Remarque sur les images continues d'ensembles.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

La remarque suivante concerne un problème de M. Banach et se rattache à l'ouvrage précédent de M. Hurewicz.

Je prouve notamment *l'existence d'un ensemble plan E, non-mesurable, dont toute image continue I situe sur la droite est une différence de deux ensembles fermés.*

Soit A un ensemble non-mesurable (superficiellement) situé dans un carré (aux côtés parallèles aux axes). Soit B l'ensemble formé des segments verticaux (contenus dans le carré) à abscisse rationnelle et des segments horizontaux à ordonnée rationnelle. L'ensemble B étant de mesure nulle, la somme $E = A + B$ est un ensemble non-mesurable.

D'autre part, B étant *connexe* (au sens de Lennes-Hausdorff), l'inclusion $B \subset E \subset \bar{B}$ entraîne [1]) que E est connexe également. Or, la connexité étant un invariant des transformations continues [2]), toute image continue I de E est connexe. Si l'on suppose que I est situé sur la droite, I, comme ensemble connexe, est une différence de deux ensembles fermés; il n'y a, en effet, sur la droite, que les ensembles suivants qui soient connexes: la droite entière, le rayon fermé ou ouvert, l'intervalle fermé, l'intervalle dépourvu d'une ou de deux extrémités, le point; tous ces ensembles sont des différences de deux ensembles fermés, c. q. f. d.

[1]) selon un théorème de M. Hausdorff (*Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 246, théor. IV).

[2]) ibid. p. 363, théor. IV.

Sur un problème de M. Menger.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

1. Un ensemble séparable de dimension n est d'après M. Menger [1]) „faiblement de dimension n" (schwach n-dimensional) si l'ensemble de points, où il est de dimension n, est de dimension $n-1$. M. Menger pose le problème suivant: l'ensemble-somme d'un nombre fini (resp. d'une infinité dénombrable) d'ensembles dont chacun est fermé relativement à l'ensemble-somme et „faiblement de dimension n", est-il „faiblement de dimension n"?

Je vais montrer que pour $n = 1$ la réponse est négative.

2. Pour le cas d'une infinité dénombrable cette réponse est contenue implicitement dans ma note: *Sur les ensembles quasi-connexes* [2]).

En effet, l'ensemble A qui y est defini par la relation (9) est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k)$, $k = 1, 2, \dots$ dont chacun est homéomorphe à l'ensemble de M. Sierpiński, donc faiblement de dimension 1. En utilisant la relation (12), on démontre facilement que $E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k)$ est fermé (rel. A). D'autre part A est de dimension 1 dans chacun de ses points.

3. Je me propose maintenant de démontrer l'existence de deux ensembles B_1 et B_2 tels que:

I. *B_1 et B_2 sont fermés (rel. $B_1 + B_2$).*

II. *B_1 et B_2 sont faiblement de dimension 1.*

III. *$B_1 + B_2$ n'est pas faiblement de dimension 1.*

4. Supposons fixé un système de coordonnées cartesiennes ξ, η. Désignons:

[1]) Akad. Anzeiger d. Akademie d. Wissenschaften in Wien Nr. 1, 12/1, 1928.

[2]) Fund. Math. II, p. 201—205.

par $R(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ le rectangle determiné par les droites: $\xi = \alpha$, $\xi = \beta$, $\eta = \gamma$, $\eta = \delta$,

par p, q, r respectivement les trois points: $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{2}$; $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = 0$; $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = 1$,

par $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ respectivement les quatre segments:

$$\begin{aligned} 0 \leqq \xi \leqq \tfrac{1}{2}, &\quad \eta = 0 \\ \tfrac{1}{2} \leqq \xi \leqq 1, &\quad \eta = 0 \\ 0 \leqq \xi \leqq \tfrac{1}{2}, &\quad \eta = 1 \\ \tfrac{1}{2} \leqq \xi \leqq 1, &\quad \eta = 1 \end{aligned}$$

par E l'ensemble de M. Sierpiński [1]),

par U l'ensemble $E + q + r$,

par Γ la projection de U sur l'axe des ξ, enfin.

par Γ_1 l'ensemble de tous les points (ξ, η) tels que $\xi \varepsilon \Gamma$, $0 \leqq \eta \leqq 1$.

5. De la définition de U et des recherches de M. Sierpiński résultent les propriétés suivantes de U que nous utiliserons dans la suite:

(c_1) L'ensemble de points, où U est de dimension 1, est dénombrable,

(c_2) Γ est parfait non dense,

(c_3) Si la frontière d'un domaine plan ne contient aucun point de U et si ce domaine contient un des trois points: p, q, r, il contient aussi les deux autres.

(c_4) on a les relations:

$$U \times (S^{(1)} + S^{(2)}) = U \times S^{(2)}; \quad U \times (T^{(1)} + T^{(2)}) = U \times T^{(1)}$$
$$\text{et} \quad (\overline{U} - U) \times S^{(1)} = (\overline{U} - U) \times T^{(2)} = 0.$$

6. D'après **5** (c_2), on peut déterminer une suite d'intervalles: $\alpha_i \leqq \xi \leqq \beta_i$ de la manière suivante:

(d_1) $0 < \alpha_i < \beta_i < 1$,

(d_2) $\lim\limits_{i=\infty} (\beta_i - \alpha_i) = 0$,

(d_3) les intervalles $\alpha_i \leqq \xi \leqq \beta_i$, $\alpha_k \leqq \xi \leqq \beta_k$, où $i \neq k$, sont sans points communs,

(d_4) l'intervalle $\alpha_i \leqq \xi \leqq \beta_i$ ne contient aucun point de Γ,

(d_5) l'ensemble d'accumulation de la suite $\{\alpha_i \leqq \xi \leqq \beta_i\}$ est identique à Γ.

1) *Sur les ensembles connexes et non connexes*, Fund. Math. II, p. 81—88.

7. Considérons la transformation:

$$(1) \qquad \xi' = \alpha_i + (\beta_i - \alpha_i)\,\xi \qquad \eta' = \frac{k+\eta}{2i} \qquad k = 0, 2, \ldots, 2i-1.$$

Désignons par R_{ik}, p_{ik}, q_{ik}, r_{ik}, $S^{(1)}_{ik}$, $S^{(2)}_{ik}$, $T^{(1)}_{ik}$, $T^{(2)}_{ik}$, U_{ik} les transformés de $R(0, 1, 0, 1)$, p, q, r, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, U — respectivement. R_{ik} est évidemment le rectangle $R\left(\alpha_i, \beta_i \frac{k}{2i}, \frac{k+1}{2i}\right)$. Les propositions **5** (c_1), (c_2), (c_3), (c_4) sont encore vraies si on ajoute à chaque symbole p, q, r, $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, U les indices i, k.

On aura de plus les relations suivantes:

$$(2) \qquad q_{i,k+1} = r_{i,k}; \quad S^{(1)}_{i,k+1} = T^{(1)}_{i,k}; \quad S^{(2)}_{i,k+1} = T^{(2)}_{i,k}$$

et, en tenant compte de **6** (d_3):

$$(3) \qquad \begin{aligned} R_{i,k} \times R_{i,k+1} &= S^{(1)}_{i,k+1} + S^{(2)}_{i,k+1} = T^{(1)}_{i,k} + T^{(2)}_{i,k}, \\ R_{i,k} \times R_{j,l} &= 0 \quad \textit{pour } i \neq j \textit{ et pour } i = j,\ |k - l| \neq 1. \end{aligned}$$

D'après (d_4) on aura:

$$(4) \qquad R_{i,k} \times \Gamma_1 = 0.$$

8. Comme

$$(5) \qquad \overline{U}_{i,k} \subset R_{i,k},$$

on aura pour $i \neq j$ et pour $i = j$, $|k - l| \neq 1$ la relation:

$$(6) \qquad (\overline{U}_{ik} - U_{ik}) \times U_{j,l} \subset U_{ik} \times \overline{U}_{jl} = 0.$$

D'après (3), (5) et **5** (c_4) on aura de plus:

$$\begin{aligned} (7) \quad (\overline{U}_{ik} - U_{ik}) \times U_{i,k+1} &= (\overline{U}_{ik} - U_{ik}) \times U_{i,k+1} \times R_{ik} \times R_{i,k+1} = \\ &= (\overline{U}_{ik} - U_{ik}) \times [U_{i,k+1} \times (S^{(1)}_{i,k+1} + S^{(2)}_{i,k+1})] = \\ &= [(\overline{U}_{ik} - U_{ik}) \times S^{(2)}_{i,k+1}] \times U_{i,k+1} = [(\overline{U}_{ik} - U_{ik}) \times T^{(2)}_{i,k}] \times U_{i,k+1} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (8) \quad (\overline{U}_{i,k+1} - U_{i,k+1}) \times U_{i,k} &= (\overline{U}_{i,k+1} - U_{i,k+1}) \times [U_{i,k} \times (T^{(1)}_{i,k} + T^{(2)}_{i,k})] = \\ &= [(\overline{U}_{i,k+1} - U_{i,k+1}) \times S^{(1)}_{i,k+1}] \times U_{i,k} = 0, \end{aligned}$$

c. à d., on a dans tous les cas la relation:

$$(9) \qquad (\overline{U}_{i,k} - U_{i,k}) \times U_{j,l} = 0.$$

9. Posons maintenant:

$$(10) \qquad B_1 = U + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{i-1} U_{i\,2\mu}.$$

$$B_2 = U + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} U_{i,2\mu+1}. \tag{11}$$

Je dis que B_1 et B_2 possèdent les propriétés **3**, I, II, III.

10. Désignons par H_0 l'ensemble d'accumulation de la suite $\{\sum_{k=0}^{2i-1} U_{i,k}\}$. D'après (4), (5), **6** (d_5) on aura:

$$H_0 = \Gamma_1 \tag{12}$$

$$H_0 \times (B_1 + B_2) = U. \tag{13}$$

D'après (13), (10), (11), et par définition de H_0 on obtient:

$$\overline{B}_1 \times (B_1 + B_2) = B_1 + [\overline{B}_1 \times (B_2 - B_1)], \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \overline{B}_1 \times (B_2 - B_1) \subset {} & [H_0 \times (B_2 - B_1)] + \\ & + \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} \overline{U}_{i,2\mu}\right) \times (B_2 - B_1) + [U \times (B_2 - B_1)], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} H_0 \times (B_2 - B_1) &= H_0 \times (B_2 - B_1) \times (B_2 + B_1) = \\ &= U \times (B_2 - B_1) = UB_2 - B_1 \subset U - B_1 = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} \overline{U}_{i,2\mu}\right) \times (B_2 - B_1) \subset \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} \overline{U}_{i,2\mu}\right) \times \\ & \times \left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} U_{i,2\mu+1} - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} U_{i,2\mu}\right] \subset \\ & \subset \left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} (\overline{U}_{i,2\mu} - U_{i,2\mu})\right] \times \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1} U_{i,2\mu+1} = \\ & = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{i-1}\sum_{\nu=1}^{j-1} (\overline{U}_{i,2\mu} - U_{i,2\mu}) \times U_{j,2\nu+1} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Donc finalement:

$$\overline{B}_1 \times (B_1 + B_2) = B_1 \tag{18}$$

c. à d.: B_1 est fermé (rel. $B_1 + B_2$). Il en est de même pour B_2.

11. On a d'après (4), (5), (12):

$$\overline{U}_{ik} \times (H_0 + \overline{U}) \subset R_{ik} \times \Gamma_1 = 0. \tag{19}$$

Les relations (6) et (19) donnent:

$$\overline{U}_{i,2\mu} \times \overline{(B_1 - U_{i,2\mu})} = 0, \tag{20}$$

d'où il résulte que pour tout point x de $U_{i,2\mu}$ on a:

$$dim_x B_1 = dim_x U_{i,2\mu}. \tag{21}$$

Soit maintenant y un point de U tel que $dim_y U = 0$; donnons nous un nombre positif λ.

D'après (20), on peut déterminer un domaine $W_{i,2\mu}$, tel que l'on ait, ($\delta(A)$ désignant le diamètre d'un ensemble et $F(A)$ sa frontière):

$$U_{i,2\mu} \subset W_{i,2\mu}, \tag{22}$$

$$\delta(W_{i,2\mu}) \leqq 2\delta(U_{i,2\mu}) \leqq 2\left|\beta_i - \alpha_i + \frac{1}{2i}\right|, \tag{23}$$

$$F(W_{i,2\mu}) \times B_1 = 0, \tag{24}$$

$$\varrho(y, \overline{W}_{i,2\mu}) > 0. \tag{25}$$

En vertu de **6** (d_2) on a:

$$\lim_{i=\infty} \delta(W_{i,2\mu}) = 0. \tag{26}$$

Déterminons un entier i' tel que l'on ait pour $i > i'$:

$$\delta(W_{i,2\mu}) < \frac{\lambda}{4}. \tag{27}$$

Le nombre

$$\varrho_0 = \varrho\left(y, \sum_{i=1}^{i'}\left(\sum_{\mu=0}^{i-1} \overline{W}_{i,2\mu}\right)\right) \tag{28}$$

est positif. Comme $dim_y U = 0$, il existe un domaine $W \supset y$, tel que:

$$F(W) \times U = 0, \tag{29}$$

$$\delta(W) \leqq \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2} \\ \dfrac{\varrho_0}{2} \end{cases}. \tag{30}$$

Rangeons en une suite:

$$V_1, V_2, \ldots \tag{31}$$

tous les domaines $W_{i,2\mu}$ tels que $W_{i,2\mu} \times F(W) \neq 0$. Cette suite est finie, où bien telle que $\lim_{l=\infty} \delta(V_l) = 0$, car elle ne peut contenir qu'un nombre fini de domaines ayant un indice i determiné. Posons:

$$V = W + \Sigma V_l. \tag{32}$$

On aura:

(33) $$F(V) \subset \Sigma F(V_i) + [F(W) - \Sigma V_i],$$

(34) $$F(V) \times B_1 \subset \Sigma [F(V_i) \times B_1] + [F(W) - \Sigma V_i] \times B_1 = 0,$$

en vertu de (24), (29) et de ce que tous les points de $F(W) \times B_1$ sont d'après la définition de la suite (31) contenus dans ΣV_i.

D'autre part on a pour $W_{i,2\mu} \times F(W) \neq 0$ l'inégalité $i > i'$ (d'après (30) et la définition de ϱ_0). Donc:

(35) $$\delta(V_i) \leqq \frac{\lambda}{4},$$

(36) $$\delta(V) \leqq \lambda,$$

Il existe par conséquent des domaines de diamètre arbitrairement petit qui contiennent y et dont la frontière n'a pas de points communs avec B_1, c. à d.:

(37) $$dim_y B_1 = 0.$$

On voit que l'ensemble de points de B_1 de dimension 1 est constitué par la somme de points de dimension 1 des ensembles U et $U_{i,2\mu}$. Cet ensemble est par suite dénombrable. Donc B_1 (et de même B_2) est „faiblement de dimension 1".

12. Posons:

(38) $$U_i = \sum_{k=0}^{2i-1} U_{ik};$$

on aura

(39) $$B_1 + B_2 = \sum_{i=1}^{\infty} U_i + U.$$

Considérons les points p_{ik}, q_{ik}, r_{ik}, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2i-1$. Ces points forment un ensemble Z_i qui (en vertu des egalités (2)) contient $4i-1$ points différents.

En partant de (2) et 5 (c_3) on obtient par un raisonnement simple, que j'omets ici, le résultat suivant: un domaine plan, dont la frontière ne contient aucun point de $B_1 + B_2$ et qui contient un seul point de Z_i contient l'ensemble Z_i tout entier; il est donc de diamètre $\geqq 1$. Il en résulte que $B_1 + B_2$ est de dimension 1 dans tout point de $(\sum_{i=1}^{\infty} Z_i)' \times (B_1 + B_2)$.

Mais $(\sum_{i=1}^{\infty} Z_i)'$ est évidemment identique à H_0. Donc d'après (12), (13):

(40) $$\left(\sum_{i=1}^{\infty} Z_i\right)' \times (B_1 + B_2) = U.$$

Ainsi $B_1 + B_2$ est de dimension 1 dans tout point de U. Donc, U étant de dimension 1, $B_1 + B_2$ n'est pas faiblement de dimension 1.

Varsovie, le 24 Février 1928.