Die Formeln (72), (73), (74), (75) ergeben:

$$\left| \int_{\bar{E}} f(u,v)\,.\,i(u,v)\,.\,D(u,v)\,du\,dv - \int_{\bar{E}} F(x,y)\,n(x,y)\,dx\,dy \right| < \varepsilon + \varepsilon\,.\,H\,.\int_{\bar{E}} N(x,y)\,dx\,dy. \tag{77}$$

Indem man in (77) zur Grenze übergeht, folgt

$$\int_{Q_0} f(u,v)\,.\,i(u,v)\,D(u,v)\,du\,dv = \int_{\bar{E}} F(x,y)\,n(x,y)\,dx\,dy.$$

Eingegangen: Mai 1924 [10]).

[10]) ursprünglich in englicher Sprache.

Sur un ensemble analytique plan, universel pour les ensembles mesurables *(B)*.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

(Extrait d'une lettre adressée à M. N. Lusin).

Pendant votre séjour à Varsovie, en octobre 1927, vous avez attiré mon attention sur l'intérêt que présenterait une construction d'*un ensemble (A) plan, dont les intersections par les droites parallèles à l'axe d'ordonnées donnent tous les ensembles mesurables B linéaires, et seulement des ensembles mesurables B*. Permettez de vous communiquer un exemple d'un tel ensemble.

Comme on le sait, il existe un ensemble universel G_δ dans l'espace R_3 à trois dimensions, c'est-à-dire un ensemble G_δ situé dans R_3, soit U, tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan YOZ on obtient tous les ensembles G_δ plans possibles [1]).

Désignons par Q l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'ensemble U, tels qu'il n'existe aucun point (ξ, η, ζ) de U, où $\xi = x$, $\eta = y$ et $\zeta > z$. L'ensemble U étant mesurable B, l'ensemble Q sera, d'après M. Mazurkiewicz, un ensemble CA (complémen-

[1]) Voici comment on pourrait démontrer l'existence d'un ensemble universel *G_δ plan*. Comme j'ai démontré (*Fund. Math.* t. VII, p. 200) il existe un ensemble universel fermé dans l'espace à 3 dimensions, c'est-à-dire un ensemble fermé F situé dans R_3, tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan YOZ on obtient tous les ensembles fermés plans. La projection $P(F)$ de l'ensemble F, sur le plan XOY sera un ensemble universel F_σ plan (puisque les ensembles F_σ linéaires coïncident avec les projections des ensembles fermés plans, comme je l'ai démontré dans les *Fund. Math.* t. VII, p. 238), et parsuite son complémentaire $CP(F)$ (par rapport au plan XOY) sera un ensemble universel G_δ plan. On obtient pareillement un ensemble universel G_δ dans R_3, en partant d'un ensemble universel fermé dans l'espace à 4 dimensions.

taire d'un ensemble (A) dans l'espace à 3 dimensions) [1]. Il en résulte que l'ensemble $V = U - Q$ sera un ensemble (A) (dans R_3).

Soit $R = P(U)$ la projection de l'ensemble U sur le plan XOY, et soit $S = PP(V)$ la projection de l'ensemble V sur l'axe OX: ce seront des ensembles (A) (comme projections des ensembles (A)). Désignons par T l'ensemble de tous les points (x, y) du plan XOY, tels que $x \epsilon S$: ce sera encore un ensemble (A) (plan). Posons $E = R + T$. Je dis que l'ensemble E jouit des propriétés désirées.

En effet: 1) E est un ensemble (A) plan (comme somme de deux ensembles (A) plans).

2) Soit a un nombre réel donné, et désignons par L l'intersection de l'ensemble E par la droite $x = a$.

Si $a \epsilon S$, L coïncide avec la droite $x = a$ (d'après les définitions des ensembles T et E). Si a non ϵS, il résulte des définitions des ensembles S et V que toute droite $x = a$, $y = b$, où b est un nombre réel quelconque, coupe l'ensemble U au plus en un point. Il en résulte tout de suite que L est une projection *biunivoque* d'un ensemble G_δ plan: c'est donc une image biunivoque et continue (dans un sens) d'un ensemble mesurable B. D'après votre théorème *d'unicité* [2]) l'ensemble L est donc mesurable B.

3) Soit M un ensemble linéaire mesurable B quelconque. Il résulte sans peine de votre théorème *d'unicité* [3]) que l'ensemble M est une projection biunivoque d'un ensemble G_δ plan, soit N. Or, il résulte de la propriété de l'ensemble U qu'il existe un nombre réel a tel qu'en coupant l'ensemble U par le plan $x = a$ on obtient l'ensemble N, dont la projection sur la droite $x = a$ $z = 0$ est l'ensemble M. D'après les définitions des ensembles Q, V, S et E il en résulte sans peine que l'intersection de l'ensemble E par la droite $x = a$ est l'ensemble M.

Nous avons donc démontré que l'ensemble E jouit des propriétés désirées. Il est à remarquer que le complémentaire de E par rapport au plan XOY est un ensemble CA plan, tel qu'en le coupant avec les droites parallèles à l'axe OY on obtient tous les ensembles mesurables B linéaires possibles et seulement les ensembles

[1]) *Fund. Math.* t. X. p. 172. Il y est traité le cas d'un ensemble mesurable B plan, mais la démonstration est valable pour l'espace à 3 dimensions. Cf. W. Sierpiński *Fund. Math.* t. XI, p. 293.

[2]) N. Lusin: *Fund. Math.* t. X, p. 60.

[3]) N. Lusin: *Fund. Math.* t. X, p. 49.

mesurables B. Or, on voit sans peine qu'il n'existe aucun ensemble plan mesurable B universel, c'est-à-dire un ensemble plan mesurable B, dont les intersections par les droites parallèles à l'axe OY donnent tous les ensembles mesurables B linéaires (puisque, en coupant un ensemble mesurable B de classe α par une droite, on obtient toujours un ensemble mesurable B de classe $\leqslant \alpha$).

Varsovie, le 1 Novembre 1927.