# Remarque sur les images continues d'ensembles.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

La remarque suivante concerne un problème de M. Banach et se rattache à l'ouvrage précédent de M. Hurewicz.

Je prouve notamment *l'existence d'un ensemble plan $E$, non-mesurable, dont toute image continue $I$ situe sur la droite est une différence de deux ensembles fermés.*

Soit $A$ un ensemble non-mesurable (superficiellement) situé dans un carré (aux côtés parallèles aux axes). Soit $B$ l'ensemble formé des segments verticaux (contenus dans le carré) à abscisse rationnelle et des segments horizontaux à ordonnée rationnelle. L'ensemble $B$ étant de mesure nulle, la somme $E = A + B$ est un ensemble non-mesurable.

D'autre part, $B$ étant *connexe* (au sens de Lennes-Hausdorff), l'inclusion $B \subset E \subset \bar{B}$ entraîne [1] que $E$ est connexe également. Or, la connexité étant un invariant des transformations continues [2], toute image continue $I$ de $E$ est connexe. Si l'on suppose que $I$ est situé sur la droite, $I$, comme ensemble connexe, est une différence de deux ensembles fermés; il n'y a, en effet, sur la droite, que les ensembles suivants qui soient connexes: la droite entière, le rayon fermé ou ouvert, l'intervalle fermé, l'intervalle dépourvu d'une ou de deux extrémités, le point; tous ces ensembles sont des différences de deux ensembles fermés, c. q. f. d.

[1]) selon un théorème de M. Hausdorff (*Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 246, théor. IV).

[2]) ibid. p. 363, théor. IV.

# Sur un problème de M. Menger.

Par

Stefan Mazurkiewicz (Varsovie).

**1.** Un ensemble séparable de dimension $n$ est d'après M. Menger [1]) „faiblement de dimension $n$" (schwach $n$-dimensional) si l'ensemble de points, où il est de dimension $n$, est de dimension $n-1$. M. Menger pose le problème suivant: l'ensemble-somme d'un nombre fini (resp. d'une infinité dénombrable) d'ensembles dont chacun est fermé relativement à l'ensemble-somme et „faiblement de dimension $n$", est-il „faiblement de dimension $n$"?

Je vais montrer que pour $n = 1$ la réponse est négative.

**2.** Pour le cas d'une infinité dénombrable cette réponse est contenue implicitement dans ma note: *Sur les ensembles quasi-connexes* [2]).

En effet, l'ensemble $A$ qui y est defini par la relation (9) est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ dont chacun est homéomorphe à l'ensemble de M. Sierpiński, donc faiblement de dimension 1. En utilisant la relation (12), on démontre facilement que $E(\alpha_k, \eta_k, \varepsilon_k)$ est fermé (rel. $A$). D'autre part $A$ est de dimension 1 dans chacun de ses points.

**3.** Je me propose maintenant de démontrer l'existence de deux ensembles $B_1$ et $B_2$ tels que:

I. *$B_1$ et $B_2$ sont fermés (rel. $B_1 + B_2$).*

II. *$B_1$ et $B_2$ sont faiblement de dimension 1.*

III. *$B_1 + B_2$ n'est pas faiblement de dimension 1.*

**4.** Supposons fixé un système de coordonnées cartesiennes $\xi$, $\eta$. Désignons:

[1]) Akad. Anzeiger d. Akademie d. Wissenschaften in Wien Nr. 1, 12/1, 1928.

[2]) Fund. Math. II, p. 201—205.