senen Mengen, deren Dimension höchstens gleich der Dimension von F ist; also [13]) ist die Dimension von J gleich derjenigen von F.

J ist ein eindeutiges und stetiges Bild der in sich kompakten Menge $[0, 1]$; folglich [14]) ist J ein *gleichmässig* stetiges Bild der Strecke $[0, 1]$, und da $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(a_j, b_j) = 0$ ist, so ist auch $\lim\limits_{j\to\infty} d(L_j) = 0$.

Der Satz I ist bewiesen.

3. Urysohn hat die Existenz eines universellen separablen [15]) metrischen Raumes U, welcher isometrische Bilder *aller* separablen metrischen Räume enthält, bewiesen [16]). Insbesondere enthält U ein isometrisches Bild eines beliebigen kompakten metrischen Raumes F. Der Raum R ist [17]) ausserdem streckenweise zusammenhängend. Infolgedessen gilt auf Grunde des Satzes I der

Satz II. *Sei ein kompakter metrischer Raum F von positiver Dimension gegeben. Dann existiert ein, die Menge F isometrisch enthaltendes, Jordansches Kontinuum J derselben Dimension; es ist nähmlich*

$$J = F^* + \Sigma L_j,$$

wo F^* das isometrische Bild von F ist, und ΣL_j entweder 1) *die leere Menge, oder* 2) *die Vereinigungsmenge endlich vieler Strecken L_j deren Endpunkte* [7]) *zu F^* gehören, oder* 3) *die Vereinigungsmenge abzählbar vieler solcher Strecken ist; im letzten Falle ist* $\lim\limits_{j\to\infty} d(L_j) = 0$.

[13]) P. Urysohn, Mémoire, *Fund. Math.*, t. VII, p. 337; K. Menger, *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, 34, S. 147.

[14]) Hausdorff, l. c., S. 197, Satz IV.

[15]) Hausdorff, l. c., S. 124.

[16]) P. Urysohn, Sur un espace métrique universel, *Bull. des Sciences Math.*, 2e série, t. LI (1927), nº 13, II.

[17]) P. Urysohn, l. c. [16]) nº 19.

Moskau, 1927.

Über stetige Abbildungen.

Von

Julius Schauder (Lwów).

I.

§ 1. In der Ebene E mit den laufenden Koordinaten u, v liege das Quadrat Q_0 mit den Ecken 00, 01, 10, 11 und werde durch die Funktionen

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v) \tag{1}$$

auf eine in einer anderen Ebene $\overline{E}$ liegende Menge $\Phi(Q_0)$ abgebildet; x, y seien die Koordinaten in $\overline{E}$. Somit entspricht jeder Teilmenge $Q \subset Q_0$ eine Bildmenge $\Phi(Q) \subset \Phi(Q_0)$ und andererseits bestimmt jede Menge $B \subset \Phi(Q_0)$ eindeutig ihr Urbild $\Psi(B)$, d. h. die Gesamtheit aller derjenigen Punkte $P \epsilon Q_0$, für welche

$$\Phi(P) \epsilon B \subset \Phi(Q_0). \tag{2}$$

Die Messbarkeit von Mengen wird immer, wenn wir das Gegenteil nicht ausdrücklich betonen, im Lebesgue'schen Sinne verstanden.

Als Zeichen für das Mass (bezw. äusseres Mass) benutzen wird das Symbol $\| \;\|$ (bezw. $\| \;\|^*$).

In der Zukunft setzen wir von den Funktionen $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ folgendes voraus:

I. Erstens: Sie sind stetig im abgeschlossenen Q_0.

II. Zweitens: Die Bildmengen $\Phi(Q_i)$ jeder Folge $\{Q_i\}$ von messbaren zu Q_0 gehörenden Punktmengen, die keine gemeinsame Punkte miteinander besitzen, genügen der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| \Phi(Q_i) \|^* \leqslant M,$$

wobei M eine von der speziellen Wahl der Folge $\{Q_i\}$ unabhängige Konstante ist.

III. Drittens: Nullmengen gehen über in Nullmengen [1]).

Da wir im weiteren Verlaufe nirgends [2]) diese drei Eigenschaften getrennt benutzen werden, so erweist es sich als nützlich, das logische Produkt dieser Eigenschaften als *„Eigenschaft A“* zu bezeichnen.

Zu den drei die Eigenschaft „A“ konstituierenden Bedingungen kommt später eine vierte Bedingung dazu. (Seite 51). Den Inbegriff aller dieser vier Bedingungen nennen wir „A'“

Ich gebe noch kurz den Inhalt der vorliegenden Arbeit an.

Bekanntlich kann man das Funktionensystem (1)

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v), \end{aligned}$$

umkehren, wenn nur die Funktionen φ, ψ stetig derivierbar sind und die Funktionaldeterminante $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ von Null verschieden ist. Ich versuche nun diese Sätze zu verallgemeinern, indem ich die Funktionaldeterminante als Produkt zweier Funktionen auffasse, einer mengentheoretischen Funktion f_1: des sogenannten „Flächenvergrösserungsverhältnisses“ und einer topologischen f_2: des „Indexes“ in einem Punkte. Es liegt die Vermutung nahe, dass falls für eine Abbildung Φ das Vergrösserungsverhältniss fast überall $\neq 0$ und der „Index“ fast überall positiv ist, man über die Abbildung gewisse Umkehrungssätze aussagen kann. Diesen Untersuchungen ist der erste Teil dieser Arbeit gewidmet. Dabei ist interessant, dass es bei gewissen Sätzen genügt den Index nur positiv anzunehmen, während bei anderen der Index genau $+1$ gesetzt werden muss. Die so erhaltenen Sätze gelten natürlich nur fast überall, wenn aber der Index überall > 0 vorausgesetzt wird, so gelten sie ohne Ausnahme in jedem Punkte. Daraus folgt z. B., dass die Möglichkeit der Umkehrung, immer dann bestehen bleibt,

[1]) Zur Definition einer Nullmenge vergl. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen.* Teubner. Leipzig 1918, Seite 232.

[2]) Satz I, bildet eine Ausnahme. Für seine Gültigkeit wird nur die erste der drei Bedingungen, denen φ und ψ genügen sollen, gefordert.

wenn das System (1) überall beschränkte, aber nicht notwendig stetige Ableitungen besitzt und wenn überall $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} > 0$.

Im zweiten Teile beschäftige ich mich mit Funktonen φ, ψ, die je einer lipschitz'schen Bedingung genügen. Alle früher bewiesene Sätze gelten für solche Funktionensysteme. Weiter beweise ich die folgenden Formeln:

$$\iint_Q f[\varphi(u, v), \ \psi(u, v] \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \, du \, dv = \iint n(x, y) \, f(x, y) \, dx \, dy,$$

$$\iint_Q \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \, du \, dv = \iint n(x, y) \, dx \, dy,$$

wo $f(x, y)$ eine beliebige stetige Funktion bedeutet und die „topologische“ Funktion $n(x, y)$ näher im Texte erklärt wird.

Herr W. H. Young hat in seiner in *Proceedings* 1922 (23) erschienenen Arbeit: *Integration over the area. Proceedings*, London 1923, vol. 21, 161—190, denselben Gegenstand behandelt. In der zitierten Abhandlung, wo auch die Literaturangaben über seine Vorarbeiten zu finden sind, leitet er für beliebige rektifizierbare oder auch semirektifizierbare Kurven C*) die folgende Formel ab:

$$\iint_Q f[\varphi(u, v), \ \psi(u, v)] \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \, du \, dv = \int_C F(x, y) \, dy$$

wo $F(x, y) = \displaystyle\int_0^x f(x, y) \, dx$ bedeutet.

In Anfang des Beweises ist sein Vorgang analog dem meinen. Auch er beginnt (wie ich beim Beweise des Satzes VIII) mit „simplizialen“ Abbildungen Φ_m und beweist für diese simpliziale Abbildungen

$$\iint_Q \frac{D(\varphi_m, \psi_m)}{D(u, v)} . f[\varphi_m(u, v), \psi_m(u, v)] \, du dv = \int_{C_m} F(x, y) \, dy.$$

Er zeigt sogar mehr, dass nämlich im Falle einer simplizialen Abbildung auch die „topologische“ Form gilt:

$$\iint_Q \frac{D(\varphi_m, \psi_m)}{D(u, v)} . f[\varphi(u, v), \ \psi(u, v)] \, du \, dv = \iint n_m(x, y), f(x, y) \, dx \, dy.$$

*) d. h. der Rand des Quadrates Q geht durch die Abbildung (1) in die Kurve C über.

Zur Grenze geht er aber — für eine beliebige Abbildung — mit diesen topologischen Integralen $\iint n_m(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$ nicht, sondern nur mit den Kurvenintegralen $\int\limits_{C_m} F(x,y)\,dy$ über und bekommt so natürlich im Falle einer beliebigen rektifizierbaren oder semirektifizierbaren Kurve eine ganz andere Grenzformel, für welche er nur in ganz einfachen Fällen: a) einer Jordankurve b) einer Kurve mit nur endlich vielen Doppelpunkten ihre Äquivalenz mit der „topologischen" Formel beweisen kann. Der allgemeine Fall bleibt bei ihm unerledigt. Er weisst sogar nicht, ob das Grenzintegral $\iint f(x,y)\,n(x,y)\,dx\,dy$ existiert. Nun ist gerade die „topologische" Formel für die Anwendungen wichtig, wie ich in einer eben in den „*Acta literurum ac scientiorum*, Szeged" erscheinenenden Note: „*Über die Umkehrung eines Satzes aus der Variationsrechnung*", gezeigt habe. Die Formel ist nämlich auf ganz allgemeine beschränkte, nicht durch Kurven umrandete, Gebiete verallgemeinerungsfähig.

Übrigens lenke ich die Aufmerksamkeit des Lesers auf den letzten Satz dieser Arbeit, wo die Formel für solche Abbildungen beweisen wurde, die nur die drei auf Seite 47 angeführten Postulate erfüllen. Dabei braucht die Abbildung C des Randes garnicht rectifizierbar oder semirektifizierbar zu sein; es genügt vorauszusetzen, dass C eine Nullmenge ist.

§ 2. *Definition der Mengen B_m, $\mathfrak{B}_m$,... etc.*

Die Menge $B_m \subset \Phi(Q_0)$ ist der Inbegriff aller derjenigen Punkte $\overline{P}$, welche in $\overline{E}$ liegen und deren Urbild aus wenigsten m Punkten besteht. Die Mengen B_∞, $\mathfrak{B}_m$, β_m definieren wir folgendermassen:

$$\mathfrak{B}_m = B_{m+1} - B_m$$
$$\beta_m = \Phi(Q_0) - B_{m+1} \tag{3}$$
$$B_\infty = \prod_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Satz I. *Voraussetzungen: Bedingung I.*

Behauptung: $\mathfrak{B}_m$, B_m, B_∞... sowie ihre Urbilder sind im Borel'schen Sinne („b") messbar.

Beweis: Da die Funktionen φ und ψ stetig sind, so entspricht jeder abgeschlossenen Menge $F \subset Q_0$ eine Menge derselben Art $\Phi(F)$, jeder Summe F_σ von abgeschlossenen Mengen wieder ein F_σ. Teilen wir jetzt das Quadrat Q_0 durch Parallelen zu seinen Seiten in s^2 gleich grosse Quadrate Q_{is} $(i = 1, 2, \ldots s^2)$. Die Randpunkte der Q_{is} werden auf bekannte Weise so eingeteilt, dass sie nur zu einem Q_{is} gehören. Somit ist jedes Q_{is} eine Summe von abgeschlossenen Mengen, also ist nach dem eben Gesagten $\Phi(Q_{is})$ „b" messbar und dies besteht auch für

$$A_m^s = \sum_{i_k \neq i_{k'}}^{i_k \leq s^2} \Phi(Q_{i_1,s}) \cdot \Phi(Q_{i_2,s}) \ldots \Phi(Q_{i_m,s}). \tag{4}$$

Die Summation erstreckt sich hier, wie angedeutet, über Durchschnitte von je m verschiedenen Mengen $\Phi(Q_{is})$.

Also ist auch $\operatorname{Lim}_{s=\infty} A_m^s = B_m$ „b"-messbar. Dieser Schlusse bleibt auch gültig für B_∞, $\mathfrak{B}_m$, $\beta_m \ldots$, da diese Mengen durch die Operationen „Summe" und „Durchschnitt" sich aus B_m ergeben. Ähnlich wird die „b"-Messbarkeit von $\Psi(B_m)$, $\Psi(B_\infty), \ldots$, etc gezeigt.

§ 3. Es sei Q eine beliebige zu Q_0 gehörende Menge. Setzen wir

$$F(Q) = \|\Phi(Q)\|^*, \tag{5}$$

so erhalten wir auf solche Weise eine Mengenfunktion. Wir knüpfen jetzt an eine Arbeit von Herrn Banach an [3]). Die Mengenfunktion $F(Q)$ ist wegen der Bedingung II (Seite 47) nach einer in dieser Arbeit vorkommen Bezeichnung „normal" und „von beschränkter Schwankung".

Nach Herrn Banach besitzt also $F(Q)$ fast überall eine verallgemeinerte Derivierte $D(P)$ [4]), die ihrerseits summierbar ist. Zu den drei ursprünglichen Bedingungen fügen wir jetzt hinzu:

Bedingung IV: Es sei $D(P) > 0$ fast überall in Q_0†).

Hilfssatz I: *Voraussetzung: Eigenschaft A.*

Behauptung: Für jede messbare Menge $R \subset Q_0$ mit einem von Null verschiedenem Masse gilt fast überall in R

$$D(P) = D_R(P). \tag{6}$$

$D_R(P)$ bezeichnet hier die Derivierte der Mengenfunktion $F_R(Q)$

$$F_R(Q) = F(R \cdot Q). \tag{7}$$

[3]) *Fund. Math.* Band VI. S. Banach: *Sur une classe de fonctions d'ensemble.* Seite 170—188.

[4]) Zur Definition der verallgemeinerten Derivierten vergl. entweder die unter 3) zitierte Arbeit oder das Buch von Carathéodory.

†) Ann. bei der Korr. Wir erinnern dass „A" den Inbegriff aller dieser vier Bedingungen bezeichnet.

Beweis: Wir betrachten die additive und totalstetige Mengenfunktion $\Omega(Q)$

$$\Omega(Q) = \int_{(Q_0-R)\cdot Q} D(P)\, du\, dv \tag{8}$$

$\Omega(Q)$ hat in R fast überall die Derivierte 0.

Wir bezeichnen jetzt mit $w(P, r)$ dasjenige Quadrat, das P als Mittelpunkt besitzt und dessen Seite die Länge r hat.

Wird also von einer Nullmenge R_1 abgesehen, so gilt in $R-R_1$

$$\lim_{r=0} \frac{\int\limits_{(Q_0-R)\cdot w(P,r)} D(P)\, du\, dv}{r^2 \cdot \pi} = 0; \quad P \varepsilon R - R_1. \tag{9}$$

Weiter bestehen die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{gathered} F(Q) \leqq \int_Q D(P)\, du\, dv \\ F[(Q_0 - R) \cdot Q] \leqq \int_{(Q_0-R)\cdot Q} D(P)\, du\, dv \end{gathered} \tag{10}$$

also nach (7), (10)

$$\begin{aligned} \frac{F_R[w(P,r)]}{r^2} &\leqq \frac{F[w(P,r)]}{r^2} \leqq \frac{F[w(P,r)\cdot R]}{r^2} + \frac{F[w(P,r)\cdot(Q_0-R)]}{r^2} = \\ &= \frac{F_R[w(P,r)]}{r^2} + \frac{F[w(P,r)\cdot(Q_0-R)]}{r^2} \leqq \\ &\leqq \frac{F_R[w(P,r)]}{r^2} + \frac{\int\limits_{(Q_0-R)\cdot w(P,r)} D(P)\, du\, dv}{r^2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Endlich, wenn wir (9) in Betracht ziehen, bekommen wir nach (11)

$$\lim_{r=0} \frac{F_R[w(P,r)]}{r^2} = \lim_{r=0} \frac{F[w(P,r)]}{r^2} \tag{12}$$

fast überall in R q. e. d.

Bemerkung I. Unter der Voraussetzung des Hilfssatzes I geht jede Menge R, deren *Mass* von Null verschieden ist und in welcher $D(P) > 0$ fast überall, in eine Menge $\Phi(R)$ über, deren Mass von Null verschieden ist.

Bemerkung II [5]). Wir betrachten die Funktion $N(\overline{P})$. — der Punkt $\overline{P}$ liegt in $\overline{E}$ — die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} N(\overline{P}) &= m && \text{wenn } \overline{P} \epsilon \mathfrak{B}_m \\ N(\overline{P}) &= +\infty && \;\;\text{„} \;\; \overline{P} \epsilon B_\infty \\ N(\overline{P}) &= 0 && \text{ausserhalb } B_1. \end{aligned} \tag{13}$$

Dann haben wir (A vorausgesetzt)

$$\int_{Q_0} D(P)\, du\, dv = \int_{\overline{E}} N(\overline{P})\, dx\, dy \;^{5)} \tag{14}$$

also auch

$$\|B_\infty\| = 0. \tag{15}$$

Bemerkung III. Wenn jetzt Eigenschaft A' besteht, dann ist nicht nur $\|B_\infty\| = 0$, aber auch $\|\Psi(B_\infty)\| = 0$ (nach Bemerkung I).

§ 4. Diesem wichtigen Resultate geben wir die folgende Form: Wird Eigenschaft A' vorausgesetzt, so wird es möglich, fast jedem Punkte $P \epsilon Q_0$ eine Zahl $r(P)$ so zuordnen, dass den Punkt $\Phi(P)$ das Bild $\Phi[w(P, r)]$ des Quadrates $w(P, r)$ einfach belegt. Dies bedeutet, dass kein zweiter innerhalb $w(P, r)$ liegender Punkt sich in $\Phi(P)$ abbildet. Somit geht jede in $w(P, r)$ gelegene stetige und geschlossene Kurve C in eine (geschlossene und stetige) in $\Phi[w(P, r)]$ liegende Kurve $\Phi(C)$ über. Passiert C nicht den Punkt P, so passiert auch $\Phi(C)$ keineswegs $\Phi(P)$. Man kann also die topologische Ordnung des Punktes $\Phi(P)$ in bezug auf $\Phi(C)$ definieren. Nehmen wir insbesondere für C eine geschlossene den Punkt P umschliessende Jordan'sche Kurve, so zeigt man ganz leicht, dass die Ordnung des Bildpunktes $\Phi(P)$ in bezug auf die Bildkurve $\Phi(C)$ von der besonderen Wahl von C nicht abhängt. Diese ganze Zahl (die Ordnung [6])) ist nur eine Funktion von P: $i_P = i(P)$. Wir nennen $i(u, v) = i_P = i(P)$: der (Kronecker'sche) Index in Punkte $P(u. v)$.

[5]) St. Banach, Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie, *Fund. Math.* Band VII, Seite 225—236. Diese Bemerkung wird später verallgemeinert, Seite 68 Hilfssatz III.

[6]) Wir benutzen hier und im folgenden durchwegs die Brouwer'sche Definition der Ordnung, damit unsere Resultate auch für n-dimensionale Räume bestehen.

§ 5. Es sei C eine beliebige, geschlossene und stetige Kurve in Q_0, $\Phi(C)$ ihr Bild. Da die Abbildung „Φ“ stetig ist, so ist $\overline{E}-\Phi(C)$ ein Gebiet. $\overline{E}-\Phi(C)$ zerfällt also in abzählbar viele zusammenhängende Komponenten $\overline{E}_i$. Alle Punkte $\overline{P}$, die zu demselben Gebiete $\overline{E}_i$ gehören, haben in bezug auf $\Phi(C)$ dieselbe Ordnung n_i.

Dann gilt der folgende

Satz II. *Voraussetzuug:* $n_i \neq 0$.

Behauptung: Die entsprechende Komponente (Gebiet) $\overline{E}_i$ gehört ganz zum Bilde $\Phi(Q_0)$.

Beweis: Diesen Satz werden wir vorläufig nicht beweisen. Er erweist sich nämlich als eine unmittelbare Konsequenz des Satzes VIII, Bemerkung 3). Übrigens ist Satz VIII von allen ihm vorangehenden Betrachtungen unabhängig.

Bemerkung zum Satze II. Wenn der Index i im Punkte P definiert ist, und wenn $i \neq 0$, dann ist $\Phi(P)$ ein innerer Punkt aller Mengen

$$\Phi[w(P, r)].$$

Es sei R der Rand von Q_0. Wir definieren in der Ebene $\overline{E}$ die Funktion $n(\overline{P})$ folgendermassen: $n(\overline{P})$ ist gleich der Ordnung des Punktes $\overline{P}$ in bezug auf $\Phi(R)$. Natürlich ist unsere Funktion nur in Punkten von $\overline{E}-\Phi(R)$ definiert.

Betrachten wir jetzt einen solchen Punkt $\overline{P}$, für welchen $N(\overline{P})$ endlich bleibt. Es seien

$P_1, P_2, \ldots P_{N(\overline{P})}$ die Punkte des Urbildes $\Psi(\overline{P})$.
$i_1, i_2, \ldots i_{N(\overline{P})}$ ihre Indexe.

Dann gilt

Satz III. α) *Voraussetzung:* 1) $N(\overline{P})$ *ist endlich und* $N(\overline{P}) \neq 0$.
2) $\overline{P} \in \overline{E}-\Phi(R)$.

(17)
Behauptung: $$\sum_{k=1}^{k=N(\overline{P})} i_k = n(\overline{P})$$

β) *Voraussetzung* 1) $N(\overline{P})=0$; 2) $\overline{P} \in \overline{E}-\Phi(R)$.
Behauptung: $n(\overline{P})=0$.

Beweis: Wir beweisen zuerst β). Wäre nämlich in diesem Falle $n(\overline{P}) \neq 0$, dann wäre (nach Satz II) $\overline{P}$ ein innerer Punkt von $\Phi(Q)$, also $N(\overline{P}) \neq 0$. Dies ist ein Widerspruch.

Jetzt beweisen wir α). Zu diesem Zwecke teilen wir Q_0 in gewisse Teilquadrate Q_s $(s=1, 2, \ldots j)$, so dass kein Punkt $P_1, P_2, \ldots P_{N(\overline{P})}$ des Urbildes $\Psi(\overline{P})$ am Rande irgend eines Quadrates Q_s und dass im Inneren von Q_s höchstens *ein* P_s liegt. Wir bezeichnen mit

1° k_s den Rand des Quadrates Q_s,
2° l_s die Ordnung von $\overline{P}_s = \overline{P}$ in bezug auf $\Phi(k_s)$.

diese Quadrate Q_s teilen wir jetzt in zwei Gruppen ein: in solche Q_s, die einen Punkt P_s des Urbildes $\Psi(\overline{P})$ in ihrem Inneren enthalten und in solche Q_s, die keinen Punkt des Urbildes $\Psi(\overline{P})$ enthalten. Dann gilt

$$\sum_{s=1}^{s=j}{}' l_s = n(\overline{P}); \tag{18}$$

Die Summation erstreckt sich über alle Quadrate der ersten Gruppe, was das Zeichen andeuten soll.

Die Kurve $\Phi(R)$ ist nämlich die Summe der Kurven $\Phi(k_s)$. In allen Quadraten der ersten Gruppe ist

$$l_s = i_s = i(P_s),$$

in allen Quadraten der zweiten Gruppe

$$l_s = 0$$

Daraus folgt also

$$\sum_{s=1}^{s=N(\overline{P})} i_s = n(\overline{P}).$$

§ 6. **Satz IV.** *Voraussetzung:* 1) *Es besteht die Eigenschaft A' und weiter*

2) *die Abbildung* $R \leftrightarrow \Phi(R)$ *ist eineindeutig.*

3) *Der Index ist fast überall positiv.*

Behauptung: 1) *Die Abbildung* $Q_0 \leftrightarrow \Phi(Q_0)$ *ist fast eineindeutig, das soll bedeuten, sie ist eineindeutig, wenn wir von einer Nullmenge absehen.*

2) $\Phi(Q_0)$ *liegt nicht ausserhalb* $\Phi(R)$.

Beweis: Natürlich genügt es zu zeigen, dass:

1) $N(\overline{P})=1$ fast überall im Inneren von $\Phi(R)$,
2) $N(\overline{P})=0$ *überall* ausserhalb $\Phi(R)$.

Es sei also zuerst $\overline{P}$ ein innerhalb $\Phi(R)$ liegender Punkt. Dann ist $n(\overline{P})$ gleich ± 1. Da man nur 1) „fast überall" beweisen soll, so können wir $\overline{P}$ so wählen, dass $N(\overline{P})$ endlich bleibt und dass alle Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{N(\overline{P})}$ des Urbildes $\Psi(\overline{P})$ nur positive Indexe besitzen. Die Gleichung (17) des vorigen Satzes liefert

$$(19)\qquad 0 \leqq \sum_{k=1}^{k=N(\overline{P})} i_k = \pm 1.$$

Da aber alle i_k positiv sind, so gilt

$$(20)\qquad 0 < \sum_{k=1}^{k=N(\overline{P})} i_k = +1.$$

Diese letzte Gleichung besteht aber nur dann, wenn

$$(21)\qquad N(\overline{P}) = 1.$$

Jetzt bleibt nur zu zeigen, dass $N(\overline{P}) \equiv 0$, ausserhalb $\Phi(R)$. Wäre nämlich $\overline{P}$ ein ausserhalb $\Phi(R)$ liegender Punkt, für welchen $N(\overline{P}) \neq 0$, dann wäre $\Psi(\overline{P})$ keine leere Menge. Nehmen wir an, P gehöre zu $\Psi(\overline{P})$.

$$(22)\qquad P \in Q_0; \quad P \in \Psi(\overline{P}); \quad \Phi(P) = \overline{P}.$$

Unsere Voraussetzungen erlauben uns einen anderen Punkt $P_1 \in Q_0$ so nahe an P zu wählen, dass die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

Erstens: Der Index in P_1 ist wohl definiert und positiv.

Zweitens: $\Phi(P_1) = \overline{P}_1$ liegt ausserhalb $\Phi(R)$.

Drittens: $N(\overline{P}_1)$ ist endlich und alle Punkte des Urbildes $\Psi(\overline{P}_1)$ haben nur positive Indexe.

Dann müssten wir (nach Satz III) haben:

$$(23)\qquad 0 < \sum_{k=1}^{k=N(\overline{P}_1)} i'_k = n(\overline{P}_1) = 0,$$

wo i'_k die Indexe des Urbildes $\Psi(\overline{P}_1)$ bezeichnen.

Diese letzte Ungleichung ist aber unmöglich, w. z. b. w.

Bemerkung I. (zum Satz IV). Wir haben den Index fast überall > 0 vorausgesetzt. Bleibt er *überall* positiv, so ist die Abbildung $Q_0 \leftrightarrow \Phi(Q_0)$ ohne Ausnahne eineindeutig.

Bemerkung II. Die Eigenschaft A' kann nicht durch A allein ersetzt werden. In der Tat, setzen wir nur „A" voraus und bezeichnen durch T diejenige Menge, in welcher $D(P) > 0$.

Ist der Index in T fast überall positiv, so ist zwar wieder $N(\overline{P}) = 1$ innerhalb und $N(\overline{P}) = 0$ ausserhalb $\Phi(R)$, wir können aber daraus keineswegs auf die (fast) Eineindeutigkeit der Abbildung schliessen, da Nullmengen in $\overline{E}$ nicht notwendig Nullmengen in E entsprechen.

§ 7. **Satz V.** *Voraussetzung*: 1) *Eigenschaft A'.*
2) *der Index ist fast überall* $+1$.

Behauptung: Fast alle Punkte $P \in Q_0$ besitzen die folgende Eigenschaft:

man kann um P eine Umgebung U so abgrenzen, dass die Abbildung $U \leftrightarrow \Phi(U)$ fast eineindeutig wird. Man kann also sagen, dass unter den obigen Voraussetzungen die Abbildung „im kleinen" fast eineindeutig wird.

Beweis: Das zu $\Phi(R)$ komplementäre Gebiet zerfällt in Gebietskomponenten $\overline{E}_\iota$. Nach den früheren Erörterungen bleibt die Funktion $n(\overline{P})$ konstant, innerhalb $\overline{E}_\iota$ — gleich n_ι. Nehmen wir zuerst ein solches $\overline{E}_\iota$ in Betracht, für welches $n_\iota \neq 0$ ist. Nach Satz II und den Voraussetzungen unseres Satzes V besitzt fast jeder Punkt $\overline{P} \in \overline{E}_\iota$ folgende Eigenschaften:

Erstens: $\infty > N(\overline{P}) \geqq 1$.

Zweitens: die Indexe des Urbildes sind alle gleich $+1$.

Daraus folgt nach Gleichung (17):

$$\sum_{k=1}^{k=N(\overline{P})} 1 = n(\overline{P}) = n_\iota$$

also

$$(24)\qquad N(\overline{P}) = n_\iota$$

d. h. $N(\overline{P})$ bleit also in $\overline{E}_\iota$ fast überall konstant (gleich n_ι).

Wir nennen $\overline{E}'_\iota$ diejenige Menge $\subset \overline{E}_\iota$ in welcher $N(\overline{P}) = n_\iota$. Es ist

$$(25)\qquad \|\overline{E}'_\iota\| = \|\overline{E}_\iota\|.$$

Betrachten wir einen Punkt $P \in \Psi(\overline{E}'_\iota)$. Wir behaupten Folgendes: man kann das Quadrat $w(P, r)$ so wählen, dass die Abbildung $w(P, r) \leftrightarrow \Phi[w(P, r)]$ fast eineindeutig wird. Zu diesem Zwecke setzen wir $P = P_1$ und es seien weiter $P_2, \ldots P_{n_s}$ die übrigen Punkte die auf $\overline{P} = \Phi(P_1)$ abgebildet werden. Jeden P_i umgeben wir mit einem Quadrate W_i, so aber, dass die W_i keine gemeinsame Punkte haben und dass

$$\Phi(W_i) \subset \overline{E}_s; \quad i = 1, 2, \ldots n_s. \tag{26}$$

Da die Indexe in P_i positiv sind, so folgt nach Satz II, (Bemerkung), dass $\overline{P} = \Phi(P_i)$ im Inneren aller Mengen $\Phi(W_i)$ liegt. P ist also auch ein innerer Punkt der Menge:

$$\prod_{i=1}^{n_s} \Phi(W_i) \subset \overline{E}_s. \tag{27}$$

Folglich kann man das Quadrat $w(P, r)$ so wählen, dass

$$\Phi[w(P, r)] \subset \prod_{i=1}^{n_s} [\Phi(W_i)]_{inn}\,{}^{7)}; \quad P = P_1. \tag{28}$$

Das so gewählte $w(P, r)$ erfüllt unsere Behauptung, wenn r genügend klein ist. Es genügt nur, sich die Art und Weise der Konstruktion von $w(P, r)$ zu vergegenwärtigen und die Formel (24) in Betracht zu ziehen.

Der Punkt P konnte beliebig in $\Psi(\overline{E}_s')$ gewählt werden. Wegen (25) gilt also unsere Behauptung fast überall in $\Psi(\overline{E}_s)$.

Ist jetzt für ein $\overline{E}_s$, $n_s = 0$, dann gehört dieses zu $\Phi(Q_0)$ überhaupt nicht und kann also bei unseren Betrachtungen sehr wohl beiseite gelassen werden. Es ist also

$$Q_0 = \sum_s{}' \Psi(\overline{E}_s) + R \tag{29}$$

wo die Summation, wie durch den Strich angedeutet wird, nur über solche s erstreckt wird, für welche n_s von Null verschieden sind. Da wegen der vor einigen Zeilen bewiesenen Behauptung unser Satz in jedem solchen $\Psi(\overline{E}_s)$ gilt, so gilt er auch wegen (29) in Q_0 (fast überall).

[7]) Wir bezeichnen mit A_{inn} das Innere der Menge A.

Bemerkung I. Ist der Index überall gleich $+1$, dann ist überall die Abbildung „im kleinen" eineindeutig.

Bemerkung II. Setzen wir nur den Index als positiv voraus, so kann man bloss Folgendes behaupten: Die Menge der Punkte P, in deren Umgebung die Abbildung „im kleinen" fast eineindeutig wird, ist überall dicht in Q_0.

Wir beschäftigen uns jetzt mit der folgenden Frage:

Was für Bedingungen müsste man zu den Voraussetzungen der Sätze IV und V hinzufügen, um die Eineindeutigkeit der Abbildung sicherzustellen? Die Voraussetzung dieser Sätze allein leisten dies nicht.

Figur I. gibt uns ein diesbezügliches Beispiel:

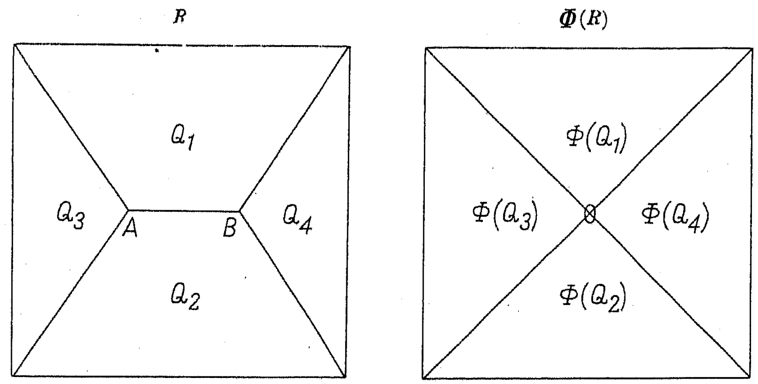

Fig. 1.

Hier entspricht Q_1 die Menge $\Phi(Q_1)$ u. s. w., dem Rande R der Rand $\Phi(R)$ eineindeutig. Die Abbildung $Q_0 \leftrightarrow \Phi(Q_0)$ ist nur fast eineindeutig, denn es entspricht hier der Strecke AB ein einziger Punkt.

§ 8. **Hilfssatz II.** *Voraussetzung*: 1) *Es besteht A'.*

2) *der Index ist fast überall $\geqq 0$.*

Behauptung: α) *Die Menge T derjenigen Punkte, wo der Index den Wert* 0 *besitzt, bildet ein Relativgebiet in bezug auf die Menge der Punkte mit wohldefinierten Indexen.*

β) *Die Menge M derjenigen Punkte, in welchen der Index < 0 ist, ist leer, d. h. der Index ist* ü b e r a l l, *wo er nur definiert ist, nicht negativ.*

Beweis: Nehmen wir erstens an, die Menge M wäre nicht leer und es wäre P ein Punkt, wo $i_P < 0$. Man könnte dann ein $w(P, r)$ so wählen, dass die Ordnung von $\Phi(P)$ in bezug auf $\Phi(k)$ negativ ist. (k ist der Rand von $w[P, r]$).

(30) Ordnung $\Phi(P)$ negativ.

Da die Indexe fast überall $\geqq 0$, so gibt es innerhalb $w(P, r)$ einen Punkt P_1, so dass:

Erstens: Der Index von P_1 und aller anderen Punkte $P_2, \dots P_m, \dots P_N$, die auf demselben Punkt $\Phi(P_1)$ abgebildet werden, wohl definiert und nicht negativ sind. $P_1, P_2, \dots P_N$, sind nur in endlicher Anzahl vorhanden.

Zweitens: P_1 liegt so nahe bei P, dass die Ordnung von $\Phi(P_1)$ in bezug auf $\Phi(k)$ negativ bleibt. Nach Satz III ist

$$(31) \qquad 0 \leqq \sum_{i=1}^{N} i_s = \text{Ordnung von } \Phi(P_1) < 0,$$

dies ist aber unmöglich.

Bleibt noch Teil α) des Lemmas zu beweisen. Wir machen die folgende leicht zu bestätigende Bemerkung. Ist in einem Punkte P der Index positiv, so ist in jeder Umgebung von P die Menge der Punkte mit positiven Indexen von positivem äusseren Masse.

Es sei π ein Punkt mit dem Index 0. Wäre π ein Punkt mit dem Index 0 und zugleich ein Häufungspunkt der Menge mit positiven Indexen, so könnte man (nach den Voraussetzungen des Hilfssatzes sowie nach dem eben bewiesen Teil β und nach der eben gemachten Bemerkung) eine Punktfolge $\{\pi_l\}$ so wählen, dass

Erstens: π_l gegen π konvergieren.

(32) Zweitens: π_l positive Indexe besitzen.

Drittens: $N(\Phi(\pi_l))$ endlich sind.

Man nehme jetzt das Quadrat $w(\pi, r)$ so, dass $\Phi(\pi)$ in $\Phi[w(\pi, r)]$ „einfach" ist. Bezeichnen wir mit ϱ den Rand von $w(\pi, r)$, so ist also die Ordnung von $\Phi(\pi)$ in bezug auf $\Phi(\varrho)$ Null. Wählen wir ein festes π_{i_0} [8]) so nahe bei π, dass die Ordnung von $\Phi(\pi_l)$ in bezug auf $\Phi(\varrho)$ Null bleibt. Es bezeichne $\pi_{i_0}^2, \pi_{i_0}^3, \dots \pi_{i_0}^N$ die weiteren Punkte in endlicher Anzahl, die sich auf $\Phi(\pi_{i_0})$ abbilden und die

[8]) π_{i_0} ist ein aus der Folge (32) festgewähltes Element.

in $w(P, r)$ liegen. Die Summe der Indexe dieser Punkte ist nach Satz III, gleich der Ordnung von $\Phi(\pi_{i_0})$ in bezug auf $\Phi(\varrho)$, also Null. Da nach Teil β des Hilfssatzes in keinem dieser Punkte die Indexe negativ sein können, so sind sie alle Null. Also ist der Index in π_{i_0} Null gegen die Annahme (32[3]).

§ 9. *Verallgemeinerung des Satzes IV.*

Voraussetzung: 1) *A' besteht.*

2) *Die Abbildung $R \leftrightarrow \Phi(R)$ ist eineindeutig.*

3) *Der Index ist positiv in einer überall dichten Menge.*

4) *Der Index ist fast überall nicht negativ.*

Behauptung: Die Abbildung $Q_0 \leftrightarrow \Phi(Q_0)$ ist fast eineindeutig.

Beweis: Man muss nur beweisen, dass die Menge der Punkte mit dem Index Null leer ist. Dies folgt aber sofort aus dem Hilfssatze II und aus dem Punkt 3) unserer Voraussetzung.

Satz VI. *Voraussetzung*: 1) *Die Abbildung $R \leftrightarrow \Phi(R)$ ist eineindeutig.*

2) *Der Index ist fast überall nicht negativ.*

3) *A' besteht.*

4) *$N(\overline{P})$ ist endlich.*

Behauptung: *Die Abbildung $Q_0 \leftrightarrow \Phi(Q_0)$ ist eineindeutig.*

Beweis: Aus Bedingung 4 folgt sofort, dass der Index überall definiert ist, aus dem Hilfssatze II, dass er überall nicht *negativ* ist. Nach demselben Lemma ist also die Menge T der Punkte mit dem Index Null offen. Die in Q_0 liegende Komplementärmenge C von T ist also abgeschlossen. C besteht also aus Punkten, die innerhalb R liegen und die positive Indexe besitzen, sowie auch aus R selbst. Wir sagen jetzt: zu C gehören keine anderen Punkte von $\Psi[\Phi(R)]$, als nur R selbst. Es genügt zu zeigen, dass jeder Punkt P von $\Psi[\Phi(R)]$, der nicht zu R gehört, den Index Null besitzt. Hätte nämlich P einen positiven Index, dann könnte man $\bar{p}$ so nahe bei $\Phi(P)$ wählen, dass wenigstens ein Punkt p des Urbildes $\Psi(\bar{p})$ einen positiven Index besitzt, und dass $\bar{p}$ selbst ein äusserer Punkt der Kurve $\Phi(R)$ ist. Denn $\overline{P} = \Phi(P)$ gehört zu $\Phi(R)$ und ist also ein Häufungspunkt der inneren sowie der äusseren Punkte des $\Phi(R)$. Ein äusserer Punkt $\bar{p}$ hätte also einen Punkt p des Urbildes mit positivem Indexe. Dies ist aber nach Satz III unmöglich!

Der Beweis wird weiter wie folgt geführt: Wir bemerken, dass die Abbildung $C \leftrightarrow \Phi(C)$ eineindeutig ist. In der Tat ist $R \leftrightarrow \Phi(R)$ nach der Voraussetzung eineindeutig. Die Menge $C - R$ wird nach dem eben Gesagten in das Innere $\Phi(R)$ transformiert und jedem Punkte von $C-R$ entspricht nach Satz III genau ein Punkt des Inneren. C ist also ein eineindeutiges und stetiges Bild einer Jordan'schen Kurve $\Phi(R)$ une ihres Inneren. C besteht also selbst aus einer Jordan'schen Kurve (nämlich R) samt Inneren. v. z. bw.

§ 10. Dieses Kapitel werde ich mit einem Satze beendigen, den ich zusammen mit Herrn Banach gewonnen habe.

Satz VII. *Voraussetzung: dieselben wie bei Satz IV.*

Behauptung: ist für einen Punkt $\overline{P}$, $N(\overline{P})>1$, so ist das Urbild $\Psi(\overline{P})$ eine zusammenhängende Menge.

Beweis: Wäre $\Psi(\overline{P})$ nicht zusammenhängend, so könnte man ein Polygon W so konstruieren, dass ein Teil Q_1 von $\Psi(\overline{P})$ im Inneren, der zweite Teil Q_2 ausserhalb W liegt. Nennen wir I das Innere von W, dann folgt leicht, dass $\Phi(Q_1)=\overline{P}$ im Inneren von $\Phi(W)$ liegt. Betrachten wir nämlich $P \varepsilon Q_0 \subset I$. Nach Voraussetzung ist P ein Häufungspunkt der Punkte P_n mit positiven Indexen. Die Ordnung von $\Phi(P_n)$ [9] in bezug auf $\Phi(W)$ ist also positiv. Daraus folgt, dass auch die Ordnung von $\Phi(P)=\overline{P}$ in bezug auf $\Phi(W)$ positiv ist, d. h. $\Phi(Q_1)=\overline{P}$ ist ein innerer Punkt von $\Phi(I)$. Andererseits wird auch Q_2 in $\overline{P}$ abgebildet. Man kann also die Umgebung V von Q_2 so wählen, dass $\Phi(V_2)$ noch ganz aus inneren Punkten von $\Phi(I)$ besteht. Jeder Punkt $\Phi(V_2)$ ist wenigstens „zweifach", er gehört nämlich zu $\Phi(V_2)$ und $\Phi(I)$. V ist (als Umgebung) eine Menge von positivem Masse und wird also in eine eben solche Menge abgebildet. In einer Menge von positivem Masse wäre also $N(\overline{P})>1$, was nach Satz IV unmöglich ist.

Bemerkung: Sind also die Voraussetzungen des Satzes IV erfüllt und weiss man weiter, dass $N(\overline{P})$ eine kleinere Mächtigkeit als Kontinuum besitzt, dann folgt, dass die Abbildung $Q_0 \leftarrow\rightarrow \Phi(Q_0)$ eineindeutig ist. Wir überlassen es dem Leser, auf ähnliche Weise Satz V. zu verallgemeinern.

II.

§ 11. Eingeschaft A besteht sicher dann, wenn

$$x=\varphi(u,v); \quad y=\psi(u,v)$$

[9]) Nan nehme jedes P_n so an, dass alle anderen Punkte des Urbildes $\Psi[\Phi(P_n)\}$ in endlicher Anzahl vorhanden sind und dass sie alle nur positive Indexe besitzen.

die Lipschitz'schen Bedingungen erfüllen, d. h. wenn

$$(32) \quad \begin{aligned} |\varphi(u+h, v+k)-\varphi(u,v)| &\leq K.\sqrt{h^2+k^2} \\ |\psi(u+h, v+k)-\psi(u,v)| &\leq K.\sqrt{h^2+k^2}. \end{aligned}$$

Nach Rademacher [10]) ist die Funktion $D(P)$ fast überall gleich

$$D(P)=|I(u,v)|,$$

wo

$$(33) \quad I(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u}, & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

im Punkte $P(u,v)$.

Wir betrachten einen solchen Punkt $P_0(u_0,v_0)$, in welchem die Funktionen φ und ψ total differenzierbar sind und nehmen $I(u_0,v_0)$ positiv an. In diesem Falle ist der Index i_0 im Punkte P definiert und gleich $+1$. Diese Tatsache beweisen wir nach einer von Rademacher [10]) herrührenden Methode. In der Umgebung von $P(u_0,v_0)$ gilt

$$(34) \quad \begin{aligned} \varphi(u_0+h,v_0+k) &= \varphi(u_0,v_0+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)_{u_0,v_0}.h+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{u_0,v_0}.k+R_1.\sqrt{h^2+k^2} \\ \psi(u_0+h, v_0+k) &= \psi(u_0,v_0)+\frac{\partial\psi}{\partial u}.k+\frac{\partial\psi}{\partial u}.k+R_2.\sqrt{h^2+k^2} \end{aligned}$$

R_1 und R_2 konvergieren nach 0, wenn

$$\sqrt{h^2+k^2}\rightarrow 0.$$

Es bezeichne Φ_1 die folgende Hilfsabbildung:

$$(35) \quad \begin{aligned} \varphi(u_0+h, v_0+k) &= \varphi(u_0,v_0)+\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0 v_0).h+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0,v_0).k \\ \psi(u_0+h, v_0+k) &= \psi(u_0,v_0)+\frac{\partial\psi}{\partial u}.h+\frac{\partial\psi}{\partial v}.k. \end{aligned}$$

Für die Abbildung Φ_1 ist der Index überall definiert und gleich ± 1. Die Ordnung von $\Phi_1(P_0)$ in bezug auf $\Phi_1(\Omega)$ ist ± 1; Ω bezeichnet hier den Rand des Quadrates $w(P,r)$.

Nach (34) ist es aber möglich, wenigstens wenn r genügend klein ist, stetig $\Phi_1(\Omega)$ in $\Phi(\Omega)$ so zu deformieren, dass dabei $\Phi(P_0)=$

[10]) Rademacher: Über tot. Differenzierbarkeit Math. Ann. 1919, 1920.

$=\Phi_1(P_0)$ nicht berührt wird. Also ist auch die Ordnung von $\Phi(P_0) = \Phi_1(P_0)$ in bezug auf $\Phi(\Omega)$ gleich ± 1, w. z. b. w.

Wird sind jetzt imstande, in den Sätzen IV und V die Eigenschaft A' und das Positivsein der Indexe durch die Bedingung zu ersetzen, dass die Funktionaldeterminante $I(u, v)$ positiv sein soll. Und wir erhalten:

Satz IV'. *Voraussetzung:* 1) *φ und ψ sind à condition de Lipschitz.*
2) *$I(u, v) > 0$ fast überall.*
3) *$R \longleftrightarrow \Phi(R)$ eineindeutig.*

Behauptung: $Q_0 \longleftrightarrow \Phi(Q_0)$ *fast eineindeutig.*

Bemerkung I: Existiert $I(u, v)$ überall in Q_0 und ist $I(u, v) > 0$, dann ist die Abbildung $Q_0 \longleftrightarrow \Phi(Q_0)$ eineindeutig.

Bemerkung II: Ist $I(u, v)$ fast überall $\geqslant 0$, dann können wir nur schliessen, dass $N(\overline{P}) = 1$ fast überall im Inneren von, bezw. $N(\overline{P})$ gleich Null ausserhalb, $\Phi(R)$.

Satz V'. *Voraussetzung:* 1), 2) *wie beim Satz IV'.*

Behauptung: In der Umgebung fast jeden Punktes ist die Abbildung fast eineindeutig „im kleinen".

Bemerkungen: ähnlich wie beim Satze IV'. Andere Sätze können in änlicher Weise geändert werden.

§ 12. Die Formel der Substitution neuer Veränderlichen in Integralen werden wir jetzt unter sehr allgemeinen Bedingungen beweisen.

Die Abbildungsfunktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ sollen der Lipschitz'schen Bedingung genügen.

Es sei weiter $F(x, y)$ eine stetige in $\overline{E}$ definierte Funktion. Die Funktion

$$F[\varphi(u, v),\ \psi(u, v)] = f(u, v) \tag{36}$$

ist wieder stetig.

Dann gilt

Satz VIII. *Voraussetzung:* 1) *Die Abbildungsfunktionen genügen der Lipschitz'schen Bedingung.*
2) *$F(x, y)$ ist stetig.*

Behauptung:

$$\int_{Q_0} f(u, v) \cdot I(u, v)\, du\, dv = \int_{\overline{E}} F(x, y) \cdot n(x, y)\, dx\, dy \text{*)}. \tag{37}$$

*) Anm. bei der Korr. Das Integrall rechts existiert auch für semirektifizierbare Kurven. Wenn also auch das Integral links vorhanden ist so kann man Formel (37) anal. in Falle semirektifizierbaren Kurven hinschreiben.

Beweis: Wir beginnen mit folgenden drei Bemerkungen:

Bemerkung 1) (zum Satz VIII). Es sei J eine geschlossene, stetige Kurve in $\overline{E}$; $\{W_n\}$ einer Folge von Polygonen, die J approximieren, so aber, dass die Ecken der $\{W_n\}$ an J liegen. Wir bezeichnen mit $n_m(\overline{P})$ die Ordnung von $\overline{P}$ in bezug auf W_m. Natürlich kann $\overline{P}$ nicht auf den betreffenden W_m liegen. Dann ist, falls $\overline{P}$ nicht auf J liegt, für genügend grosses m

$$n_m(\overline{P}) = n(\overline{P}) \tag{38}$$

also

$$\lim_{m=\infty} n_m(\overline{P}) = n(\overline{P}). \tag{39}$$

Bemerkung 2) (zum Satze VIII). Die Ordnung $n_m(\overline{P})$ ist gleich der Differenz der positiven und negativen Kreuzungen eines von $\overline{P}$ ausgehenden Halbstrahles mit W_m, wenn natürlich dieser Halbstrahl keine Ecke von W_m trifft.

Bemerkung 3) (zum Satze VIII) Teilen wir Q_0 in Teildreiecke. Betrachten wir eine Folge solcher Dreiecksteilungen, so dass die Breite eines einzelnen Dreieckes Δ_m der m-ten Teilung nach Null konvergiert. Wir konstruieren eine stetige Abbildung „Φ_m", die „Φ" approximiert folgendermassen:

$\Phi_m = \Phi$ in den Ecken der m-ten Teilung. In jedem Partialdreiecke Δ_m mit den Ecken e_1^m, e_2^m, e_3^m wird durch Φ_m eine Abbildung geschaffen, die Δ_m in ein anderes Dreieck $\overline{\Delta}_m$ transformiert, so aber, dass jedem Punkte $P \varepsilon \Delta_m$ ein Punkt $\overline{P} \varepsilon \overline{\Delta}_m$ entspricht, der in bezug auf die Ecken $\Phi(e_1^m)$, $\Phi(e_2^m)$, $\Phi(e_3^m)$ dieselben baryzentrischen (Schwerpunkts) Koordinaten besitzt. Durch Φ_m geht R in eine Kurve $\Phi_m(R) = W_m$ über, die $\Phi(R)$ approximiert. Dem $\overline{\Delta}_m$ schreiben wir die Zahl $+1$ (resp. -1) zu, wenn die Indikatrix $\Phi(e_1^m)$, $\Phi(e_2^m)$, $\Phi(e_3^m)$ positiv (resp. negativ) ist. Man überzeugt sich leicht, dass die Differenz r der positiven und negativen den Punkt $\overline{P}$ überdeckenden Dreiecke $\overline{\Delta}_m$ eben der Differenz der positiven und negativen Kreuzungen eines von $\overline{P}$ ausgehenden Halbstrahles mit $\Phi_m(R) = W_m$ gleich ist; und da diese letzte Zahl nach Bemerkung 2 der Ordnung $n_m(\overline{P})$ gleicht, so folgt $r = n_m(\overline{P})$.

Daraus folgt ein sehr einfacher Beweis des Satzes II. Halten wir uns die Bedingungen dieses Satzes vor den Augen. Nehmen wir $\overline{P} \varepsilon \overline{E}$, so dass $n(\overline{P}) \neq 0$. Wir wollen zeigen:

$$\overline{P} \varepsilon \Phi(Q_0).$$

Andernfalls könnte $\overline{P}$ auch nicht zu $\Phi_m(Q_0)$ gehören, für genügend grosses m. Die Differenz der positiven und negativen den Punkt $\overline{P}$ überdeckenden $\overline{\Delta}_m$ wäre also Null. Also wäre auch die Ordnung von $\overline{P}$ in bezug auf $W_m = \Phi_m(R)$ Null (Bem. 3). Dies ist also unmöglich (nach Bem. 1).

Wir kehren jetzt zum Beweise unseres Satzes VIII. Bezeichnen wir mit $\varphi_m(x, y)$ und $\psi_m(x, y)$ die, die Abbildung „Φ_m" definierenden Funktionen. Da nach der Voraussetzung φ und ψ der Lipschitzschen Bedingung genügen, so können wir φ_m und ψ_m so wählen [11], dass

1) Die partiellen Derivierten

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial u}, \quad \frac{\partial \varphi_m}{\partial v}, \qquad \frac{\partial \psi_m}{\partial u}, \quad \frac{\partial \psi_m}{\partial v},$$

gleichmässig beschränkt sind.

2) $$\lim \frac{\partial \varphi_m}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}; \ldots$$

fast überall,

$$\lim \frac{\partial \varphi_m}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} \ldots \qquad \text{u. s. w.}$$

Die Giltigkeit unseres Satzes für die Abbilduug Φ_m sehen wir sofort ein. Also

$$(40) \qquad \int_{Q_0} f_m(u, v) \,.\, I_m(u, v)\, du\, dv = \int_{\overline{E}} n_m(x, y) \,.\, F(x, y)\, dx\, dy.$$

$I_m(u, v)$ bedeutet hier die Funktionaldeterminante des Funktionensystems φ_m, ψ_m und $f_m(u, v) = F[\varphi_m(u, v)\, \psi_m(u, v)]$;

$\lim f_n(u, v)$ ist gleich $f(u, v)$. Es genügt also noch zu zeigen, dass wir in (40) zur Grenze übergehen können.

In der Tat, infolge der Bedingungen 1 und 2 können wir schreiben

$$(41) \qquad \lim_{m \to \infty} \int_{Q_0} f_m(u, v)\, I_m(u, v)\, du\, dv = \int_{Q_0} f(u, v) \,.\, I(u, v)\, du\, dv$$

andererseits ist

$$(42) \qquad \lim_{m \to \infty} \int_{\overline{E}} n_m(x, y) \,.\, F(x, y)\, dx\, dy = \int_{\overline{E}} n(x, y) \,.\, F(x, y)\, dx\, dy$$

wenn nur die Funktionen $n_m(x, y)$ eine summierbare obere Grenze besitzen. Um diese obere Grenze zu finden, werden wir uns einer

[11]) Siehe [10]). Teil 2.

Eigenschaft der rektifizierbaren Kurven bedienen, die Herr Banach in seinen Vorlesungen an der Lemberger Universität im Wintersemester 1922/23 bewiesen hat.

Es sei W eine stetige, rektifizierbare Kurve in $\overline{E}$ und es sei $\overline{P}_0$ ein fester nicht auf W liegender Punkt. Wir fassen denjenigen von $\overline{P}_0$ ausgehenden Halbstrahl ins Auge, der mit der positiven X-Axe den Winkel Θ einschliesst und bezeichnen mit $g_W(\overline{P}_0, \Theta)$ die a b s o l u t e Anzahl der Kreuzungen dieses Halbstrahles mit W; nach Herrn Banach stellt g eine für festes $\overline{P}_0$ summierbare Funktion von Θ dar.

Wir setzten jetzt $W = \Phi(R)$ und nehmen fur $\overline{P}_0$ einen solchen Punkt, der in bezug auf j e d e Kurve $\Phi_m(R)$ die Ordnung Null besitzt. Dann ist für jedes m

$$(43) \qquad 0 \leqq g_{\Phi_m(R)}(P_0, \Theta) \leqq g_{\Phi(R)}(P_0, \Theta).$$

Es sei $\overline{P}$ ein auf einem vom $\overline{P}_0$ ausgehenden Halbstrahle liegender Punkt, so aber, dass $\overline{P}$ wieder nicht auf $\Phi_m(R)$ und $\Phi(R)$ liegt. Die Differenz $d_m(\overline{P})$ der positiven und negativen Kreuzungen eines von $\overline{P}$ ausgehenden Halbstrahles mit $\Phi_m(R)$ ist kleiner als $g_{\Phi_m(R)}(\overline{P}_0, \Theta)$ und nach (43) a fortiori kleiner als $g_{\Phi(R)}(\overline{P}_0, \Theta)$

Da

$$d_m = n_m(P)$$

so folgt endlich

$$|n_m(\overline{P})| \leqq g_{\Phi(R)}(\overline{P}_0, \Theta).$$

Wir können also als die gesuchte obere Grenze setzen: $g_{\Phi(R)}(\overline{P}_0, \Theta)$.

Es ist ziemlich leicht, unsere Resultate für solche summierbare Funktionen zu verallgemeinern, für welche die beiden Integrale

$$(45) \qquad \int_{\overline{E}} F(x, y)\, n(x, y)\, dx\, dy \quad \text{und} \quad \int f(u, v) \,.\, I(u, v)\, du\, dv$$

existieren.

Wir nehmen erstens $F(x, y)$ messbar und beschränkt an und es sei $\{F_m(x, y)\}$ $m = 1, 2, \ldots$ eine Folge stetiger, gleichmässig beschränkter Funktionen, die fast überall gegen $F(x, y)$ konvergieren.

$$(46) \qquad |F_m| \leqq H; \quad \lim F_m = F.$$

Da der Satz für F_m gilt, so ist

$$(47) \qquad \int_{Q_0} f_m(u, v) \,.\, I(u, v)\, du\, dv = \int_{\overline{E}} F_m(x, y)\, n(x, y)\, dx\, dy$$

*) Man kann auch die unter 5) zitierte Abhandlung zum Rate ziehen; der Beweis verlauft sogar einfacher. Anm. bei der Korrektur.

und wir erhalten, indem wir zu Grenze übergehen,

$$\int_{Q_0} f(u, v) \,.\, I(u, v)\, du\, dv = \int_{E} F_m(x, y)\, n(x, y)\, dx\, dy \tag{48}$$

Den allgemeinen Fall einer beliebigen summierbaren F reduzieren wir auf den eben bewiesenen. In der Tat kann F als Grenze einer solchen Folge von sumierbaren, beschränkten Funktionen F_k betrachtet werden dass

$$|F_k(x, y)| \leqq F(x, y). \tag{49}$$

Daraus folgt

$$|f_k(u, v)| \leqq f(u, v) \tag{50}$$

und also

$$\int_{Q_0} f(u, v) \,.\, I(u, v)\, du\, dv = \int_{E} F(x, y)\, n(x, y)\, dx\, dy.$$

Der vorliegende Satz ist einer interessanten Erweiterung fähig. Bevor wir aber diese Erweiterung aussprechen, wollen wir den auf Seite 53 Formel (14) zitierten Satz von Herrn Banach verallgemeinern.

§ 13. **Hilfssatz III.** *Es sei Q eine messbare, zu Q_0 gehörende Punktmenge; weiter sei $N_Q(\overline{P})$ eine in $\overline{E}$ definierte Funkiion, die gleich der Anzahl derjenigen Punkte ist, die zum Urbilde $\Psi(\overline{P})$ gehören und zugleich in Q liegen. Dann ist*

$$\int_{Q_0} D(u, v)\, du \,.\, dv = \int_{E} N_Q(x, y)\, dx\, dy. \tag{51}$$

Beweis: Man definiert erstens die Mengen $\mathfrak{B}^Q_m$, $B^Q_m \dots$ etc. in analoger Weise wie B_m, $\mathfrak{B}_m \dots$ etc.

So z. B. ist B^Q_m die Menge aller derjenigen Punkte $\overline{P}$, die in $\Phi(Q)$ liegen, und die das Bild von wenigstens m zu Q gehörender Punkte sind. Das Integrale der Funktion $N_Q(\overline{P})$ ist gleich

$$\int_{E} N_Q(x, y)\, dx\, dy = \sum_{m=1}^{\infty} m \,.\, \|\mathfrak{B}^Q_m\| \tag{52}$$

und es bleibt nur zu zeigen

$$\int_{E} D(u, v)\, du\, dx = \sum_{m=1}^{\infty} m \,.\, \|\mathfrak{B}^Q_m\|. \tag{53}$$

Da sich diejenige Punktmenge $Q' \subset Q$, in welcher $D(u, v) = 0$, in eine Nullmenge transformiert, so können wir fast überall in Q

$$D(P) > 0 \tag{54}$$

voraussetzen. In diesem Falle sind die Mengen

$$A_m \overset{df}{=} \Psi(\mathfrak{B}^Q_m) \tag{55}$$

l messbar. Wir haben fast überall in A_m

$$D(P) = D_{A_m}(P)\ ^{12}). \qquad \text{Hilfssatz I!} \tag{56}$$

(Es kann sogar gezeigt werden, dass $D_{A_m}(P) = 0$ fast überall in $Q_0 - A_m$). Betrachten wir die Summe

$$\sum_{i=1}^{s^2} F(A_m \,.\, Q_{i,s}) = \sum_{i=1}^{s^2} F_{A_m}(Q_{is}) = \sum_{i=1}^{s^2} \|\Phi(A_m \,.\, Q_{is})\| = \sum_{k=1}^{s^2} k \,.\, \|T_{kms}\|. \tag{57}$$

Die Punktmengen Q_{is} waren beim Beweise des Satzes I definiert und T_{kms} bezeichnet die Menge derjenigen Punkte, die zu je k verschiedenen Mengen $\Phi(A_m \,.\, Q_{is})$ gehören (s und m konstant; $i = 1, 2 \dots s^2$).

Da die Mengen

$$T_{m+1,\,m,\,s},\ T_{m+2,\,m,\,s}, \dots\ T_{s^2,\,m,\,s}$$

leer sind, so können wir (57) wie folgt schreiben:

$$\sum_{i=1}^{s^2} F_{A_m}(Q_{is}) = \sum_{k=1}^{m} k \,.\, \|T_{kms}\|. \tag{57*}$$

Wir bemerken, dass

$$\operatorname*{Lim}_{s \to \infty} T_{kms} = 0 \quad \text{wenn} \quad k < m \tag{58¹}$$

und

$$\operatorname*{Lim}_{s \to \infty} T_{mms} = \mathfrak{B}^Q_m. \tag{58²}$$

Daraus folgt nach (57*) und (58)

$$\lim_{s \to \infty} \sum_{i=1}^{s^2} F_{A_m}(Q_{is}) = m\, \|\mathfrak{B}^Q_m\|. \tag{58³}$$

[12]) Formel (6), (7) wo auch $D_Q(P)$ für beliebige messbare Mengen Q definiert wurde.

Wir können schreiben

$$\sum_{i=1}^{s^2} F_{A_m}(Q_{is}) = \sum_{i=1}^{s^2} \frac{F_{A_m}(Q_{is})}{\|Q_{is}\|} \|Q_{is}\| \leqq \int_{Q_0} D_{Am}(P)\, du\, dv. \tag{59}$$

Es sei $D_{smi}(P)$ eine Funktion, die in Q_{is} gleich $\frac{F_{Am}(Q_{is})}{\|Q_{is}\|}$ und sonst Null ist. Wir setzen weiter

$$D_{sm}(P) = \sum_{i=1}^{s^2} D_{smi}(P). \tag{60}$$

Aus der Definition von $D_{sm}(P)$ folgt nach (59)

$$\sum_{i=1}^{s^2} F_{Am}(Q_{is}) = \int_{Q_0} D_{sm}(P)\, du\, dv \leqq \int_{Q_0} D_{Am}(P)\, du\, dv. \tag{59*}$$

Man sieht leicht ein, dass

$$D_{sm}(P) \geqq d_{sm}(P). \tag{61}$$

Hier bezeichnen wir mit $d_{sm}(P)$ den Limes inf. von $\frac{F_{Am}[K(P,r)]}{\|K(P,r)\|}$, wo $r \leqslant \frac{1}{s}$ und wo $K(P,r)$ irgendein Quadrat ist, das P enthält und dessen Seite die Länge r hat. Also bestehen folgende Beziehungen:

$$(62^1)\ \alpha)\quad 0 \leqq \int_{Q_0} d_{sm}(P)\, du\, dv \leqq \int_{Q_0} D_{sm}(P)\, du\, dv \leqq \int_{Q_0} D_{Am}(P)\, du\, dv.$$

β) fast überall

$$(62^2)\quad \lim_{s\to\infty} d_{sm}(P) = D_{Am}(P),$$

$$(62^3)\ \gamma)\quad \lim_{s\to\infty} \int_{Q_0} d_{sm}(P)\, du\, dv = \int_{Q_0} D_{Am}(P)\, du\, dv.$$

Aus (58) (59) (60) (61) (62) schliessen wir

$$\int_{Q_0} D_{Am}(P)\, du\, dv = \lim_{s\to\infty} \sum_{i=1}^{s^2} F_{Am}(Q_{is}) \tag{63}$$

also infolge von (58^3)

$$\int_{Q_0} D_{Am}(P)\, du\, dv = \int_{Am} D(P)\, du\, dv = m\, \|\mathfrak{B}^0_m\|; \tag{64}$$

endlich

$$\int_{\Sigma A_m} D(P)\, du\, dv = \sum_{m=1}^{\infty} m\, \|\mathfrak{B}^0_m\|. \tag{65}$$

Es genügt nur noch zu zeigen, dass $D(P) = 0$ fast überall in $Q_0 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m$. Die Menge $Q_0 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m$ ist identisch mit der Urbildmenge $\Psi(B^0_\infty)$. Wäre also in $\Psi(B^0_\infty)$ nicht fast überall $D(P) = 0$, dann wäre also nach einer Bemerkung zum Hilfssatz I

$$\|B^0_\infty\| > 0. \tag{66}$$

Dies ist aber unmöglich, da wir haben

$$\|B^0_\infty\| \leqq \|B_\infty\|. \tag{67}$$

§ 14. **Satz IX.** *Voraussetzung*: 1) *Eigenschaft A.*
2) *Der Index ist beschränkt in* Q_0.

Behauptung:

$$\int_{Q_0} f(u, v) \cdot D(u, v) \cdot i(u, v) \cdot du \cdot dv = \int_{\bar{E}} n(x, y) \cdot F(x, y) \cdot dx \cdot dy\ ^{13})$$

für jede stetige Funktion F.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Formel.

$$\int_{Q_0} D(u, v) \cdot i(u, v)\, du\, dv = \int_{\bar{E}} n(x, y)\, dx\, dy. \tag{68}$$

Zu diesem Zwecke beweisen wir, dass die in (68) vorkommenden Integrale ihren Sinn besitzen. Da $i(u, v)$ beschränkt ist, so genügt es zu zeigen, dass $i(P) = i(u, v)$ messbar ist. Wir trachten also $i(P)$ als limes einer Folge von messbaren Funktionen $i_s(P)$ zu bekommen. Die $i_s(P)$ werden wir wie folgt erhalten:

Wir teilen Q_0 in Teilquadrate Q_{is} ein, so wie beim Beweise des Satzes I. Es sei P ein Punkt von Q_{is}, der nicht zu $\Psi[\Phi(k_{is})]$ gehört, wo k_{is} die Grenze Q_{is} bezeichnet. Dann ist $i_s(P)$ ex definitione gleich der Ordnung von $\Phi(P)$ in bezug auf $\Phi(k_{is})$. Man sieht, dass

$$i_s(u, v) \to i(u, v)$$

fast überall dort, wo überhaupt der Index existiert.

[13]) Wir setzen $i(u, v) = 0$, dort wo der Index nicht definiert ist.

Also ist $i(u,v)$ „l" messbar. Andererseits ist $n(x,y)$ in $\overline{E}$ sumierbar. Denn es ist

$$\sum_{k=1}^{N(\overline{P})} i_k = n(x,y) \qquad \text{Satz III}$$

i_k bezeichnen hier die Indexe der Urbildmenge $\Psi(\overline{P})$. Da i_k gleichmässig durch eine Konstante H beschränkt sind, so folgt:

$$(69) \qquad |n(x,y)| \leqq H \,.\, N(\overline{P})$$

[$N(\overline{P})$ ist aber summierbar]. Wir teilen jetzt die Menge Q — wo der Index definiert ist[14]) — in Teilmengen Q_s, so dass in jedem Q_s[15]) der Index i_s gleich $i_s = s$ ist. Nach dem dritten Hilfssatze können wir schreiben:

$$(70) \qquad \int\limits_{Q_0} i(u,v)\,.\,D(u,v)\,du\,dv = \int\limits_{Q} i(u,v)\,.\,D(u,v)\,du\,dv\,^{14}) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} i \int\limits_{\overline{E}} N_{Q_i}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\overline{E}} \sum_{-\infty}^{+\infty} i\,.\,N_{Q_i}(x,y)\,dx\,dy.$$

Nach Satz III ist aber

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} i\,N_{Q_i}(x,y) = n(x,y)$$

fast überall.

Daraus folgt nach (70):

$$(71) \qquad \int\limits_{Q_0} i(u,v)\,.\,D(u,v)\,du\,dx = \int\limits_{\overline{E}} n(x,y)\,dx\,dy.$$

Wir kommen jetzt zum allgemeinen Falle zurück. Wir bezeichnen mit f_{is} den Wert der Funktion $f(u,v)$ im Mittelpunkte des Quadrates Q_{is}. Es sei ε eine beliebige positive Zahl. Wir wählen.

1) $\delta(\varepsilon)$ so, dass für beliebige zwei Punkte x_1, y_1 und x_2, y_2 deren Abstand kleiner als δ wird, der absolute Wert der Differenz $F(x_1,y_1) - F(x_2,y_2)$ kleiner als ε ausfällt.

2) $\delta_1(\varepsilon)$ so, dass zwei beliebigen Punkten (u_1,v_1), (u_2,v_2), deren

[14]) Die Menge Q ist messbar; ausserhalb Q gilt fast überall $D(P)=0$ also auch exdefinitione $i(P) = i(u,v) = 0$.

[15]) Die Mengen $\{Q_s\}$ sind messbar.

Distanz kleiner als δ_1 ist, solche Punkte $(x_1\,y_1)$ $(x_2\,y_2)$ als Bilder entsprechen, deren Entfernung kleiner als δ wird.

Wir nehmen jetzt die Teilung so dicht au, dass der Durchmesser der Q_{is} kleiner als δ_1 wird und dass

$$(72) \qquad \left| \sum_{i=1}^{s^2} f_{is}\,.\int\limits_{Q_{is}} D(u,v)\,.\,i(u,v)\,.\,du\,dv - \int\limits_{Q_0} f(u,v)\,.\,i(u,v)\,D(u,v)\,du\,dv \right| < \varepsilon.$$

Aus dem soeben bewiesenen Spezialfalle folgt:

$$(73) \qquad \sum_{i=1}^{s^2} f_{is}\,.\int\limits_{Q_{is}} D(u,v)\,.\,i(u,v)\,du\,dv = \sum_{i=1}^{s^2} f(u,v) \int\limits_{\overline{E}} n_{is}(x,y)\,dx\,dy\,^{16})$$

n_{is} ist das Symbol der Ordnung des Punktes $\overline{P}(x,y)$ in bezug auf das Bild der Randkurve von Q_{is}. Die letzte Summe rechts wollen wir mit $\sum\limits_{i=1}^{s^2} \int\limits_{\overline{E}} n_{is}(x,y)\,F(x,y)\,dx\,dy$ vergleichen.

Es ist

$$(74) \qquad \left| \sum_{i=1}^{s^2} f_{is} \int\limits_{\overline{E}} n_{is}(x,y)\,dx\,dy - \sum_{i=1}^{s^2} \int\limits_{\overline{E}} F(x,y)\,.\,u_{is}(x,y)\,dx\,dy \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{s^2} \left| \int\limits_{\overline{E}} n_{is}(x,y)\,[F(x,y) - f_{is}]\,dx\,dy \right| \leqq \varepsilon \sum_{i=1}^{s^2} \int\limits_{\overline{E}} |n_{is}(x,y)|\,dx\,dy\,^{17}) \leqq$$

$$\leqq \varepsilon\,.\,H\,.\sum_{i=1}^{s^2} \int\limits_{\overline{E}} N_{Q_{is}}(x,y)\,dx\,dy\,^{18}) = \varepsilon\,H\,.\int\limits_{\overline{E}} N(x,y)\,dx\,dy\,^{19}).$$

Es ist aber

$$(75) \qquad \sum_{i=1}^{s^2} \int\limits_{\overline{E}} F(x,y)\,n_{is}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\overline{E}} F(x,y)\,.\,n(x,y)\,dx\,dy$$

da

$$(76) \qquad \sum_{i=1}^{s^2} n_{is}(x,y) = n(x,y).$$

[16]) Man wende die Formel (68) auf das Quadrat Q_{is} an (statt auf Q_0).

[17]) Man denke nur noch, wie die Zahl $\delta_1(\varepsilon)$ gewählt wurde.

[18]) $|n_{is}| \leqq H\,.\,N_{Q_i}{}^{s}$.

[19]) $\Sigma N_{Q_{i,s}} = N.$

Die Formeln (72), (73), (74), (75) ergeben:

$$(77)\qquad \left|\int_{\overline{E}} f(u,v)\,.\,i(u,v)\,.\,D(u,v)\,du\,dv - \int_{\overline{E}} F(x,y)\,n(x,y)\,dx\,dy\right| < \varepsilon + \varepsilon\,.\,H.\int_{\overline{E}} N(x,y)\,dx\,dy.$$

Indem man in (77) zur Grenze übergeht, folgt

$$\int_{Q_0} f(u,v)\,.\,i(u,v)\,D(u,v)\,du\,dv = \int_{\overline{E}} F(x,y)\,n(x,y)\,dx\,dy.$$

Eingegangen: Mai 1924 [10]).

[10]) ursprünglich in englicher Sprache.

Sur un ensemble analytique plan, universel pour les ensembles mesurables *(B)*.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

(Extrait d'une lettre adressée à M. N. Lusin).

Pendant votre séjour à Varsovie, en octobre 1927, vous avez attiré mon attention sur l'intérêt que présenterait une construction d'*un ensemble (A) plan, dont les intersections par les droites parallèles à l'axe d'ordonnées donnent tous les ensembles mesurables B linéaires, et seulement des ensembles mesurables B*. Permettez de vous communiquer un exemple d'un tel ensemble.

Comme on le sait, il existe un ensemble universel G_δ dans l'espace R_3 à trois dimensions, c'est-à-dire un ensemble G_δ situé dans R_3, soit U, tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan YOZ on obtient tous les ensembles G_δ plans possibles [1]).

Désignons par Q l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'ensemble U, tels qu'il n'existe aucun point (ξ, η, ζ) de U, où $\xi = x$, $\eta = y$ et $\zeta > z$. L'ensemble U étant mesurable B, l'ensemble Q sera, d'après M. Mazurkiewicz, un ensemble CA (complémen-

[1]) Voici comment on pourrait démontrer l'existence d'un ensemble universel *G_δ plan*. Comme j'ai démontré (*Fund. Math.* t. VII, p. 200) il existe un ensemble universel fermé dans l'espace à 3 dimensions, c'est-à-dire un ensemble fermé F situé dans R_3, tel qu'en le coupant avec les plans parallèles au plan YOZ on obtient tous les ensembles fermés plans. La projection $P(F)$ de l'ensemble F sur le plan XOY sera un ensemble universel F_σ plan (puisque les ensembles F_σ linéaires coïncident avec les projections des ensembles fermés plans, comme je l'ai démontré dans les *Fund. Math.* t. VII, p. 238), et parsuite son complémentaire $CP(F)$ (par rapport au plan XOY) sera un ensemble universel G_δ plan. On obtient pareillement un ensemble universel G_δ dans R_3, en partant d'un ensemble universel fermé dans l'espace à 4 dimensions.