Sur la structure des frontières communes à deux régions.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Introduction.

Le but principal de cet ouvrage consiste à prouver que, sur le plan, tout continu borné C qui est frontière commune à deux régions et qui n'est pas „monostratique" (dans un sens qui va être précisé tout à l'heure) admet une décomposition *cyclique* en sous-continus [1]).

J'appelle „cyclique" toute décomposition $C = \Sigma T_x$, lorsque les T_x (dits „tranches") sont disjoints (non-vides), l'indice x parcourt la circonférence d'un cercle et la condition $\lim x_n = x_0$ entraîne l'inclusion $\mathrm{Lim\,sup}\ T_{x_n} \subset T_{x_0}$ [2]).

Appelons *tranche fondamentale* d'un ensemble E tout sous-ensemble qui est saturé [3]) par rapport à la propriété d'être un continu qui est

[1]) Une *région* est un ensemble connexe composé de points intérieurs; un ensemble *connexe* est un ensemble qui n'est pas somme de deux ensembles *séparés* non-vides M et N (c'est-à-dire tels que $\overline{M}N + \overline{N}M = 0$). La frontière d'un ensemble X est définie par la formule: $F(X) = X . \overline{1-X}$ ($1-X$ désignant le complémentaire de X). Un ensemble composé d'*un seul point* sera considéré comme continu.

[2]) Cette dernière condition exprime la *semi-continuité* de la décomposition au sens de M. R. L. Moore. $\mathrm{Lim\,sup}\ A_n$ est l'ensemble des points limites des suites convergentes $\{p_{k_n}\}$ où $p_{k_n} \epsilon A_{k_n}$. (Cf. ma note *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. XI pp. 169—185, où l'on trouvera des renseignements biliographiques concernant cette notion ainsi que ses propriétés fondamentales).

[3]) c'est-à-dire que cet ensemble possède la propriété considérée tandis qu'aucun ensemble plus grand ne la possède pas.

une somme finie ou dénombrable de continus indécomposables et de continus de condensation de E [1]). Dans le cas où l'ensemble E se réduit à une tranche fondamentale nous dirons que l'ensemble E est *monostratique*.

Or, je prouve que, C étant une frontière bornée commune à deux régions (sur le plan), 1° si C est monostratique, C n'admet aucune décomposition cyclique en sous-continus, 2° si C n'est pas monostratique, la décomposition de C en tranches fondamentales est cyclique et, de plus, elle est *la plus loin poussée* [2]) parmi toutes les décompositions cycliques de C en sous-continus.

L'énoncé 2° peut encore être précisé. Imaginons, notamment, que C soit situé sur la surface d'une sphère et que $C = F(P) = F(Q)$, P et Q désignant deux régions relatives à cette surface. Admettons que l'indice x des tranches T_x parcourt l'équateur de la sphère. La fonction $x = f(p)$ définie par la condition $p \epsilon T_{f(p)}$ est évidemment continue. Sa définition n'étant donnée que pour les points p de C, donc pour les valeurs frontières des régions P et Q, je résouds le „problème limite", qui se présente, en prouvant qu'elle peut être *étendue* à toute la surface de la sphère de sorte que les régions P et Q se transforment de façon *bicontinue* en les deux moitiés (ouvertes) de la surface de sphère déterminées par l'équateur (théor. II).

De là résulte, par exemple, que, si p et q sont deux points ap-

[1]) Un continu est *indécomposable*, s'il n'est pas somme de deux continus différents de lui. Un sous-continu K de E est *continu de condensation* de E, lorsque $\overline{E-K} = E$.

[2]) Si l'on remplace dans les énoncés 1° et 2° le terme „cyclique" par „linéaire" on arrive à un théorème analogue concernant la structure des continus *irréductibles* entre deux points; ces derniers possèdent donc une structure linéaire dans le même sens que les frontières communes à deux régions possèdent une structure cyclique. Voir: ma note de Fund. Math. X, pp. 225—275. (Un continu est dit *irréductible* entre deux de ses points, si aucun sous-continu ne contient ces points).

La définition de tranche T_x que j'ai adoptée dans Fund. Math. X (p. 250), bien que différente de celle de tranche fondamentale dont je me sers à présent, lui est équivalente. En effet, selon les propositions (10) et (11) et les théor. II, IV et XI (ibid.), T_x possède la propriété d'être un continu formé d'une somme au plus dénombrable de continus indécomposables et de continus de condensation; d'autre part, tout continu qui possède cette propriété est contenu dans un seul T_x (selon les lemmes 2 et 3, p. 257). Donc T_x est saturé par rapport à cette propriété, ce qui veut dire que T_x est une tranche fondamentale. Inversement, toute tranche fondamentale étant située dans un T_x, on en conclut qu'elle lui est identique.

partenant aux régions P et Q, il existe un continu K qui les unit et qui n'a en commun avec C qu'une seule tranche T_x, x étant arbitraire. Pour le démontrer je me base sur le fait qu'on peut unir le centre du cercle à un point situé en dehors du cercle par une ligne n'ayant qu'un seul point commun avec la circonférence.

Quant aux continus monostratiques, je prouve, en particulier, qu'une frontière commune à trois régions (sur le plan) est toujours un continu monostratique, même plus: elle est soit un continu indécomposable soit la réunion de deux continus indécomposables [1]).

Plusieurs applications des théorèmes publiées ici paraitront prochaînement dans quelques notes de M. Knaster et de moi; nous arrivons, en particulier, à l'énoncé suivant qui généralise des théorèmes de M. Rosenthal [2]) et de M. Wilson [3]): pour qu'un continu décomposable et borné C soit la frontière commune à deux régions (du plan), il faut et il suffit qu'on ait $C = K + L$, $KL = M + N$, $M \neq 0 \neq N$, où M et N sont deux ensembles fermés et K et L deux continus irréductibles entre tout couple de points extraits respectivement de M et de N.

Exemples des frontières communes à deux régions [4]).

1. La circonférence d'un cercle est évidemment une frontière commune à deux régions ayant des points individuels pour tranches fondamentales.

2. Le continu composé de la courbe $y = \sin \frac{\pi}{x}$, $0 < |x| \leqslant 1$, du segment $|y| \leqslant 1$, $x = 0$ et d'un arc qui unit les points $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ (en dehors de la courbe et du segment) a ce segment pour tranche fondamentale.

[1]) Ce théorème fut établi dans l'hypothèse supplémentaire que C est la frontière de toutes les régions-complémentaires dans ma note *Sur les coupures irréductibles du plan*, Fund. Math. VI (1924), théor. VI, p. 138; ce dernier théorème fut ensuite étendu par M. Alexandroff à une classe plus générale de courbes, qu'il appelle „unregelmässige geschlossene Kurven" et qui ne sont pas nécessairement situées sur le plan. Voir Math. Ann. 96 (1926), p. 534. Il existe aussi, comme M. Alexandroff me l'a aimablement communiqué une généralisation de ce genre concernant les frontières communes à deux (mais pas nécessairement à toutes les) régions-complémentaires.

[2]) *Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua*, Sgb. Bayr. Akad. Wiss. 1919, p. 106.

[3]) Bull. Amer. Math. Soc. 33 (1927).

[4]) La construction des exemples de ce genre peut être effectuée souvent en se basant sur le théorème précité de M. Rosenthal, d'après lequel la somme de deux continus bornés irréductibles entre a et b et n'ayant que ces deux points en commun est une frontière commune à deux régions.

3. Des exemples des continus monostratiques qui sont frontières à deux (ou plus de deux) régions ont été donnés pour la première fois par M. Brouwer [1]) et puis ils furent simplifiés par M. Knaster [2]). Les exemples de M. Brouwer sont indécomposables; chez M. Knaster on en trouvera aussi qui se décomposent en deux continus indécomposables.

4. Dans les exemples 1 et 2 le continu C est frontière commune à toutes les régions complémentaires (il n'y en a, en effet, que deux). A présent, nous construirons le continu C de façon qu'il admette des régions *secondaires*, c'est-à-dire, régions dont la frontière diffère de C. Dans les trois exemples suivants on verra trois genre de régions secondaires essentiellement différents les uns des autres [3]).

a) C se compose de la circonférence $\varrho = 1$, de la courbe $y = \sin \frac{\pi}{\varrho - 1}$, $1 < \varrho \leqslant 2$ et d'un arc unissant les deux points donnés par la condition $\varrho = 2$, $y = 0$ [4]). La région $\varrho < 1$ est secondaire; sa frontière constitue une tranche fondamentale qui est un continu de condensation de C.

b) Considérons le continu indécomposable qui constitue la moitié supérieure de la fig. III de la Note précitée de M. Knaster (p. 280) et désignons par p_1, p_2, p_3 ses trois points à ordonnée minima. Ajoutons y le segment $\overline{p_1 p_2}$ et approchons ce segment par une courbe issue du point p_3, analogue à la courbe $\sin \frac{1}{x}$ et ne coupant pas le continu indécomposable. Le continu C ainsi formé est frontière commune à deux régions et admet une région secondaire dont la frontière se compose du segment $p_1 p_2$ (qui est un continu de condensation de C) et du continu indécomposable (qui n'en est pas un).

Par une légère déformation on pourrait réduire ce segment à un seul point; la frontière de la région secondaire se réduirait alors au continu indécomposable considéré.

c) Le même continu de la fig. III de M. Knaster est déformé de façon que les deux continus indécomposables dont il est constitué aient, non trois, mais deux points communs (dans l'entourage desquels on n'altère pas le continu) et qu'à la place du troisième point apparaisse un segment n'ayant que les extrémités situés sur les continus indécomposables considérés. La région secondaire a alors pour frontière la somme des deux continus indécomposables; aucun d'eux n'est un continu de condensation.

Nous allons rappeler à présent quelques théorèmes établis ailleurs, mais intervenant dans cet ouvrage, et nous introduirons des notions qui nous seront utiles dans la suite:

(α) *pour qu'un ensemble fermé C soit la frontière commune de deux régions P et Q, il faut et il suffit que C soit une coupure*

[1]) Math. Ann. 68 (1910) et Proc. Akad. Wet. Amsterdam 1911/12.

[2]) *Quelques coupures singulières du plan*, Fund. Mat. VII, pp. 264–289.

[3]) On rapprochera ces exemples des théorèmes établis par M. W. A. Wilson sur les frontières des régions secondaires dans son ouvrage cité.

[4]) Cf. la fig. 3 de la Note de Mme S. Nikodym, Fund. Math. VII, p. 22.

irréductible entre tout couple de points p et q extraits de ces régions (c'est-à-dire que C coupe le plan entre p et q, tandis qu'aucun vrai sous-ensemble fermé de C ne coupe le plan entre ces points [1])).

(β) *toute coupure entre p et q contient une coupure irréductible entre ces points*; plus précisément: C étant un ensemble fermé qui coupe le plan entre p et q, P désignant la région complémentaire à C qui contient p et R la région complémentaire à $\overline{P}$ qui contient q, la frontière $F(R)$ est une coupure irréductible entre p et q (donc une frontière commune à deux régions) [2]).

Appelons *uni-cohérent* (resp. n-cohérent) tout continu C tel que pour toute décomposition de C en deux continus K et L (où $K \neq C \neq L$) le produit KL est formé d'une (resp. n) composantes [3]). Appelons C *multi cohérent*, si dans toute décomposition de ce genre KL contient plus d'une composante (c'est-à-dire: KL n'est jamais un continu).

On a l'équivalence suivante:

(γ) *pour qu'un continu C soit multi-cohérent il faut et il suffit que pour tout sous-continu Q de C, la différence $C-Q$ soit connexe.*

En effet, si l'ensemble $C-Q$ n'est pas connexe et se décompose en deux ensembles séparés (non-vides) M et N, les ensembles $Q+M$ et $Q+N$ sont deux vrais sous-continus de C dont le produit est un continu [4]).

Inversément, si $C=K+L$, $K\neq C\neq L$ et KL est un continu, on a $C-KL=(C-K)+(C-L)$, décomposition en deux ensembles séparés non-vides qui prouve que $C-KL$ n'est pas connexe.

(**δ**) ***si C est un ensemble plan et borné qui est la frontière commune à deux régions, C est un continu multi-cohérent*** [5]).

[1]) Théor. III, Fund. Math. VI, p. 133 (op. cit.).

[2]) Ibid., lemme. Voir aussi Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 63 et V, p. 193 et P. Urysohn, Fund. Math. VII, p. 95.

[3]) Une *composante* d'un ensemble E est un sous-ensemble connexe qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de E. La notion des continus uni-cohérents, équivaut aux continus „ohne Henkel" de M. Vietoris (Proc. Ak. Wet. Amsterdam 29, 1926, p. 445); pour les continus jordaniens plans et bornés elle équivaut à la propriété de ne pas couper le plan. (Voir ma note de Fund. Math. VIII, p. 148). Les continus bi-cohérents, qui — comme je prouve — présentent une généralisation des courbes fermées de M. Schönflies, vont être étudiés au § 4 de cet ouvrage.

[4]) d'après le théor. VI de la note de M. Knaster et de moi *Sur les ensembles connexes*. Fund. Math. II.

[5]) Fund. Math. VI, p. 136, lemme 1 (op. cit.) et R. L. Moore, ibid, p. 204, théor. 2. En outre, toute courbe fermée au sens de M. Alexandroff est multi-

(η) *tout continu C multi-cohérent et décomposable est somme de deux continus A et B tels que*

$$\overline{C-A}=B, \quad \overline{C-B}=A, \quad A\neq 0\neq B;$$

de plus Q étant un vrai sous-continu arbitraire de C qui n'en est pas un continu de condensation, A peut être supposé égal à $\overline{C-Q}$.

Soit, en effet, Q un sous-continu de C tel que $Q\neq C\neq \overline{C-Q}$. Un tel Q existe en vertu de l'hypothèse que C est décomposable [1]). Posons $A=\overline{C-Q}$. Selon γ, A est un continu; posons $B=\overline{C-A}$; donc B est aussi un continu. On a de plus, $A\neq 0$, puisque $Q\neq C$, et $B\neq 0$, puisque $A\neq C$. Enfin, $\overline{C-B}=\overline{C-\overline{C-A}}=$ $=\overline{C-\overline{C-\overline{C-Q}}}=\overline{C-Q}$ [2]) d'où $A=\overline{C-B}$.

Selon la proposition δ, la notion de continu multi-cohérent est plus générale que celle de continu plan et borné qui est la frontière commune à deux régions; de plus, elle est *intrinsèque* et ne demande pas que le continu considéré soit situé sur le plan. En conséquence il est plus avantageux de supposer le continu considéré d'être multi-cohérent. Toutefois, il importe de remarquer que le théorème fondamental sur la structure cyclique des frontières communes à deux régions ne subsiste pas pour les continus multi-cohérents. M. Knaster a défini, en effet, un continu multi-cohérent et non-monostratique qui n'admet pas de décomposition cyclique en sous-continus [3]).

§ 1. Théorèmes auxiliaires concernant les décompositions semi-continues.

A. *Etant donnée une décomposition cyclique d'un continu multi-cohérent C (borné) en sous-continus: $C=\Sigma T_x$, si K est un sous-continu de C et α et β deux indices différents tels que*

$$T_\alpha K \neq 0 \neq T_\beta K, \tag{1}$$

on a: soit $\sum_{\alpha<x<\beta} T_x \subset K$ soit $\sum_{\beta<x<\alpha} T_x \subset K$, l'indice x parcourant la circonférence dans un sens déterminé.

En outre, K ne peut être ni un continu multi-cohérent ($\neq C$), ni

cohérente; tout continu multi-cohérent irréductible entre deux points est indécomposable ou somme de deux continus indécomposables (Cf. ma note *Ueber geschlossene Kurven und unzerlegbare Kontinua*, Math. Ann. 1927, théor. III); tout continu multi-cohérent jordanien est une courbe simple fermée (Cf. ma note de Fund. Math. VI, p. 119).

[1]) Théor, II de la note de Janiszewski et moi des Fund. Mat. I, p. 212.

[2]) en vertu du théor. 6 d'une des mes notes de Fund. Math. III, p. 183.

[3]) à paraître dans ce Journal.

une somme finie ou dénombrable de continus indécomposables et de continus de condensation de C.

Démonstration. Posons $M = \sum_{\alpha < x < \beta} T_x$ et $N = \sum_{\beta < x < \alpha} T_x$. Donc

(2) $$C - (T_\alpha + K + T_\beta) \subset M + N.$$

L'ensemble $T_\alpha + K + T_\beta$ étant, selon (1), un continu et C étant, par hypothèse, multi-cohérent, on en conclut (d'après γ) que $C - (T_\alpha + K + T_\beta)$ et connexe. Or les arcs $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ (dépourvus d'extrémités) étant séparés. il en est de même [1]) des ensembles M et N (c'est-à-dire que $\overline{M}N + \overline{N}M = 0$). En vertu de l'inclusion (2), l'ensemble $C - (T_\alpha + K + T_\beta)$ est donc disjoint de l'un des deux ensembles M ou N; soit

$$MC - (T_\alpha + K + T_\beta) = 0$$

donc: $M \subset T_\alpha + K + T_\beta$ et, comme $MT_\alpha = 0 = MT_\beta$, il vient $M \subset K$, ce qui prouve la première partie du théorème.

Ceci établi, l'inclusion $\sum_{\alpha < x < \beta} T_x \subset K$ implique [2]) que K contient des points intérieurs relativement à C, puisque l'arc $\alpha\beta$ contient des points intérieurs relativement à la circonférence. Donc K ne peut être un continu de condensation de C.

Supposons que K soit multi-cohérent. Nous allons prouver que $K = C$.

Soit: $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1 < \beta$. Posons $Q = \sum_{\alpha_2 \leq x \leq \beta_2} T_x$. Donc $Q \subset K$, $T_{\alpha_1} + T_{\beta_1} \subset K - Q$. Or, Q comme continu [3]) ayant des points communs avec deux tranches différentes T_{α_2} et T_{β_2}, ne peut être un continu de condensation de C, donc de K, c'est-à-dire que

(3) $$\sum_{\alpha_2 \leq x \leq \beta_2} T_x - \overline{K - Q} \neq 0.$$

On en conclut, en tenant compte de l'inclusion $T_{\alpha_1} + T_{\beta_1} \subset \overline{K - Q}$, que $\sum_{\beta_1 < x < \alpha_1} T_x \subset \overline{K - Q}$ (en vertu de la première partie du théorème et de l'inégalité (3)). Donc: $\sum_{\beta_1 < x < \alpha_1} T_x \subset K$ et comme $\sum_{\alpha < x < \beta} T_x \subset K$, il vient $C \subset K$, d'où $K = C$.

Il résulte aussi de là que K ne peut être indécomposable, puisque tout continu indécomposable est évidemment multi-cohérent.

[1]) En vertu du théor. IV, 9° de ma note citée de Fund. Math. XI, p. 174.
[2]) ibid. théor. IV, 8°.
[3]) ibid. corollaire 1, p. 182.

Finalement, K ne peut être formé d'un nombre au plus dénombrable de continus indécomposables et de continus de condensation de C, car l'ensemble des indices x tels que $KT_x \neq 0$ serait au plus dénombrable (puisque chacun de ces continus est situé, comme nous venons de prouver, dans une tranche). Mais ceci est impossible, car cet ensemble, comme image continue de K, est un continu.

B. *Si un continu multi-cohérent (borné) C est somme de deux continus A et B tels que $\overline{C - A} = B$ et $\overline{C - B} = A$ et si A est décomposé linéairement en sous-continus, il n'y a parmi les tranches de A qui ont des points communs avec B que les deux tranches extrèmes; si, en outre, B est décomposé linéairement en sous-continus, chacune de ses tranches extrèmes a des points communs avec une seule tranche extrême de A.*

Démonstration. Soit $A = \sum_{0 \leq x \leq 1} T_x$ la décomposition de A et soit, dans le cas où B est décomposé: $B = \sum_{0 \leq y \leq 1} U_y$.

Il s'agit de prouver que 1°: $T_0 B \neq 0$, 2°: si $0 < \alpha < 1$, on a $T_\alpha B = 0$, 3°: si $T_0 U_0 \neq 0$, on a $T_0 U_1 = 0$.

1. Supposons que $T_0 B = 0$. L'ensemble des indices x tels que $T_x B \neq 0$ étant fermé [1]), il existe un indice $\alpha > 0$ tel que $B \cdot \sum_{x \leq \alpha} T_x = 0$. Les ensembles B et $\sum_{x < \alpha} T_x$ sont donc séparés. Il en est de même des ensembles $\sum_{x < \alpha} T_x$ et $\sum_{x > \alpha} T_x$ (puisque α divise l'intervalle 01 en deux parties séparées). Par conséquent, la décomposition

$$C - T_\alpha = \sum_{x < \alpha} T_x + \Big(B + \sum_{x > \alpha} T_x\Big)$$

est une décomposition de l'ensemble $C - T_\alpha$ en deux ensembles séparés non-vides, contrairement à la multi-cohérence de C.

Donc $T_0 B \neq 0$ (de même $T_1 B \neq 0$ et $U_0 A \neq 0 \neq U_1 A$).

2. Soit $T_\alpha B \neq 0$. Donc $T_\alpha + B$ est un continu. Or, la décomposition

$$C - (T_\alpha + B) = \sum_{x < \alpha} (T_x - B) + \sum_{x > \alpha} (T_x - B)$$

étant une décomposition en deux ensembles séparés, on en conclut

[1]) ibid. théor. IV, 8°.

que l'un des deux ensembles, soit $\sum_{x<\alpha}(T_x-B)$, est vide. D'où $\sum_{x<\alpha}T_x\subset B$, donc

$$C-B\subset C-\sum_{x<\alpha}T_x\subset B+A-\sum_{x<\alpha}T_x=B+\sum_{x\geq\alpha}T_x.$$

Il vient $C-B\subset\sum_{x\geq\alpha}T_x$ et, en tenant compte de l'hypothèse $\overline{C-B}=A$, on en tire $A\subset\sum_{x\geq\alpha}T_x$ (puisque $\sum_{x\geq\alpha}T_x$ est fermé). Mais, par définition: $A=\sum_{x\geq 0}T_x$; donc $\alpha=0$.

3. Soit $T_0U_0\neq 0\neq T_0U_1$. Dans ce cas, la somme

$$S=T_0+T_1+U_0+U_1$$

est un continu (puisque selon 1° et 2°: $T_1U_1+T_1U_0\neq 0$). Donc $C-S$ est connexe. Or

$$C-S=\sum_{0<x<1}T_x+\sum_{0<y<1}U_y,$$

les deux sommandes étant séparés, en vertu de 1°. Comme, en outre il ne sont pas vides, on arrive à une contradiction.

C. Si l'hyper-espace[1]) *d'une décomposition d'un continu multi-cohérent en sous-continus est un continu de* J o r d a n [2]), *cette décomposition est cyclique (ou bien se réduit à un élément). De même nature est, en particulier, la décomposition d'un continu multi-cohérent borné en parties premières (au sens de M.* H a h n [3]).

Démonstration. C étant multi-cohérent par hypothèse, l'hyper-espace $\boldsymbol{H}$ est également multi-cohérent. En effet, soit $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ une décomposition de $\boldsymbol{H}$ en deux vrais sous-continus; les ensembles M et N qui sont images de $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ dans C, sont également des continus [4]), donc MN n'est pas un continu; d'où il résulte que $\boldsymbol{AB}$ n'en est pas un nonplus.

Or, tout continu jordanien et multi-cohérent étant une courbe simple fermée [5]) (s'il ne se réduit pas à un seul point), notre théorème se trouve démontré.

En particulier: la décomposition d'un continu borné en parties premières est toujours jordanienne [6]); donc, si le continu est multi-cohérent, elle est cyclique.

[1]) Pour la définition de l'hyper-espace de décomposition semi-continue, voir ma note citée Fund. Math. XI, p. 171.

[2]) image continue de l'intervalle.

[3]) Wiener Ber. 130 (1921) p. 217.

[4]) d'après le corollaire 1, p. 182 de ma note précitée.

[5]) voir cet ouvrage p. 24, note [5]).

[6]) d'après un théorème de M. R. L. M o o r e, Math. Zft. 22 (1925) pp. 307—315. Cf. aussi ma note citée, Fund. Math. XI, p. 184, théor. XI.

§ 2. Structure cyclique des frontières communes à deux régions.

Lemme 1. *K étant un sous-continu régulier*[1]) *d'une frontière commune à deux régions C bornée et située sur le plan, tout point p du produit $K.\overline{C-K}$ est un point d'irréductibilité*[2]) *des continus K et $\overline{C-K}$.*

Démonstration. Supposons, au contraire, qu'un point p de $K\overline{C-K}$ ne soit pas un point d'irréductibilité de K.

Il existe, par conséquent [3]), deux continus M et N tels que

(1) $$p\,\epsilon\, MN,\quad K=M+N,\quad M\neq K\neq N.$$

Il vient:

(2) $$p\,\epsilon\, MN\,\overline{C-K}$$

(3) $$C=M+N+\overline{C-K}.$$

Or, K étant sous-continu du continu multi-cohérent C (selon δ), $\overline{C-K}$ est un continu. De plus $M+\overline{C-K}\neq C$, car on aurait, en cas contraire: $C-\overline{C-K}\subset M$, d'où $\overline{C-\overline{C-K}}\subset M$ et comme, par hypothèse, $K=\overline{C-\overline{C-K}}$, on aurait $K\subset M$, contrairement à (1).

Ainsi, la formule (3) présente une décomposition du continu C en trois continus dont le produit n'est pas vide (form. (2)) et dont aucun couple ne recouvre C. Ceci contredit, selon un théorème de M. K n a s t e r [4]), l'hypothèse que C est une frontière bornée commune à deux régions (sur le plan).

Il est ainsi établi que p est un point d'irréductibilité de K; il en est aussi un de $\overline{C-K}$, puisque $\overline{C-K}$ étant régulier [5]), on peut dans l'énoncé du théorème substituer $\overline{C-K}$ à K.

Théorème fondamental. *C étant une frontière bornée commune à deux régions (sur le plan), si C est monostratique, C n'admet aucune décomposition cyclique en sous-continus; si C ne l'est pas, sa décomposition en tranches fondamentales est cyclique et, de plus, chaque*

[1]) c'est-à-dire tel que $K=\overline{C-\overline{C-K}}$.

[2]) c'est-à-dire qu'il existe un point q tel que K est un continu irréductible entre p et q (donc, qu'il n'existe aucun vrai sous-continu de K qui contienne p et q simultanément).

[3]) d'après le théor. XIX de mon ouvrage cité de Fund. Math. X, p. 270.

[4]) à paraître dans ce Journal.

[5]) Selon le théorème déjà cité de Fund. Math. III, p. 183 (théor. 6).

tranche de toute autre décomposition cyclique de C (en sous-continus) est ou bien une somme de tranches fondamentales ou bien se réduit à une d'elles.

Démonstration. 1 Si l'on suppose C monostratique, C n'admet pas de décomposition cyclique [1]) en sous-continus, en vertu du théor. $\mathbf{A}$ du § 1 (dernière phrase) et de la proposition δ.

2. Admettons que C n'est pas monostratique. Par conséquent, C est décomposable Il existe donc selon η deux continus réguliers A et B tels que:

$$C = A + B, \quad A = \overline{C - B}, \quad B = \overline{C - A}, \quad A \neq 0 \neq B.$$

D'après le lemme 1, A et B sont des continus irréductibles. De plus, le continu C étant supposé non-monostratique, on peut admettre qu'il en est de même de A. Par conséquent, la décomposition de A en tranches fondamentales est une décomposition linéaire [2]):

$$A = \sum_{0 \leq x \leq 1} T_x.$$

Cette décomposition nous conduit à la décomposition suivante de C, où nous distinguons deux cas suivant que B est monostratique ou ne l'est pas.

1°: si B est monostratique, considérons l'ensemble $T_0 + B + T_1$ comme une seule tranche de C. On obtient ainsi une décomposition cyclique de C en sous-continus (puisque, selon le théor. $\mathbf{B}$ du § 1, $T_0 B \neq 0 \neq T_1 B$ tandisque, pour $0 < x < 1$, $T_x B = 0$).

2°: si B n'est pas monostratique, B se décompose linéairement en tranches fondamentales:

$$B = \sum_{0 \leq x \leq 1} U_x$$

et on peut supposer, conformément au théor. $\mathbf{B}$ du § 1 que $U_0 T_0 \neq 0 \neq U_1 T_1$.

En considérant, à présent, comme tranches de C les ensembles $U_0 + T_0$, $U_1 + T_1$ et T_x et U_x pour $0 < x < 1$, on parvient également à une décomposition cyclique de C en sous-continus (en vertu du même théor. $\mathbf{B}$).

On voit aussitôt que, dans les deux cas, toute tranche de C a la propriété d'être formée d'un ensemble au plus dénombrable de continus indécomposables et de continus de condensation de C. Comme tout continu qui a cette propriété est, selon le théor. $\mathbf{A}$, contenu dans une tranche, on en conclut que ces tranches sont des tranches fondamentales de C.

[1]) ni, en général, de décomposition „jordanienne", selon le théor. $\mathbf{C}$ du § 1.

[2]) d'après le „théor. fondamental" de ma note de Fund. Math. X, p. 259.

Il est ainsi établi que la décomposition de C en tranches fondamentales est cyclique. Qu'elle est „la plus loin poussée", cela résulte immédiatement du fait que, pour toute décomposition cyclique de C en sous-continus, chaque tranche fondamentale est contenue dans une tranche de cette décomposition (selon le théor. $\mathbf{A}$).

Lemme 2. *C étant la frontière commune à deux régions P et Q et R étant une région secondaire de C* (c'est-à-dire telle que $F(R) \neq C$), *la frontière de R est commune à deux régions et est contenue dans une seule tranche fondamentale de C.*

Démonstration. L'égalité $\overline{P} = P + C$ implique que R est une région complémentaire du continu $\overline{P}$. Il en résulte, selon la proposition (β) de l'introduction, que $F(R)$ est une frontière commune à deux régions.

Par conséquent, $F(R)$, comme continu multi-cohérent, est contenu dans une seule tranche fondamentale de C (en vertu du théor. $\mathbf{A}$), c. q. f. d.

De là résulte facilement le théorème suivant de M. R. L. Moore [1]): *C étant un continu multi-cohérent borné dont aucune partie première* (au sens de M. Hahn) *ne coupe le plan* (*ces parties se présentant en un nombre* >1), *C est une courbe fermée au sens de M. Schönflies.*

En effet, selon le théor. $\mathbf{C}$, la décomposition de C en parties premières est cyclique. Donc, selon le lemme et le théor. $\mathbf{A}$, toute frontière de région secondaire, comme continu multi-cohérent, est contenue dans une partie première; on en conclut, en vertu de l'hypothèse suivant laquelle les parties premières ne coupent pas le plan, que C n'admet pas de régions secondaires. Autrement dit, C est la frontière de toutes les régions en lesquelles C coupe le plan. Le nombre de ces régions est $\leqslant 2$, car en cas contraire C serait un continu indécomposable ou somme de deux continus indécomposables [2]), et ne contiendrait, par conséquent, qu'une seule partie première, contrairement à l'hypothèse.

D'autre part, ce nombre est $\geqslant 2$, car C, comme continu multi-cohérent et décomposable, se décompose en deux continus dont le produit n'est pas un continu; C coupe donc le plan selon le théorème de Janiszewski [3]).

Ainsi, C coupe le plan en deux régions et est leur frontière commune, c. q. f. d.

[1]) *Concerning the common boundary of two domains*, Fund. Math. VI, pp. 203—213.

[2]) selon le théor. VI de ma note de Fund. Math. VI, p. 138.

[3]) *Sur les coupures du plan faites par les continus*, Prace Mat.-fiz. 1913.

Théorème II [1]. *Soit, sur la surface d'une sphère, C un continu non-monostratique qui est la frontière commune à deux régions P et Q. Décomposons cette surface, en considérant comme éléments de décomposition:* 1° *chaque point individuel de $P+Q$,* 2° *chaque tranche fondamentale de C augmentée de toutes les régions secondaires dont elle contient les frontières (si de telles régions existent). L'hyper-espace de cette décomposition est homéomorphe à la surface de la sphère, de sorte que le continu C_1, formé de C et de toutes les régions secondaires, se transforme en équateur, tandisque les régions P et Q se transforment de façon bicontinue respectivement en deux moitiés de la surface déterminées par l'équateur.*

Démonstration. Pour prouver que la décomposition est semi-continue on n'a qu'à tenir compte 1°: du fait que la frontière d'une région secondaire et contenue entièrement dans une seule tranche fondamentale de C et 2°: du théorème général suivant lequel on a $F(\Sigma G_n) \subset \overline{\Sigma F(G_n)}$, quels que soient les ensembles ouverts G_n.

Je dis qu'aucune tranche de la décomposition considérée de la surface sphérique ne coupe cette surface. Soit, en effet, T une tranche de cette surface, formée d'une tranche fondamentale de C et des régions secondaires dont elle contient les frontières. Soient x et y deux points situés en dehors de T. Il s'agit de les unir par un continu qui ne passe pas par T. Notre but sera évidemment atteint déjà en nous bornant au cas où $x \in P$.

Il y a encore deux cas à considérer:

1. $y \in Q$. Or, tout point de C étant un point-limite des régions P et Q, on déduit des formules évidentes:

$$C - T \neq 0 \quad \text{et} \quad T(P+Q) = 0$$

l'existence d'un continu unissant x et y en dehors de T.

2. $y \in R$, R étant une région secondaire telle que $F(R)$ n'est pas contenu dans T. Donc, conformément au lemme 2, $F(R)$ est contenu dans une tranche disjointe de T, d'où $\overline{R}\,T = 0$ et, comme $\overline{R}\,C \neq 0$, il existe un point $z \in \overline{R}\,C - T$, d'où $z \in \overline{Q} - T$, puisque $C \subset \overline{Q}$. En tenant compte du cas 1, on peut unir x à z en dehors de T; en même temps, $\overline{R}$ unit z à y en dehors de T. Le continu T ne coupe donc pas la surface entre x et y.

[1]) Un cas particulier de ce théorème fut signalé par M. Hill dans Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1926) p. 595. La restriction essentielle dont il se sert consiste à supposer que C se compose de deux continus irréductibles dont aucun ne contient de continu indécomposable (sauf, peut-être, des continus de condensation).

Il est ainsi établi que la décomposition considérée de la surface de sphère est une décomposition semi-continue en sous-continus dont aucun ne coupe cette surface. D'après un théorème de M. R. L. Moore [1]), l'hyper-espace de cette décomposition est homéomorphe à la surface même. De plus, le continu C_1, comme décomposé d'une façon cyclique, se transforme en une circonférence située sur la surface; P et Q se transforment donc respectivement en deux régions complémentaires de cette circonférence.

Corollaire 1. *Dans les mêmes hypothèses sur P, Q et C, si $p \in P$, $q \in Q$ et T_x est une tranche fondamentale de C, il existe un continu K tel que $p, q \in K$ et $KC = T_x$.*

Démonstration. Conservons les notations du théorème précédent et désignons, pour tout ensemble X situé sur la surface, par $f(X)$ l'ensemble des tranches qui ont des points communs avec X.

Ainsi, $f(p)$ et $f(q)$ sont deux points; $f(T_x)$ est un point de la circonférence $f(C_1)$, que nous pouvons supposer être l'équateur de la sphère. L'arc $[f(p), f(q)]$ n'a en commun avec l'équateur que le point $f(C_1)$. Cet arc est de la forme $f(Z)$, Z étant un continu unissant les points p et q et n'ayant en commun avec C_1 que la tranche fondamentale T_x de C augmentée de toutes les régions secondaires dont les frontières sont des sous-ensembles de T_x. Soit R_1, $R_2, \dots$ la suite finie ($\geqslant 0$) ou infinie de ces régions. On a donc

$$(Z - \Sigma R_n)\, C = T_x.$$

Posons $K = Z - \Sigma R_n$. Il s'agit de prouver que K est un continu.

Or, $(Z - R_1) + \overline{R_1} = Z$, puisque $R_1 \subset Z$. D'autre part, $(Z - R_1)\,\overline{R_1} = \overline{R_1} - R_1 = F(R_1)$. Ainsi, la somme et le produit des ensembles fermés $(Z - R_1)$ et $\overline{R_1}$ sont des continus; cela implique [2]) que ces ensembles sont eux-mêmes des continus.

D'une façon analogue, $Z - (R_1 + \dots + R_n)$ est un continu, car:

$$[Z - (R_1 + \dots + R_n)] + \overline{R_n} = Z - (R_1 + \dots + R_{n-1})$$

$$[Z - (R_1 + \dots + R_n)]\,\overline{R_n} = \overline{R_n} - R_n = F(R_n).$$

[1]) Op. cit., Trans. Amer. Math. Soc. 27, p. 425, théor. 22.

[2]) Théor. I de la note de Janiszewski et de moi, Fund. Math. I, p. 211.

L'ensemble K, comme produit d'une suite (finie ou infinie) des continus décroissants bornés :

$$K = Z - \Sigma R_n = Z(Z - R_1)\ldots[Z - (R_1 + \ldots + R_n)]\ldots,$$

est un continu [1]).

Corollaire 2. *Dans les mêmes hypothèses sur P, Q et C, si L est un arc simple dont les extrémités a et b sont situés respectivement sur les tranches T_α et T_β de C tandisque les points intérieurs de L appartiennent à P, l'arc L décompose la région P en deux régions P_1 et P_2 telles que*

$$\sum_{\alpha < x < \beta} T_x + L \subset F(P_1) \subset \sum_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} T_x + L$$

$$\sum_{\beta < x < \alpha} T_x + L \subset F(P_2) \subset \sum_{\beta \leqslant x \leqslant \alpha} T_x + L.$$

Démonstration. Nous nous servirons des notations employées dans le corollaire précédent. Ainsi $f(C_1)$ est une circonférence, $f(P)$ une des deux régions déterminées par cette circonférence sur la surface de la sphère, $f(L)$ est un arc qui n'a que ses extrémités en commun avec ladite circonférence. Evidemment l'arc $f(L)$ coupe la région $f(P)$ en deux régions ayant pour frontières resp. $\alpha\beta + f(L)$ et $\beta\alpha + f(L)$. En raison de l'homéomorphie entre P et $f(P)$, P se décompose en deux régions P_1 et P_2 telles que

$$L \subset F(P_1) \quad \text{et} \quad L \subset F(P_2). \tag{4}$$

Comme nous venons de dire:

$$F(f(P_1)) = \alpha\beta + f(L) \quad \text{et} \quad F(f(P_1)) \,.\, [\beta\alpha - \beta - \alpha] = 0.$$

Par conséquent [2]):

$$F(P_1) \subset \sum_{\alpha \leqslant x < \beta} T_x^{(1)} + L \quad \text{et} \quad F(P_1) \,.\, \sum_{\beta < x < \alpha} T_x = 0, \tag{5}$$

où $T_x^{(1)}$ désigne la tranche T_x augmentée des régions secondaires dont elle contient les frontières. On peut évidemment omettre l'indice (¹) dans la formule (5), puisque $F(P_1)$, comme contenu dans $C + P$ est disjoint des régions secondaires.

[1]) d'après un théorème de Zoretti-Janiszewski (cf. Janiszewski, Journ. de l'Ec. Polyt. 1912, Thése, théor. I).

[2]) selon les formules 7⁰ et 9⁰ de ma note des Fund. Math. XI, p. 174.

Comme, d'autre part,

$$\sum_x T_x = F(P) \subset F(P_1) + F(P_2) \quad \text{et} \quad F(P_2) \,.\, \sum_{\alpha < x < \beta} T_x = 0$$

(cf. form. (5)), il vient

$$\sum_{\alpha < x < \beta} T_x \subset F(P_1). \tag{6}$$

Les formules (4), (5) et (6) donnent les inclusions demandées.

Remarques. La „stratification" des frontières communes à deux régions se prête à une étude plus détaillée tout-à-fait analogue à celle des continus irréductibles dont je me suis occupé dans le vol. X de ce Journal. Je n'en signalerai que quelques points.

Il y a lieu de distinguer parmi les tranches celles de *„continuité"* et celles de *„cohésion"*: une tranche T_{x_0} est dite tranche de continuité [1]), lorsque la condition $\lim x_n = x_0$ entraîne $\operatorname{Lim} T_{x_n} = T_{x_0}$; une tranche T_{x_0} est dite tranche de cohésion, lorsqu'on a pour tout x_1:

$$T_{x_0} \subset \overline{\sum_{x_0 < x < x_1} T_x} \,.\, \overline{\sum_{x_1 < x < x_0} T_x}.$$

D'après un théorème général [2]), les indices x_0 tels que T_{x_0} est une tranche de continuité forment un ensemble G_δ (produit d'une suite d'ensembles ouverts) dense dans la circonférence. Toute tranche composée d'un seul point est évidemment une tranche de continuité; mais la réciproque n'est pas vraie: en se servant d'un continu irréductible de M. Knaster [3]) on peut même construire une frontière commune à deux régions dont *toutes* les tranches sont des tranches de continuité et dont *aucune* ne se réduit à un point.

Quant aux tranches de cohésion, qui forment une famille plus vaste que celles de continuité, on prouve [4]) qu'il n'y a qu'une famille au plus *dénombrable* de tranches qui ne sont pas de cohésion.

En particulier, si dans le corollaire 2 on suppose que T_α et T_β

[1]) Cf. Vietoris Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 29 (1926), pp. 443—453; mes notes de Fund. Math. X, pp. 259—265 et Fund. Math. XI, p. 174.

[2]) Fund. Math. XI, p. 176, théor. VII.

[3]) qui répond à un problème posé par M. W. A. Wilson dans Amer. Journ. of Math. 48 (1926).

[4]) Fund. Math. X, p. 261, théor. XIV.

sont des tranches de cohésion, on peut remplacer les doubles inclusions par des identités:

$$F(P_1)=\sum_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} T_x+L \quad \text{et} \quad F(P_2)=\sum_{\beta\leqslant x\leqslant\alpha} T_x+L.$$

En effet, l'inclusion (du cor. 2): $\sum_{\alpha<x<\beta} T_x+L\subset F(P_1)$ entraîne $\overline{\sum_{\alpha<x<\beta} T_x}+L\subset F(P_1)$; en supposant T_α et T_β des tranches de cohésion, on a $\overline{\sum_{\alpha<x<\beta} T_x}=\sum_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} T_x$. Donc $\sum_{\alpha\leqslant x\leqslant\beta} T_x+L\subset F(P_1)$. L'inclusion inverse étant vérifiée selon le cor. 2, l'identité demandée se trouve établie.

La définition de tranche devient beaucoup plus simple lorsqu'on considère une classe spéciale des frontières communes à deux régions: notamment, lorsqu'on admet que C ne contient aucun continu indécomposable (sauf, peut-être, des continus de condensation). Dans ce cas, qui correspond aux continus irréductibles du type λ [1]), T_x peut-être défini comme un continu de *condensation saturé* (c'est-à-dire: continu de condensation de C qui n'est situé dans aucun autre continu de condensation de C).

Enfin, dans le cas où toute tranche se réduit à un point, C est une courbe simple fermée, puisque la fonction T_x établit, dans ce cas, une homéomorphie entre la circonférence et le continu C.

§ 3. Frontières communes à $n\geqslant 3$ régions.

Théorème III. *Un continu situé sur le plan* [2]) *et étant une frontière commune à trois régions est, soit indécomposable, soit somme de deux continus indécomposables.*

Démonstration. Nous n'allons considérer que le cas où le continu envisagé C est borné, car le cas de continu non-borné se ramène à celui-ci par inversion, d'une façon tout-à-fait analogue à celle dont je me suis servi dans la démonstration du théor. VI de ma note des Fund. Math. VI, p. 139 [3]).

[1]) Cf. les continus „separable“ de M. Wilson (l. cit.).

[2]) Dans *l'espace* le théorème serait en défaut, comme l'a remarqué M. Nikodym. Considérons, en effet, un continu plan C qui est frontière commune à trois régions (du plan) et unissons tout point de C à un point situé au-dessus du plan et à un autre situé au-dessous du plan; le continu ainsi obtenu est une frontière commune à trois régions dans l'espace et ne satisfait pas à la thèse du théorème.

[3]) On y tient compte notamment des deux théorèmes de la note de M. Knaster et moi, publiés dans Fund. Math. V, l'un p. 32 et l'autre p. 42.

Soient P, Q et R trois régions (différentes) telles que

(1) $$C=F(P)=F(Q)=F(R).$$

Supposons que C est décomposable. Il existe donc (en vertu des propositions δ et η) deux continus K_1 et L, différents de C, et tels que

(2) $$\overline{C-K_1}=L \quad \text{et} \quad \overline{C-L}=K_1.$$

Supposons ensuite, contrairement au théorème, que C ne soit pas une somme de deux continus indécomposables. On peut donc admettre que L est décomposable:

(3) $$L=K_2+K_3, \quad K_2\neq L\neq K_3.$$

On a $K_1+K_2\neq C$, car on aurait dans le cas contraire: $C-K_1\subset K_2$, d'où $\overline{C-K_1}\subset K_2$ et, selon (2): $L\subset K_2$, contrairement à (3).

Nous avons ainsi la décomposition de C en trois continus K_1, K_2 et K_3 tels que:

(4) $$C=K_1+K_2+K_3, \quad K_i+K_{i+1}\neq C,$$

l'indice i admettant les valeurs 1, 2, 3 (les valeurs 4 et 5 étant réduites *modulo* 3).

Il existe, par conséquent, un cercle E_i ($i=1, 2, 3$) tel que

(5) $$E_iK_i\neq 0, \quad E_iE_{i+1}=0=E_i(K_{i+1}+K_{i+2}).$$

Donc, selon (1):

$$E_iP\neq 0, \quad E_iQ\neq 0, \quad E_iR\neq 0.$$

Ces inégalités entraînent l'existence de deux lignes brisées U et V telles que:

(6) $$U\subset P, \quad V\subset Q, \quad UE_i\neq 0\neq VE_i.$$

Considérons dans les ensembles UE_i et VE_i deux points p_i et q_i situés à distance *minimum* (et extraits resp. de ces ensembles). Soit T_i un triangle rectangulaire situé dans E_i et ayant p_i et q_i pour sommets des angles aigus. On a donc

(7) $$UT_i=p_i \quad \text{et} \quad VT_i=q_i.$$

Les points p_i et q_i étant situés resp. dans P et Q (selon (6)), on en conclut que dans l'intérieur du triangle T_i il existe des points de C, donc (en raison de (1)) de R. On peut donc construire une ligne brisée Z telle que: $Z\subset R$ et $ZT_i\neq 0$. Soit W la ligne brisée extraite de Z et irréductible par rapport à la propriété d'avoir des points communs avec chaque T_i ($i=1, 2, 3$). Evidemment il y a deux indices, soient 1 et 3 tels que WT_1 ainsi que WT_3 se réduisent aux extrémités r_1 et r_3 de W; de sorte que

(8) $$WT_1 = r_1, \quad WT_2 \neq 0, \quad WT_3 = r_3.$$

Convenons que $p_i q_i$ désigne soit le segment qui unit p_i à q_i soit la ligne formée de deux autres côtés du triangle T_i, et cela suivant que ce segment contient ou non des points de W. En raison de (8) on a donc

(9) $$W \cdot p_1 q_1 = r_1, \quad W \cdot p_2 q_2 \neq 0, \quad W \cdot p_3 q_3 = r_3$$

et en vertu de (7) on a

(10) $$U \cdot p_i q_i = p_i \quad \text{et} \quad V \cdot p_i q_i = q_i.$$

En outre, l'inclusion $p_i q_i \subset T_i \subset E_i$ entraîne en vertu de (5) la formule:

(11) $$p_i q_i \cdot p_{i+1} q_{i+1} = 0 = p_i q_i \cdot (K_{i+1} + K_{i+2})$$

d'où

(12) $$p_i q_i \cdot K_i \neq 0.$$

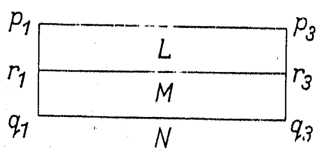
Considérons la somme

$$S = p_1 q_1 + q_1 q_3 + q_3 p_3 + p_3 p_1$$

où $q_1 q_3$ et $p_3 p_1$ dénotent des lignes brisées extraites resp. de V et U

Les formules (10) et (11) montrent que S est une ligne polygonale simple fermée. De plus, W étant une ligne brisée n'ayant que ses extrémités situées sur S (d'après (9)), $S+W$ coupe le plan en trois régions L, M et N telles que

$$F(L) = p_1 r_1 + W + r_3 p_3 + p_3 p_1$$
$$F(M) = q_1 r_1 + W + r_3 q_3 + q_3 q_1$$
$$F(N) = S$$



D'après (11): $(S+W)K_2 = 0$. Le continu K_2 est donc situé dans une des trois régions L, M ou N. Il ne peut pas être situé dans N, car l'ensemble formé de K_2 et de la ligne $p_2 q_2$, dépourvue des extrémités, est connexe (selon (12)) et admet des points communs avec W (selon (9)), tout en étant disjoint de S (qui forme la frontière de N, tandisque $NW = 0$).

On peut donc supposer que $K_2 \subset L$. Soit sur la ligne $p_2 q_2$ (ordonnée de p_2 à q_2) t le dernier point qui appartient à K_2; la ligne tq_2 n'ayant donc en commun avec C que le point t, on en conclut que $W \cdot tq_2 = 0$ (puisque $W \subset R$ et $q_2 \in Q$). Par conséquent, le continu $V + tq_2$ est disjoint de $F(L)$; il vient: $V + tq_2 \subset L$ (puisque $t \in K_2 \subset L$). Mais ceci est impossible, car les inclusions: $q_1 q_3 \subset V$ et $q_1 q_3 \subset S$ entraînent $SV \neq 0$, tandisque $SL = 0$, donc V ne peut pas être un sous-ensemble de L.

Ainsi, l'hypothèse que C n'est ni un continu indécomposable ni somme de deux continus indécomposables entraîne une contradiction.

§ 4. Les continus bicohérents.

Théorème IV. *Tout continu décomposable et bicohérent C se décompose en deux continus qui sont irréductibles entre tout couple de points extraits des deux composantes du produit de ces continus.*

De plus, Q étant un sous-continu arbitraire de C tel que $Q \neq C \neq \overline{C-Q}$, ces continus peuvent être supposés identiques respectivement à $\overline{C-Q}$ et à $\overline{C-\overline{C-Q}}$.

Démonstration. Posons $A = \overline{C-Q}$ et $B = \overline{C-A}$. D'après η, A et B sont deux continus tels que

(1) $$C = A + B, \quad A \neq C \neq B, \quad A = \overline{C-B}, \quad B = \overline{C-A}.$$

C étant bicohérent, le produit AB est somme de deux continus K et L. Il s'agit de prouver que X étant un continu tel que

(2) $$X \subset A \quad \text{et} \quad XK \neq 0 \neq XL$$

on a

(3) $$X = A.$$

L'identité $AB = K + L$ implique en vertu de (2) que $AB + X$ est un continu. Ce continu est le produit des continus A et $(B+X)$ Comme $A + (B+X) = C$, on en conclut, en vertu de la bicohérence et de la formule (1), que $B + X = C$; d'où $C - B \subset X$, donc $\overline{C-B} \subset X$ et comme selon (1): $A = \overline{C-B}$, il vient $X = A$.

Corollaire 1. *Un continu bicohérent, décomposable, plan et borné est la frontière commune à deux régions.*

Ce corollaire résulte du théorème précédent en vertu du théorème suivant [1]): étant donnés sur le plan deux continus bornés A

[1]) Ce théorème va paraître prochainement dans Fund. Math.

et B irréductibles entre tout couple de points extraits des composantes différentes du produit AB (ce produit étant supposé non-continu), la somme $A+B$ est une frontière commune à deux régions.

Il est à remarquer que, dans l'énoncé de ce corollaire, le terme „bicohérent" ne peut pas être remplacé par „multi-cohérent". En effet, on peut construire trois continus indécomposables équivalents (au sens topologique) au continu déjà cité de M. Knaster (moitié supérieure de la fig. III, p. 280, Fund. Math. VII) et les placer de façon que tous les trois aient un seul point commun p_0 et, en outre, que tout couple de ces continus ait un second point commun: p_1, p_2 ou p_3; de sorte que les points p_0, p_1, p_2 et p_3 soient situés deux à deux sur des „composants" distincts dans chacun des trois continus indécomposables. Le continu ainsi construit est multi-cohérent, sans être la frontière commune à deux régions.

Corollaire 2. *Le théorème fondamental (du § 2) subsiste, lorsqu'on remplace le terme „frontière commune à deux régions sur le plan" par le terme „continu bicohérent".*

Ce corollaire est une conséquence du théor. IV et de la proposition B du § 1 (cf. la démonstration du théor. fondamental).

Remarque I. *Toute courbe fermée de Schönflies est bicohérente.*

Cela résulte du théorème suivant de M. Straszewicz[1]): Si un continu plan et borné coupe le plan en deux régions et si on le décompose en deux continus dont aucun ne coupe le plan, le produit de ces continus se compose de deux continus disjoints.

La réciproque n'est pas vraie: un continu bicohérent plan peut admettre des régions secondaires.

Il est aussi à remarquer qu'une frontière commune à deux régions n'est pas nécessairement bicohérente, comme le prouve l'exemple 4a de l'introduction.

Quant aux frontières $F(R)$ des régions secondaires, on peut prouver pour le cas où C est bicohérent, que *$F(R)$ est soit un continu de condensation soit un continu indécomposable.* Cela résulte de la proposition plus générale (voir lemme 2 du § 2) que voici: *K étant un (vrai) sous-continu multi-cohérent et décomposable d'un continu bicohérent C, K est un continu de condensation de C.*

Pour prouver cette proposition, supposons que K n'est pas un continu de condensation. $C-\overline{C-K}$ est donc un continu non-vide. Or, $\overline{C-K}\cdot K=M+N$, deux continus disjoints et non-vides; par suite $K=\overline{C-\overline{C-K}}+M+N$. Cette décomposition prouve, en vertu de la multi-cohérence de K, que l'on a:

(1) soit $K=\overline{C-\overline{C-K}}+M$ soit $K=\overline{C-\overline{C-K}}+N$.

D'autre part, le produit $\overline{C-K}\cdot\overline{C-\overline{C-K}}$ étant composé de deux continus

[1]) *Ueber die Zerschneidung der Ebene durch abgeschlossene Mengen*, Fund. Math. VII, théor. III, p. 174.

disjoints, la formule

$$\overline{C-K}\cdot\overline{C-\overline{C-K}}=\overline{C-\overline{C-K}}\,M+\overline{C-\overline{C-K}}\,N$$

prouve que les deux sommandes de cette décomposition sont précisément ces deux continus. Il résulte donc de (1) que

$$K=\overline{C-\overline{C-K}}.$$

Il s'agit de prouver que le continu K est indécomposable. Or, supposons que $K=P+Q$, deux continus différents de K. Tout point de $K\,\overline{C-K}$ étant, en vertu du théor. IV, un point d'irréductibilité de K, on a évidemment $\overline{C-K}\cdot PQ=0$. D'où en vertu de la décomposition: $C=(\overline{C-K}+P)+(\overline{C-K}+Q)$, on conclut que PQ est un continu [les deux sommandes de cette décomposition étant des continus, car, si l'on avait par ex. $\overline{C-K}\,P=0$ la différence $C-Q$ ne serait pas connexe, conformément à la formule

$$C-Q=K-Q+\overline{C-K}-Q\subset P+\overline{C-K}].$$

Cette conclusion contredit l'hypothèse que K est multi-cohérent.

Remarque II. *Les continus n-cohérents, avec $n\geqslant 3$, ne peuvent se présenter que parmi les continus indécomposables ou sommes de deux continus indécomposables.*

En effet, les continus $\mathcal{C}_n$ de M. Knaster (Fund. Math. VII, p. 280) sont n-cohérents et s'obtiennent par la réunion de deux continus indécomposables. Pour se convaincre qu'inversement un continu C n-cohérent ($n\geqslant 3$) décomposable est toujours une somme de deux continus indécomposables, considérons la décomposition $C=A+B$, fournie par la proposition η. Soient p_1, p_2, p_3 trois points appartenant à trois composantes distinctes du produit AB. Si l'on suppose que A est décomposable, il existe évidemment un couple de ces points, soit $p_1\,p_2$, situé dans un vrai sous-continu K de A. On voit aussitôt que la formule: $C=A+(K+B)$ présente une décomposition de C en deux vrais sous-continus dont le produit contient $n-1$ composantes au plus, — contrairement à l'hypothèse.

Bibliographie.

(Concernant les frontières communes à deux régions).

Alexandroff P. *Ueber kombinatorische Eigenschaften allgemeiner Kurven*, Math. Ann. 96, 1926.

Brouwer L. E. J. *Zur Analysis Situs.* Math. Ann. 68, 1910.

— *On the structure of perfect sets of points.* Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 14, 1911.

Chittenden E. W. *Note on the division of a plane by a point set.* Bull. Amer. Math. Soc. 28, 1922.

Frankl F. *Topologische Beziehungen in sich kompakter Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen sowie Anwendung auf die Prim-Enden-Theorie* Wien. Ber. 136, 1927.

Hill L. S. *Transformations properties of certain general regions and of their frontiers.* Bull. Amer. Math. Soc. 32, 1926 (abstract).

Kerékjártó B. *Vorlesungen über Topologie I* (Abschn. III) Berlin 1923.
Kline J. R. *Concerning approachability of simple closed and open curves.* Trans. Amer. Math. Soc. 21, 1920.
Knaster B. *Quelques coupures singulières du plan.* Fund. Math. VII, 1925.
— et Kuratowski C. *Sur les continus non-bornés.* Fund. Math. V, 1924.
Kuratowski C. *Sur les coupures irréductibles du plan.* Fund. Math. VI, 1924.
— *Ueber geschlossene Kurven und unzerlegbare Kontinua.* Math. Ann. 1927.
— *Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan*, ce volume.
Mazurkiewicz S. *Sur les continus plans non-bornés.* Fund. Math. V, 1924.
— *Sur un ensemble G_δ qui n'est homéomorphe à aucun ensemble plan.* Fund. Math. I, 1920.
Moore R. L. *Concerning the common boundary of two domains.* Fund. Math. VI, 1924.
Rosenthal A. *Teilung der Ebene durch irreduzible Kontinua.* Sgb. Bay. Ak. Wiss. 1919.
Schönflies A. *Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten II*, Leipzig 1908.
Urysohn P. *Mémoire sur les multiplicités cantoriennes.* Fund. Math. VII, 1925.
Wilson W. A. *On the separation of the plane by irreducible continua.* Bull. Amer. Math. Soc. 33, 1927.
— *On irreducible cuts of the plane between two points*, ibid. (abstract).

Über eine Erweiterung abgeschlossener Mengen zu Jordanschen Kontinuen derselben Dimension*).

Von

W. Stepanoff und L. Tumarkin (Moskau).

1. Zwei metrische Räume heissen *isometrisch* [1]), wenn man den einen auf den andern umkehrbar eindeutig abbilden kann, so dass die Entfernung jedes Punktpaares des einen Raumes der Entfernung des entsprechenden Punktpaares des andern gleich ist.

Unter einer *Strecke* in einem metrischen Raume verstehen wir jede Teilmenge dieses Raumes, die ein isometrisches Bild einer gewöhnlichen geradlinigen Strecke ist.

Wenn je zwei Punkte eines gegebenen metrischen Raumes durch eine Strecke verbunden werden können, sagen wir, unser Raum sei *streckenweise zusammenhängend* [2]). Streckenweise zusammenhängend sind, z. B., der n-dimensionale Euklidische Raum, der Hilbertsche Raum, der Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes[3]).

Wir beweisen den folgenden

Satz I. *Es sei in einem streckenweise zusammenhängenden Raume R eine abgeschlossene und kompakte (in R)* [4]) *Menge F positiver Dimen-*

*) Vgl. P. Alexandroff und L. Tumarkin, Beweis des Satzes, dass jede abgeschlossene Menge positiver Dimension in einem lokal zusammenhängenden Kontinuum topologisch enthalten ist, *Fund. Math.*, t. XI, p. 141.

[1]) F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 2 Aufl. (1927), S. 94.

[2]) Vgl. Hausdorff, l. c., S. 96 (konvexe Menge).

[3]) Hausdorff, l. c., S. 98. Als Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes bezeichnet man die Gesamtheit aller Punkte dieses Raumes für welche die Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ den Ungleichungen $0 \leqslant x_i \leqslant \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, \dots)$ genügen.

[4]) Hausdorff, l. c., S. S. 107, 115; die Menge F ist also selbst ein kompakter metrischer Raum.