[13] J. Silver, *On the singular cardinals problem*, Proc. Int. Congr. Math. Vancouver 1974, Vol. 1, pp. 265–268.
[14] R. Solovay, W. Reinhardt and A. Kanamori, *Strong axioms of infinity and elementary embeddings*, Ann. Math. Logic 13 (1978), pp. 73–116.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
RUTGERS UNIVERSITY
Newark, New Jersey 07102

Received 9 February 1981

Relation entre le rang U et le poids

par

Daniel Lascar (Paris)

Abstract. Let T be a superstable theory; we prove, in T^{eq} (see [S]) that a regular type is non-orthogonal to a regular type whose U-rank is of the form ω^{α}. If $U(p) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$, then its weight is at most $\sum_{i=1}^{k} n_i$.

I. Introduction. Dans tout cet article on supposera que T est une théorie complète et superstable.

La notion de poids (voir les rappels) semble être trés importante lorsqu'on essaie de classifier les modèles d'une théorie superstable, et indispensable lorsqu'on s'intèresse aux modèles dénombrables. Dans [L1] on borne le poids $w(p)$ du type p en fonction du developpement de Cantor de son rang U: si

$$U(p) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

alors

$$w(p) \leqslant (n_1+1)(n_2+1)\ldots(n_k+1).$$

On va raffiner cette inégalité en montrant que $w(p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} n_i$. En fait cette relation est la meilleure possible. On verra aussi quelques relations entre le developpement de Cantor, la régularité et l'orthogonalité. Une autre motivation qui nous a poussé à écrire cet article est qu'on y fait usage du théorème de la base canonique (cf. [S], chapitre III) et qu'à notre connaissance, il n'en existe nulle part, hors du livre de Shelah, d'application ou même de référence.

On supposera que le lecteur posséde des connaissances générales sur la stabilité (comme il peut les acquérir dans [LP] ou [S] par exemple). De plus on utilisera le rang U (voir [L1]), la notion de poids (chapitre V de [S], ou [L2]), et les éléments imaginaires (chapitre III de [S]). Le paragraphe suivant est consacré à rappeler les faits essentiels sur ces trois points. Les notations sont celles qui sont habituelles (celles de [L2] par exemple). Par rang, nous voulons toujours dire rang U.

II. Rappels.

1. Le rang U a été introduit dans [L1]. Il peut être défini par induction sur l'ordinal α par: $U(p) \geqslant \alpha+1$ si et seulement si il existe une extension bifurquante p' de p telle que $U(p') \geqslant \alpha$.

Tout ordinal β peut s'écrire d'une façon et d'une seule sous la forme

$$\beta = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ est une suite d'ordinaux strictement décroissante et où les n_i sont des entiers non nuls. Cette expression est appelée la *décomposition de Cantor de l'ordinal* β.

Si

$$\beta_1 = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

et

$$\beta_2 = \omega^{\alpha_1} m_1 + \omega^{\alpha_2} m_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} m_k$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ est une suite d'ordinaux strictement décroissante (mais où les m_i et n_i peuvent être nuls de façon à obtenir une ecriture commune de β_1 et β_2) alors, par définition, la somme naturelle $\beta_1 \oplus \beta_2$ de β_1 et β_2 est l'ordinal $\omega^{\alpha_1}(n_1+m_1) + \omega^{\alpha_2}(n_2+m_2) + \ldots + \omega^{\alpha_k}(n_k+m_k)$.

On a alors les inégalités suivantes:

$$U(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) + U(\bar{b}/A) \leqslant U(\bar{a}^\frown \bar{b}/A) \leqslant U(\bar{a}/A \cup \{\bar{b}\}) \oplus U(\bar{b}/A)$$

de plus si $\bar{a}$ et $\bar{b}$ sont A-indépendants

$$U(\bar{a}^\frown \bar{b}/A) = U(\bar{a}/A) \oplus U(\bar{b}/A).$$

D'autre part il est clair que $U(a^\frown \bar{b}/A) = U(\bar{b}^\frown \bar{a}/A)$, et ceci nous permettra de parler du rang d'un ensemble fini; de plus, les inégalités mentionnées ci-dessus montre que si $B_0 \subseteq B$, et si tout point de B est algèbrique sur $B_0 \cup A$, alors $U(B_0/A) = U(B/A)$ ce qui nous permettra de parler de $U(B/A)$ même si B n'est pas fini mais qu'il est algèbrique sur un ensemble fini.

2. La notion de poids provient du fait suivant (voir [S], chapitre V, ou [L1]): soit $p \in S(A)$; alors il existe un entier n tel que si $t(\bar{a}/A) = p$ et si B est un ensemble A-libre tel que pour tout $b \in B$, b et $\bar{a}$ ne sont pas A-indépendants, alors $|B| \leqslant n$. Le poids de p est par définition le plus petit entier n correspondant à une extension non bifurquante de p sur un modéle $\varkappa_1$-saturé; il est noté $w(p)$; cet entier $w(p)$ convient aussi pour n'importe quelle extension non-bifurquante de p.

On peut aussi introduire cette notion de la façon suivante: on dira que *a domine b* au dessus de A si pour tout c, c et b sont A-indépendants aussitôt que a et c le sont ([L2]). Si p et q sont des types sur un modèle M, $\varkappa_1$-saturé, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

1) toute extension élémentaire $\varkappa_1$-saturé de M réalisant p réalise q,

2) il existe a et b, réalisant respectivement p et q tels que a domine b au dessus de M.

On ecrira $p \rhd q$ pour exprimer que les conditions précédantes sont satisfaites; les types p et q sont $\rhd$-équivalents ($p \sim q$) si $p \rhd q$ et $q \rhd p$. Les types réguliers sont minimaux pour l'ordre $\rhd$ (on dit que p est régulier si, pour tout B, toute extension non bifurquante de p sur B est orthogonale à toute extension bifurquante de p). En fait, les $\rhd$-minimaux sont exactement ceux qui sont $\rhd$-équivalents à un type régulier.

Tout type se décompose en un produit de types réguliers: soient M un modèle $\varkappa_1$-saturé et a dans une extension de M; alors il existe un ensemble fini B, M-libre, dont tout les éléments réalisent un type régulier sur M, et tel que B domine a et a domine B au dessus de M. De plus la cardinalité de B ne dépend que de $t(a/M)$, et c'est exactement son poids; par exemple les types de poids 1 sont exactement les $\rhd$-minimaux.

3. Nous nous servirons beaucoup ici des éléments imaginaires; nous renvoyons au chapitre III de [S] pour la définition exacte de T^{eq}. En gros, on ajoute pour chaque entier n et chaque $E(x, y)$, relation d'équivalence définissable sur les n-uples, un prédicat P_E dont les éléments sont précisement les classes modulo E. Remarquons en passant qu'il n'y a pas lieu de distinguer entre éléments et suites finies lorsqu'on travaille dans T^{eq}.

Le fait remarquable est que chaque type stationnaire a alors un ensemble minimum de définition: les propriétés suivantes se trouvent dans [S] ou en découlent facilement. On dit que l'élément a est définissable sur A si il existe une formule $\varphi(x)$ à paramètres dans A dont a soit l'unique solution; la clôture définissable de A, notée $\mathrm{dcl}(A)$ est l'ensemble des points définissables sur A. On remarque que $\mathrm{dcl}(\mathrm{dcl}(A)) = \mathrm{dcl}(A)$; d'autre part se donner un type sur A est équivalent à se donner un type sur $\mathrm{dcl}(A)$.

Soit maintenant p un type stationnaire sur A et $B \subseteq A$; on dit que B est un ensemble de définition de p si p est l'unique extension non bifurquante de $p \restriction B$; alors, dans T^{eq}, si p est un type stationnaire sur $A = \mathrm{dcl}(A)$, il existe un unique sous ensemble B de A tel que $B = \mathrm{dcl}(B)$, B est un ensemble de définition de p et est définissable sur tout autre ensemble de définition de p. Cet ensemble sera noté $\mathrm{Cb}(p)$, la base canonique de p. Il est clair que si p' est une extension non bifurquante de p, alors $\mathrm{Cb}(p') = \mathrm{Cb}(p)$. D'autre part si $C \subseteq A$ et p ne bifurque pas sur C, alors $\mathrm{Cb}(p)$ est algébrique sur C: comme on suppose T superstable, il existe un ensemble fini C tel que ceci soit vrai, et on pourra parler de $U(\mathrm{Cb}(p))$.

Soit $I = \{a_i;\ i \in \omega\}$ un ensemble indiscernable; le type moyen de I sur A, noté $\mathrm{Av}(I;\ A)$ est le type complet p sur A défini par: $\varphi(x, \bar{a}) \in p$ si et seulement si $\{i \in \omega;\ \models \varphi(a_i, \bar{a})\}$ est cofini. On voit alors que si $I \subseteq A$, $\mathrm{Cb}(\mathrm{Av}(I;\ A)) \subseteq \mathrm{dcl}(I)$.

On utilisera la technique suivante pour construire des ensembles d'indiscernables au dessus de A: soit $M \supseteq A$ et $p \in S(M)$, p non algébrique; on construit une suite libre $(a_i;\ i \in \omega)$ où chaque a_i réalise p, puis on oublie M: on dira alors que $I = (a_i;\ i \in \omega)$ est une suite d'indiscernables correspondant à p. Dans ce cas $\mathrm{Av}(I;\ M \cup I)$ est aussi bien définissable sur M (c'est une extension non bifurquante de p) que sur I; donc $\mathrm{Cb}(p) = \mathrm{Cb}(\mathrm{Av}(I;\ M \cup I))$ est inclus dans $M \cap \mathrm{dcl}(I)$; l'ensemble I est libre au dessus de $\mathrm{Cb}(p)$ et pour tout i

$$U(a_i/\mathrm{Cb}(p)) = U(p) = U(\mathrm{Av}(I;\ M \cup I)).$$

III. Régularité. Notre premier but est de montrer que les types de poids 1 sont exactement ceux qui sont $\rhd$-équivalents à un type dont le rang est de la forme ω^α.

PROPOSITION 1. *Soient p et q deux types sur A et supposons que $U(p) = \omega^\alpha$ et $U(q) < \omega^\alpha$; alors p est orthogonal à q.*

Preuve. On peut tout d'abord supposer que A est un modèle $\varkappa_1$-saturé; soient pour obtenir une contradiction, a et b réalisant respectivement p et q et non A-indépendants. Alors:

$$\omega^\alpha = U(a/A) \leqslant U(a^\frown b/A) \leqslant U(a/A \cup \{b\}) \oplus U(b/A)$$

or $U(a/A \cup \{b\}) < \omega^\alpha$, $U(b/A) < \omega^\alpha$, donc $U(a^\frown b/A) < \omega^\alpha$, ce qui est impossible.

COROLLAIRE 2. *Si $U(p) = \omega^\alpha$, alors p est régulier.*

COROLLAIRE 3. *Si $p \sim q$ et $U(q) = \omega^\alpha$, alors $w(p) = 1$.*

Nous allons maintenant montrer la réciproque du corollaire 3. Auparavant on doit remarquer que celle ci est fausse à proprement parler: soit T la théorie d'une relation d'équivalence ayant une infinité de classes dont chacune est infinie et soit M un modèle $\varkappa_1$-saturé de T. On voit facilement que si p est le type d'un élément a qui n'est équivalent à aucun point de M, alors $U(p) = 2$. Or p est régulier et si $p \sim p'$, alors $p = p'$. Cela semble ruiner nos espoirs.

Mais si on rajoute les éléments imaginaires et si on travaille dans T^{eq}, alors q le type de la classe de a est $\rhd$-équivalent à p et $U(q) = 1$. En fait ceci est général:

PROPOSITION 4 (dans T^{eq}). *Soient M un modèle $\varkappa_1$-saturé, $p \in S(M)$ et supposons que $w(p) = 1$; alors il existe $q \in S(M)$ et un ordinal α tel que $p \sim q$ et $U(q) = \omega^\alpha$.*

Preuve. Soit q un type $\rhd$-équivalent à p dont le rang est minimum; nous affirmons d'abord:

LEMME. *Si $r \in S(M)$ et $U(r) < U(q)$, alors r et q sont orthogonaux.*

Supposons le contraire: on peut réaliser q et r en a et b respectivement et exiger de plus que a et b ne soient pas M-indépendants. Soit A fini, $A \subseteq M$ tel que $t(a^\frown b/M)$ ne bifurque pas au dessus de A, et considérons M' un modèle $\varkappa_1$-saturé contenant $M \cup \{a\}$ et dominé par a au dessus de M (proposition 5.3.3 de [L2]). Il existe $b' \in M'$ tel que $t(a^\frown b/A) = t(a^\frown b'/A)$; mais ceci implique que $b' \notin M$, et par $\rhd$-minimalité de q, que $t(b'/M) \sim q$. Or $U(b'/M) \leqslant U(b'/A) = U(b/A) = U(r) < U(q)$, ce qui contredit la minimalité de $U(q)$ et démontre le lemme.

On peut écrire $U(q)$ sous la forme $\omega^\alpha n + \beta$, avec $n \neq 0$ et $\beta < \omega^\alpha$. Montrons d'abord que $\beta = 0$: sinon il existe une extension bifurquante p_1 de p sur un modèle $M_1 \succ M$, dont le rang est précisement $\omega^\alpha n$. Soient $I = \{a_i;\ 1 \leqslant i < \omega\}$ la suite d'indiscernables correspondant à p_1 et $p' = \mathrm{Av}(I;\ M \cup I)$. Alors $U(p') = \omega^\alpha n$ et on sait qu'il existe un entier k tel que p_1 est définissable sur $M \cup \{a_i;\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$; soit $A = \mathrm{Cb}(p_1)$; alors A est algèbrique sur $M \cup \{a_i;\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$, et pour tout i

$$U(a_i/M \cup A) = \omega^\alpha n$$

et les a_i sont $M \cup A$-indépendants. Donc:

$$U((a_1, a_2, \ldots, a_k)/M \cup A) = \omega^\alpha kn$$

et

$$U(\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \cup A/M) \geqslant U(A/M) + \omega^\alpha kn. \tag{1}$$

Or pour $i = 1, 2, \ldots, k$

$$U(a_i/M \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}) \leqslant \omega^\alpha n + \beta.$$

Donc

$$U((a_1, a_2, \ldots, a_k)/M) \leqslant \omega^\alpha kn + \beta k.$$

En remarquant que $U(A/M \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = 0$, on voit que

$$U((a_1, a_2, \ldots, a_k) \cup A/M) \leqslant \omega^\alpha kn + \beta k. \tag{2}$$

Les inégalités (1) et (2) montrent que $U(A/M) < \omega^\alpha \leqslant U(q)$, et d'aprés le lemme, a_1 et A devraient être indépendants, ce qui n'est pas le cas.

Reste à montrer que $n = 1$; pour cela on a besoin d'une généralisation du lemme, dont nous laissons la démonstration au lecteur:

LEMME. *Soient $B \supseteq M$, q_1 l'héritier de q sur B, et $r \in S(B)$ tel que $U(q_1) > U(r)$; alors r et q_1 sont orthogonaux.*

Supposons donc $n \geqslant 2$, et soit p_1 une extension de p sur un modèle M_1 dont le rang est $\omega^\alpha(n-1)$; comme précédemment, construisons un ensemble $I = \{a_i;\ i \in \omega\}$ d'indiscernables correspondant à p_1, et soit $A = \mathrm{Cb}(p_1)$. Alors A est algèbrique sur $M \cup \{a_i;\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$, et soit m, $1 \leqslant m \leqslant k$, le plus petit entier tel que $U(a_{m+1}/M \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}) \neq \omega^\alpha n$ (remarquons que $U(a_1/M) = \omega^\alpha n$ tandis que $U(a_{k+1}/M \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) = \omega^\alpha(n-1)$. Posons $B = M \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$; alors

$$U(a_m/B) = \omega^\alpha n$$

et pour $m < r < k$

$$\omega^\alpha(n-1) \leqslant U(a_r/B \cup \{a_m, \ldots, a_{r-1}\}) < \omega^\alpha n$$

et donc

$$U((a_m, \ldots, a_k)/B) = \omega^\alpha(n+(k-m)(n-1))+\beta \quad \text{avec} \quad \beta < \omega^\alpha.$$

Puisque A est algèbrique sur $B \cup \{a_m, \ldots, a_k\}$ on a

$$(1) \qquad U(A \cup \{a_m, \ldots, a_k\}/B) = \omega^\alpha(n+(k-m)(n-1))+\beta;$$

d'autre part

$$U((a_m, \ldots, a_k)/B \cup A) = \omega^\alpha(n-1)(k-m+1) = \omega^\alpha(n+(k-m)(n-1)-1)$$

donc

$$(2) \qquad U(A \cup \{a_m, \ldots, a_k\}/B) \geqslant \omega^\alpha(n+(k-m)(n-1)-1)+U(A/B)$$

et de (1) et (2) on tire

$$U(A/B) < \omega^\alpha \cdot 2.$$

Or $t(a_m/B)$ est l'héritier de q, et il n'est pas orthogonal à $t(A/B)$; donc d'aprés le lemme, $\omega^\alpha n = U(a_m/B) < \omega^\alpha \cdot 2$, et $n = 1$.

IV. Poids. Nous travaillons maintenant dans T^{eq}; mais les propositions 5, 6, et 7 reste évidemment valables dans T.

PROPOSITION 5. *Soit* $U(p) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$ *le developpement de Cantor de* $U(p)$; *alors* $w(p) \leqslant \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Preuve. On peut supposer que $p \in S(M)$ où M est un modèle $\varkappa_1$-saturé. On peut alors décomposer p en un produit de types réguliers, et même par la proposition 4 en produit de types dont le rang est de la forme ω^α. Soient donc a une réalisation de p et B un ensemble de cardinalité $w(p)$, M-libre tel que a domine B et B domine a au dessus de M, et on sait de plus que pour tout $b \in B$, $U(b/M)$ est de la forme ω^α.

Si $b \in B$ et $U(b/M) = \omega^\alpha$, alors α est l'un des α_i: supposons le contraire; on peut écrire $U(p) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} n_m + \beta$ avec $\alpha_m > \alpha$ et $\beta < \omega^\alpha$. Puisque $U(b/M \cup \{a\}) < \omega^\alpha$, on voit que $U((a, b)/M) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} n_m + \gamma$ avec $\gamma < \omega^\alpha$. Si on suppose $U(a/M \cup \{b\}) \geqslant \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} n_m$, alors $U((a, b)/M) \geqslant \omega^{\alpha}{}_1 n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} n_m + \omega^\alpha$ ce qui est contradictoire; si on suppose le contraire, on a

$$U((a, b)/M) \leqslant U(b/M) \oplus U(a/M \cup b) \leqslant \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m} n_m$$

ce qui est encore contradictoire.

On est donc obligé d'admettre qu'il existe un entier m, $1 \leqslant m \leqslant k$, tel

que $\alpha_m = \alpha$. Un raisonnement ressemblant au précédant montre alors que

$$U(a/M \cup \{b\}) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_m}(n_m - 1) + \delta \quad \text{avec} \quad \delta < \omega^{\alpha_m}.$$

En itérant, on voit qu'il y a au plus n_m points dans B dont le rang est ω^{α_m}; l'inégalité $|B| \leqslant \sum_{i=1}^{k} n_i$ en découle.

Dans T^{eq} la proposition 5 a une réciproque: si M est $\varkappa_1$-saturé, $p \in S(M)$ et $w(p) = n$, alors il existe $q \sim p$ tel que $U(q) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$ et $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Pour cela, il suffit de décomposer p en un produit de types dont le rang est de la forme ω^α.

Comme corollaire de la démonstration précédente, on obtient:

PROPOSITION 6. *Supposons que* $U(p) = \omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_k} n_k$, $U(q) = \omega^{\beta_1} m_1 + \ldots + \omega^{\beta_j} m_j$ *et que* p *et* q *ne sont pas orthogonaux; alors* $\{\alpha_i;\ 1 \leqslant i \leqslant k\} \cap \{\beta_i;\ 1 \leqslant i \leqslant j\} \neq \emptyset$.

Preuve. On peut supposer que p et q sont des types sur un modèle M $\varkappa_1$-saturé. On sait (proposition 6.12 de [L2]) qu'il existe $r \in S(M)$ régulier tel que $p \rhd r$ et $q \rhd r$. Grâce à la proposition 4, on peut supposer que $U(r)$ est de la forme ω^γ et avec la preuve de la proposition 5, on voit que $\gamma \in \{\alpha_i;\ 1 \leqslant i \leqslant k\} \cap \{\beta_i;\ 1 \leqslant i \leqslant j\}$.

Le lecteur que ce genre de démonstration amuse pourra montrer

PROPOSITION 7. *Soient* $p \sim q$ *et* $U(q) = \omega^\alpha$; *alors la décomposition de Cantor de* $U(p)$ *est de la forme* $\omega^{\alpha_1} n_1 + \ldots + \omega^{\alpha_{k-1}} n_{k-1} + \omega^\alpha n_k$.

Bibliographie

[L1] D. Lascar, *Ranks and definability in superstable theories*, Israel J. Math. 23 (1) (1976), pp. 53–87.

[L2] — *Ordre de Rudin Keisler et poids dans les théories ω-stables*, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 28 (1982), p. 413–430.

[LP] — et B. Poizat, *An introduction to forking*, J. Symb. Logic. 44 (3) (1979), pp. 330–350.

[S] S. Shelah, *Classification Theory and the number of non-isomorphic models*, North-Holland, Amsterdam 1978.

UNIVERSITÉ PARIS VII
U.E.R. DE MATHÉMATIQUES
2 Place Jussieu
75221 Paris Cedex 05

Received 22 March 1981