_x/B(x, y)$ est semi-continue supérieurement au point y;*

alors la fonction F est sup-mesurable.

Démonstration. Supposons, au contraire, que la fonction F ne soit pas sup-mesurable. Il existe donc une fonction mesurable $f\colon R \to R$, un nombre réel a, un nombre naturel n et un ensemble mesurable $A \subset R$, de mesure positive finie, tels que, pour tout ensemble mesurable $B \subset A$ de mesure positive, la mesure extérieure de chacun des deux ensembles

$$\{x \in R\colon F(x, f(x)) < a - 1/n\} \cap B \quad \text{et} \quad \{x \in R\colon F(x, f(x)) \geqslant a\} \cap B$$

est positive. En appliquant une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 1 on démontre l'existence d'un intervalle ouvert $U \subset R$, d'un ensemble mesurable $C \subset A$ de mesure positive et de deux ensembles disjoints $D, E \subset C$ tels que $m^*(D) = m^*(E) = m(C)$ (m^* désigne la mesure extérieure de Lebesgue) et on voit que, quel que soient le point $x \in D$ et l'intervalle ouvert $V \subset U$ contenant $f(x)$, on a

(a) $m^*\big(B(x, f(x)) \cap V\big)/m(V) > 1-\alpha+\eta$, où $\eta > 0$:

(b) $F(x, y) < a-1/n$ pour tout $y \in B(x, f(x))$; et

(c) $F(x, f(x)) \geqslant a$ pour tout point $x \in E$.

Soit $x_0 \in E$ un point de densité de l'ensemble C. Soient I un intervalle ouvert contenant x_0 et $V \subset U$ un intervalle ouvert tels que $f(x_0) \in V$,

(d) $m^*(\{x\colon x \in D \text{ et } f(x) \in I\})/m(I) > 1-\eta_1$, où $\eta_1 > 0$ et $(1-\eta_1)(1-\alpha+\eta) > 1-\alpha$;

(e) $m(I) = m(V)$;

(f) $m_2\big(A(x_0, f(x_0)) \cap (I \times V)\big)/m_2(I \times V) > \alpha+\eta_2$, où $\eta_2 > 0$ et m_2 désigne la mesure de Lebesgue dans R^2;

(g) $F(x, y) > a-1/8n$ pour tout point $(x, y) \in A(x_0, f(x_0)) \cap (I \times V)$.

Il résulte de (a), (d), (e), et (f) qu'il existe un point

$$(x_1, y_1) \in \big(D \times B(x_1, f(x_1))\big) \cap A(x_0, f(x_0)) \cap (I \times V).$$

On a donc, d'après (b)

$$F(x_1, y_1) < a-1/n,$$

en contradiction avec (g).

Théorème 11. *Admettons l'hypothèse du continu. Il existe une fonction $F\colon R^2 \to R$ (B)sup-mesurable qui n'a pas la propriété de Baire.*

Démonstration. En appliquant la même méthode que dans la démonstration du théorème 1 de l'article [3] on démontre l'existence d'un ensemble $A \subset R^2$ qui ne possède pas la propriété de Baire et qui coupe le graphe de toute fonction borélienne $f\colon R \to R$ au plus en un ensemble dénombrable. En posant

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{lorsque } (x, y) \notin A \end{cases}$$

on vérifie, de même que dans la démonstration du théorème 2 de l'article [3], que la fonction F est (B)sup-mesurable et n'a pas la propriété de Baire.

Problème 3. L'existence d'une fonction $F\colon R^2 \to R$ qui n'a pas la propriété de Baire et qui est (B)sup-mesurable implique-t-elle l'axiome de Martin?

Travaux cités

[1] C. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Leipzig-Berlin 1927.

[2] Z. Grande, *La mesurabilité des fonctions de deux variables et de la superposition $F(x, f(x))$*, Dissertationes Math. 159 (1978), pp. 1–50.

[3] — et J. S. Lipiński, *Un exemple d'une fonction sup-mesurable qui n'est pas mesurable*, Colloq. Math. 39 (1978), pp. 77–79.

[4] K. Kuratowski, *Topologie I*, Warszawa 1958.

[5] S. Saks, *Theory of the Integral*, Warszawa 1937.

[6] J. W. Szragin, *Les conditions de la mesurabilité de la superposition* (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR 197 (1971), pp. 295–298.

[7] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), pp. 1–54.

Received 26 January 1981