Kerékjártó B. *Vorlesungen über Topologie I* (Abschn. III) Berlin 1923.
Kline J. R. *Concerning approachability of simple closed and open curves.* Trans. Amer. Math. Soc. 21, 1920.
Knaster B. *Quelques coupures singulières du plan.* Fund. Math. VII, 1925.
— et Kuratowski C. *Sur les continus non-bornés.* Fund. Math. V, 1924.
Kuratowski C. *Sur les coupures irréductibles du plan.* Fund. Math. VI, 1924.
— *Ueber geschlossene Kurven und unzerlegbare Kontinua.* Math. Ann. 1927.
— *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan,* ce volume.
Mazurkiewicz S. *Sur les continus plans non-bornés.* Fund. Math. V, 1924.
— *Sur un ensemble G_δ qui n'est homéomorphe à aucun ensemble plan.* Fund. Math. I, 1920.
Moore R. L. *Concerning the common boundary of two domains.* Fund. Math. VI, 1924.
Rosenthal A. *Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua.* Sgb. Bay. Ak. Wiss. 1919.
Schönflies A. *Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II,* Leipzig 1908.
Urysohn P. *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes.* Fund. Math. VII, 1925.
Wilson W. A. *On the separation of the plane by irreducible continua.* Bull. Amer. Math. Soc. 33, 1927.
— *On irreducible cuts of the plane between two points,* ibid. (abstract).

Über eine Erweiterung abgeschlossener Mengen zu Jordanschen Kontinuen derselben Dimension*).

Von

W. Stepanoff und L. Tumarkin (Moskau).

1. Zwei metrische Räume heissen *isometrisch* [1]), wenn man den einen auf den andern umkehrbar eindeutig abbilden kann, so dass die Entfernung jedes Punktpaares des einen Raumes der Entfernung des entsprechenden Punktpaares des andern gleich ist.

Unter einer *Strecke* in einem metrischen Raume verstehen wir jede Teilmenge dieses Raumes, die ein isometrisches Bild einer gewöhnlichen geradlinigen Strecke ist.

Wenn je zwei Punkte eines gegebenen metrischen Raumes durch eine Strecke verbunden werden können, sagen wir, unser Raum sei *streckenweise zusammenhängend* [2]). Streckenweise zusammenhängend sind, z. B., der n-dimensionale Euklidische Raum, der Hilbertsche Raum, der Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes [3]).

Wir beweisen den folgenden

Satz I. *Es sei in einem streckenweise zusammenhängenden Raume R eine abgeschlossene und kompakte (in R)* [4]) *Menge F positiver Dimen-*

*) Vgl. P. Alexandroff und L. Tumarkin, Beweis des Satzes, dass jede abgeschlossene Menge positiver Dimension in einem lokal zusammenhängenden Kontinuum topologisch enthalten ist, *Fund. Math.*, t. XI, p. 141.

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 2 Aufl. (1927), S. 94.

[2]) Vgl. Hausdorff, l. c., S. 96 (konvexe Menge).

[3]) Hausdorff, l. c., S. 98. Als Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes bezeichnet man die Gesamtheit aller Punkte dieses Raumes für welche die Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ den Ungleichungen $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, \dots)$ genügen.

[4]) Hausdorff, l. c., S. S. 107, 115; die Menge F ist also selbst ein kompakter metrischer Raum.

sion [5]) *gegeben. Dann existiert in R ein F enthaltendes Jordansches Kontinuum* [6]) J *derselben Dimension, so dass*

$$J = F + \Sigma L_j$$

ist. Hier bedeutet ΣL_j entweder 1) *die leere Menge, oder* 2) *die Vereinigungsmenge von endlich vielen Strecken L_j, deren Endpukte* [7]) *zu F gehören, oder* 3) *die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen solchen Strecken; im letzten Falle ist* $\lim_{j\to\infty} d(L_j)$ [8]) $= 0$ [9]).

2. Beweis. Es ist bekannt [10]), dass jeder kompakte metrische Raum als ein eindeutiges stetiges Bild der Cantorschen perfekten (z. B. auf der Strecke $[0, 1]$ konstruierten) „Dreiteilungsmenge" C betrachtet werden kann. Also ist die Menge F ein eindeutiges stetiges Bild von C, d. h. jedem Punkte von C entspricht ein bestimmter Punkt von F, und diese Abbildung ist in allen Punkten der Menge C stetig.

Seien (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ die Komplementärintervalle zur Menge C. Jedem Punktpaar a_i, b_i entsprechen in F gewisse Punkte α_i, β_i. Falls $\alpha_i = \beta_i$ ist, lassen wir jedem Punkte des Intervalls (a_i, b_i) denselben Punkt $\alpha_i = \beta_i$ entsprechen. Wenn aber $\alpha_i \neq \beta_i$ ist, verbinden wir in R α_i und β_i mit einer Strecke $L_i = [\alpha_i, \beta_i]$ und ordnen dann jedem Punkte x des Intervalls (a_i, b_i) denjenigen Punkt ξ von $[\alpha_i, \beta_i]$ zu, für welchen

(1) $$\varrho(a_i, x) : \varrho(x, b_i) = \varrho(\alpha_i, \xi) : \varrho(\xi, \beta_i)$$ [11]).

[5]) Über den allgemeinen Dimensionsbegriff siehe P. Urysohn, Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes, I partie, *Fund. Math.*, t. t. VII, VIII; s. auch K. Menger, *Monatsh. f. Math. und Phys.*, 33, 34.

[6]) Unter einem Jordanschen (oder lokal zusammenhängenden) Kontinuum verstehen wir einen kompakten metrischen mehr als einen Punkt enthaltenden Raum, der ein eindeutiges und stetiges Bild einer gewöhnlichen geradlinigen Strecke ist. S. Hausdorff, l. c., § 36 (Streckenbilder).

[7]) Möglichweise auch andere Punkte.

[8]) $d(L_j)$ bedeutet die Länge der Strecke L_j.

[9]) Im speciellen Falle, dass R die Ebene und F ein ebenes Kontinuum ist, wurde eine Konstruktion eines F enthaltenden Jordanschen Kontinuums mittels Hinzufügung von höchstens abzählbar vielen Strecken von H. M. Gehman, Concerning the subsets of a plane continuous curve (*Thesis*, Philadelphia, 1925) gegeben.

[10]) P. Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, *Math. Ann.*, Bd. 96, S. 8. 563, 567; Hausdorff, l. c., S. 197, Satz V.

[11]) $\varrho(a, b)$ bedeutet immer die Entfernung zwischen den Punkten a und b.

Jetzt setzen wir (nach einer Umnumerierung in natürlicher Ordnung derjenigen L_i, für welche $\alpha_i \neq \beta_i$ ausfällt)

$$J = F + \Sigma L_j$$ [12]).

Wir werden zeigen, dass J allen Forderungen des Satzes I genügt.

Es ist klar, dass J ein eindeutiges Bild der Strecke $[0, 1]$ ist. Wir werden nun uns überzeugen, dass die erhaltene Abbildung von $[0, 1]$ auf die Menge J stetig ist.

In der Tat, wegen (1) ist die Stetigkeit in den Komplementärintervallen (a_i, b_i) evident. Sei jetzt x ein zu C gehöriger Punkt der Strecke $[0, 1]$, und ξ der entsprechende Punkt von J (ξ gehört also zu F). Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da F ein eindeutiges und stetiges Bild der Menge C ist, kann man eine positive Zahl δ_0 finden, so dass für alle Punkte y aus C, für die $\varrho(y, x) < \delta_0$ ist, die Entfernung $\varrho(\eta, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$ ausfällt (η ist der dem y entsprechende Punkt von J). Jedem Punkte y eines Komplementärintervalls (a_i, b_i), dessen beide Endpunkte von x um weniger als δ_0 abstehen, entspricht in J ein Punkt η der Strecke L_i; die Entfernung eines jeden Endpunktes dieser Strecke von ξ ist $< \frac{\varepsilon}{2}$; also ist in diesem Falle $\varrho(\xi, \eta) < \varepsilon$.

Es bleiben die Punkte von höchstens zweien Komplementärintervallen übrig, z. B. von (a_{i_1}, b_{i_1}), (a_{i_2}, b_{i_2}), deren nur je ein Endpunkt, sei b_{i_1} bzw. a_{i_2}, von x weniger als um δ_0 entfernt ist. Dann wählen wir, der Formel (1) entsprechend, eine positive Zahl $\delta \leqslant \delta_0$ so klein, dass jedem Punkte y des Intervalls (a_{i_1}, b_{i_1}) bzw. (a_{i_2}, b_{i_2}), welcher von x weniger als um δ entfernt ist, in J ein Punkt η aus L_{i_1} bzw. L_{i_2} entspricht, dessen Entfernung von β_{i_1} bzw. α_{i_2} kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist; da aber $\varrho(\beta_{i_1}, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$ bzw. $\varrho(\alpha_{i_2}, \xi) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, ist die Entfernung $\varrho(\xi, \eta) < \varepsilon$.

Also gehen alle Punkte der Strecke $[0, 1]$, deren Abstand von x kleiner als δ ist in weniger als um ε von ξ entfernten Punkte über. Folglich ist J ein eindeutiges und stetiges Bild von $[0, 1]$, d. h. J ist ein Jordansches Kontinuum.

Da aber $J = F + \Sigma L_j$ ist, so ist der kompakte metrische Raum J eine Summe von endlich oder abzählbar vielen in J abgeschlos-

[12]) Falls $\alpha_i = \beta_i$ für alle Werte $i = 1, 2, \ldots$ ist, bedeutet $\sum L_j$ die leere Menge.

senen Mengen, deren Dimension höchstens gleich der Dimension von F ist; also[13]) ist die Dimension von J gleich derjenigen von F.

J ist ein eindeutiges und stetiges Bild der in sich kompakten Menge $[0, 1]$; folglich[14]) ist J ein *gleichmässig* stetiges Bild der Strecke $[0, 1]$, und da $\lim\limits_{j\to\infty} \varrho(a_j, b_j) = 0$ ist, so ist auch $\lim\limits_{j\to\infty} d(L_j) = 0$.

Der Satz I ist bewiesen.

3. Urysohn hat die Existenz eines universellen separablen[15]) metrischen Raumes U, welcher isometrische Bilder *aller* separablen metrischen Räume enthält, bewiesen[16]). Insbesondere enthält U ein isometrisches Bild eines beliebigen kompakten metrischen Raumes F. Der Raum R ist[17]) ausserdem streckenweise zusammenhängend. Infolgedessen gilt auf Grunde des Satzes I der

Satz II. *Sei ein kompakter metrischer Raum F von positiver Dimension gegeben. Dann existiert ein, die Menge F isometrisch enthaltendes, Jordansches Kontinuum J derselben Dimension*; *es ist nähmlich*

$$J = F^* + \Sigma L_j,$$

wo F^* das isometrische Bild von F ist, und ΣL_j entweder 1) *die leere Menge, oder* 2) *die Vereinigungsmenge endlich vieler Strecken L_j deren Endpunkte*[7]) *zu F^* gehören, oder* 3) *die Vereinigungsmenge abzählbar vieler solcher Strecken ist*; *im letzten Falle ist* $\lim\limits_{j\to\infty} d(L_j) = 0$.

[13]) P. Urysohn, Mémoire, *Fund. Math.*, t. VII, p. 337; K. Menger, *Monatsh. f. Math. u. Phys.*, 34, S. 147.

[14]) Hausdorff, l. c., S. 197, Satz IV.

[15]) Hausdorff, l. c., S. 124.

[16]) P. Urysohn, Sur un espace métrique universel, *Bull. des Sciences Math.*, 2e série, t. LI (1927), n° 13, II.

[17]) P. Urysohn, l. c. [16]) n° 19.

Moskau, 1927.

Über stetige Abbildungen.

Von

Julius Schauder (Lwów).

I.

§ 1. In der Ebene E mit den laufenden Koordinaten u, v liege das Quadrat Q_0 mit den Ecken 00, 01, 10, 11 und werde durch die Funktionen

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v) \tag{1}$$

auf eine in einer anderen Ebene $\overline{E}$ liegende Menge $\Phi(Q_0)$ abgebildet; x, y seien die Koordinaten in $\overline{E}$. Somit entspricht jeder Teilmenge $Q \subset Q_0$ eine Bildmenge $\Phi(Q) \subset \Phi(Q_0)$ und andererseits bestimmt jede Menge $B \subset \Phi(Q_0)$ eindeutig ihr Urbild $\Psi(B)$, d. h. die Gesamtheit aller derjenigen Punkte $P \in Q_0$, für welche

$$\Phi(P) \in B \subset \Phi(Q_0). \tag{2}$$

Die Messbarkeit von Mengen wird immer, wenn wir das Gegenteil nicht ausdrücklich betonen, im Lebesgue'schen Sinne verstanden.

Als Zeichen für das Mass (bezw. äusseres Mass) benutzen wird das Symbol $\| \; \|$ (bezw. $\| \; \|^*$).

In der Zukunft setzen wir von den Funktionen $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ folgendes voraus:

I. Erstens: Sie sind stetig im abgeschlossenen Q_0.

II. Zweitens: Die Bildmengen $\Phi(Q_i)$ jeder Folge $\{Q_i\}$ von messbaren zu Q_0 gehörenden Punktmengen, die keine gemeinsame Punkte miteinander besitzen, genügen der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| \Phi(Q_i) \|^* \leqslant M,$$