Quelques propriétés des ensembles abstraits.

(Second Mémoire [1])

Par

Maurice Fréchet (Strasbourg).

Espaces (L).

I. *Dans l'espace Q* (E. A., p. 162), *la définition adoptée pour la convergence d'une suite de points abstraits est la plus large possible* (E. A., p. 172).

En effet, dans le cas contraire, il y aurait au moins une suite $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, compacte, ayant un seul élément d'accumulation $f(x)$ et qui ne convergerait pas vers $f(x)$ en tout point de l'intervalle J.

Il y aurait donc un point x_0 de J et un nombre $\varepsilon > 0$, tels que pour tout entier p, on ait $|f_n(x_0) - f(x_0)| > \varepsilon$ pour au moins une valeur n_p de n supérieure à p. Or, de la suite des f_{n_p}, on pourrait par hypothèse extraire une suite qui converge en tout point de J et en particulier en x_0. D'où la contradiction à établir.

Espaces accessibles (ou espaces H).

II. *Dans un espace accessible localement connexe, tout ensemble ouvert est localement connexe.* (E. A., p. 244).

Considérons, plus généralement, dans un espace accessible quelconque, un ensemble E qui est connexe en un point a intérieur à E.

Soit maintenant e un sous-ensemble de E auquel a est intérieur. Il existe au moins un voisinage V_a^1 de a appartenant à e. Et puisque l'espace est accessible, pour tout voisinage V_a de a, il existe un voisinage V_a^2 de a appartenant à $V_a . V_a^1$, donc à $e . V_a$. Il y a, puisque E est connexe

[1] V. *Fundamenta Mathematicae*, t. X, p. 328—355. Comme dans ce Premier mémoire, nous renverrons pour les définitions adoptées ici, à notre livre „Les Espaces abstraits..." qui vient de paraitre à la librairie Gauthier-Villars et que nous désignerons dans ce qui suit par l'abréviation E. A.

en a, un voisinage W_a de a appartenant à V_a^2 tel que tout point b de $e . W_a$ appartienne en même temps que a, à un sous-ensemble connexe de $E . V_a^2$ et par suite de $e . V_a$. Donc, e est connexe en a.

En particulier, si E est localement connexe, il en est de même de chacun de ses sous-ensembles ouverts.

D'où résulte la proposition énoncée.

III. *Soit $U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x), \dots$, une suite de fonctionnelles continues en un point a d'un ensemble E, relativement à E. Si cette suite converge quasi-uniformément sur E, sa limite $U(x)$ est continue en a, relativement à E.* (E. A., p. 247).

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $|U_n(a) - U(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour $n > N$ et un nombre $N' \geqslant N$ tel qu'en tout point x de E, on ait $|U_{n_x}(x) - U(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour au moins un entier n_x compris entre N et N'. D'autre part, pour tout entier n, il existe un voisinage V_a^n de a tel que l'oscillation de $U_n(x)$ sur $E . V_a^n$ soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$.

L'espace considéré étant accessible, il existe un voisinage V_a appartenant à la fois aux V_a^n en nombre fini, pour lesquels n est compris entre N et N'. Par suite, on aura sur $E . V_a$

$$|U_{n_x}(a) - U_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De l'ensemble des trois inégalités résulte

$$|U(x) - U(a)| < E$$

pour tout x de $E . V_a$.

IV. *Soit $U_1(x), \dots, U_n(x), \dots$ une suite de fonctionnelles qui converge en tout point d'un ensemble E sur lequel ces fonctionnelles et leur limite $U(x)$ sont continues. Si E est compact en soi, la convergence est nécessairement quasi-uniforme sur E.* (E. A., p 247).

En effet, soient ε et N deux nombres positifs arbitraires. Posons $r_n(x) = U_x(x) - U(x)$. En tout point x de E, il y a un nombre $p_x \geqslant N$, tel que $|r_{x_p}(x)| < \varepsilon$. Soit n_x la plus petite valeur admissible pour p. Il s'agit de montrer que n_x est borné sur E

Dans le cas contraire, quel que soit $i > N$, il y aurait un point

x_i de E tel que $n_{x_i} > i+1$, d'où

$$|r_{m_i}(x_i)| \geqslant \varepsilon$$

où $m_i = n_{x_i} - 1 > i$.

Et il y a nécessairement une infinité de positions distinctes des x_i; l'ensemble E étant compact en soi, il y a donc au moins un point a de E qui est point d'accumulation de l'ensemble des x_i. Au point a, on a $|r_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour au moins une valeur de $m \geqslant N$. Et il y a deux voisinages de a où les oscillations respectives de U et de U_m sont inférieures à $\frac{\varepsilon}{3}$. L'espace considéré étant accessible, il y a un voisinage de a, V_a, commun à ces deux voisinages. Pour tout point x de V_a, on a donc:

$$|r_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |U(a) - U(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |U_m(x) - U_m(a)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où

$$|r_m(x)| < \varepsilon.$$

Ainsi, n_x est, pour tout point x de V_a, inférieur ou égal à un nombre fixe m. Pourtant, il y a dans V_a une infinité de points x_i, de sorte que n_x ne serait pas borné sur V_a.

Espaces (*D*).

V. *Ensembles complets.* En généralisant une démonstration donnée par M. Sierpiński d'un théorème dû à M. Lavrentieff, nous avons pu énoncer le théorème suivant.

Soient e, g deux ensembles complets appartenant respectivement à deux espaces (D), distincts ou non. Si ces deux ensembles sont homéomorphes on peut étendre cette homéomorphie à deux ensembles E, G comprenant e, g respectivement et qui sont des ensembles [F] au sens de M. Lebesgue.

Il importe de remarquer qu'*on peut supposer en outre, que E et G sont complets.* (E. A., p. 116).

En effet, la démonstration rappelée plus haut montre qu'on peut supposer E et G respectivement compris dans les ensembles de fermeture $\bar{e} = e + e'$ et $\bar{g} = g + g'$, de e et de g. Or nous avons démontré (E. A, p 263) que les ensembles de fermeture de deux ensembles complets sont complets. Alors E et G seront complets comme parties d'ensembles complets.

L'addition qu'on vient de formuler était d'ailleurs implicitement admise dans la déduction de la conséquence du théorème ci-dessus, énoncée E. A., p. 116.

Cette addition va nous faciliter la démonstration d'une proposition qui généralise le même théorème ci-dessus, en substituant à l'homéomorphie la notion plus générale d'égalité de deux types de dimensions

VI. *Type de dimensions d'un ensemble complet.* Considérons *deux ensembles complets E, G appartenant à deux espaces (D), distincts ou non.* Nous allons démontrer que *si E, G ont le même type de dimensions, il existe deux ensembles complets, qui sont des ensembles [F] au sens de M. Lebesgue, qui ont des types de dimensions égaux et qui comprennent E et G.* On peut de plus supposer que ces nouveaux ensembles appartiennent respectivement aux ensembles de fermeture de E et de G.

D'après l'hypothèse $dE = dG$, il existe un sous-ensemble e de E homéomorphe à G et un sous-ensemble g de G homéomorphe à E, ce qu'on peut représenter par la notation

$$G \sim e \subset E, \qquad E \approx g \subset G.$$

On vient de voir qu'on pourrait prolonger la première homéomorphie et l'étendre à deux ensembles e_1, G_1, qui sont [F] et complets. On pourra écrire:

$$G \subset G_1 \sim e_1 \supset e.$$

Et on aura de même avec des notations évidentes

$$E \subset E_1 \approx g_1 \supset g.$$

Nous allons montrer qu'on peut choisir e_1, g_1, E_1, G_1, de sorte que

$$e_1 \subset E_1 \quad \text{et} \quad g_1 \subset G_1.$$

Pour cela, posons en général

$$e_{n+1} = e_n \cdot E_n, \quad G_{n+1} \sim e_{n+1}, \quad g_{n+1} = g_n \cdot G_{n+1}, \quad E_{n+1} \approx g_{n+1}.$$

Il y a au moins une valeur de n, à savoir $n=1$, telle que les ensembles e_n, G_n, g_n, E_n et, éventuellement, ceux qui les précèdent, soient des ensembles [F] complets contenant respectivement e, G, g, E et contenus respectivement dans e_1, G_1, g_1, E_1. Si cela a lieu pour une valeur de n, les notations ci dessus déterminent e_{n+1}, G_{n+1}, g_{n+1} et E_{n+1} et ces ensembles satisferont aussi aux mêmes conditions.

La première équation détermine évidemment e_{n+1}; e_{n+1} appartenant à e_n appartiendra à e_1. D'autre part, e_n et E_n contenant respectivement e et E, e_{n+1} contiendra $e.E$ et comme $e \subset E$, e_{n+1} contient e. En outre e_n et E_n étant deux ensembles $[F]$ sont chacun ensemble commun à une suite dénombrable d'ensembles ouverts, donc $e_{n+1} = e_n . E_n$ aussi. Enfin e_{n+1} étant partie d'un ensemble complet est complet.

Passons à G_{n+1}. Puisque e_{n+1} appartient à e_1, l'homéomorphie entre e_1 et G_1 fera correspondre à e_{n+1} un sous-ensemble G_{n+1} bien déterminé de G_1. Et puisque e_{n+1} contient e, cette homéomorphie transformant e en G, G_{n+1} contiendra G. Enfin elle transformera e_{n+1} qui est un ensemble $[F]$ complet en un ensemble $[F]$ complet (E. A., p. 114).

Des raisonnements analogues s'appliqueront à g_{n+1} et E_{n+1}.

Soit alors

$$e_\omega = \prod_{n=1}^{n=\infty} e_n, \quad g_\omega = \prod_{n=1}^{n=\infty} g_n, \quad E_\omega = \prod_{n=1}^{n=\infty} E_n, \quad G_\omega = \prod_{n=1}^{n=\infty} G_n.$$

Comme e_n, g_n, E_n, G_n, ces ensembles seront évidemment des ensembles $[F]$ complets appartenant respectivement à e_1, g_1, E_1, G_1 et comprenant respectivement e, g, E, G. En outre, l'homéomorphie entre e_1 et G_1 transformant aussi, quel que soit n, e_n en G_n, transformera e_ω en G_ω. On aura

$$G \subset G_\omega \sim e_\omega \supset e$$

et de même

$$E \subset E_\omega \approx g_\omega \supset e.$$

Mais e_ω appartient à e_{n+1} qui appartient à E_n. Donc e_ω appartient à l'ensemble commun aux E_n, c'est-à-dire à E_ω. De même g_ω appartient à G_ω. Les deux ensembles E_ω, G_ω étant tels que

$$G_\omega \sim e_\omega \subset E_\omega$$
$$E_\omega \approx g_\omega \subset G_\omega$$

ont donc même type de dimensions. Et puisque

$$E \subset E_\omega \subset E_1; \quad G \subset G_\omega \subset G_1,$$

on a

$$dG = dE \subset dE_\omega = dG_\omega \begin{cases} \subset dE_1 \\ \subset dG_1 \end{cases}.$$

En particulier, puisqu'on peut supposer E_1 et G_1 respectivement compris dans les ensembles de fermeture $\bar{E}$ et $\bar{G}$ de E et G, on pourra aussi supposer que E_ω et G_ω sont respectivement compris dans $\bar{E}$ et $\bar{G}$ et on a

$$dE_\omega = dG_\omega \subset \begin{cases} d\bar{E} \\ d\bar{G} \end{cases}.$$

VII. *Tout espace (D) séparable peut être engendré par la transformation ponctuelle continue d'un ensemble linéaire borné discontinu* (E. A., p. 272).

La proposition a été démontrée par M. Alexandroff dans le cas d'un espace (D) compact. Supposons que l'espace (D) envisagé maintenant soit séparable. Alors on sait (E. A., p. 296) qu'il est homéomorphe à un ensemble compact G de l'espace E_ω. Alors l'ensemble de fermeture $\bar{G} = G + G'$ de E_ω étant compact et fermé peut être considéré comme un espace (D) compact, il s'obtient d'après la proposition de M. Alexandroff par la transformation ponctuelle continue d'un ensemble linéaire borné discontinu, L. Dans cette transformation, il y aura au moins un sous-ensemble D de L qui sera transformé dans G. La suite de la transformation continue et de l'homéomorphie donnera une transformation ponctuelle continue d'ensemble linéaire borné discontinu D en l'espace (D) séparable donné.

VIII. *Les points d'une courbe de Jordan non fermée, sans point multiple, ne peuvent être rangés d'une façon continue que dans un seul ordre* (à partir d'une même extrémité). (E. A., p. 152).

Supposons qu'il existe deux rangements R, R' continus distincts à partir de l'extrémité A. Alors il existe deux points M, M' tels qu'on rencontre M avant M' dans R, M après M' dans R'. Dans le rangement R, l'arc $\widehat{AM}$ est distinct de l'arc $\widehat{\widehat{AM}}$ parcouru dans le rangement R', puisque le second passe par M' et non le premier (sans quoi M' serait point multiple). 1° Supposons qu'il y ait sur $\widehat{\widehat{AM}}$ des points M' aussi voisins qu'on le veut du point A et tels que M' reste en dehors de $\widehat{AM}$, c'est-à-dire sur l'arc restant $\widehat{MB}$. Alors cette suite de points tend vers A et reste sur $\widehat{MB}$. Il faudrait donc que A fut aussi sur $\widehat{MB}$ et soit par conséquent un point multiple. 2° Dans le cas contraire, il y a une position M'_0 distincte de A, sur $\widehat{AM}$ telle qu'aucun point M'' de $\widehat{AM'_0}$ sauf peut-être M'_0 ne soit sur $\widehat{MB}$ et qu'il y ait sur $\widehat{M'_0M}$ un point M''' aussi voisin que l'on veut de M'_0 et situé sur $\widehat{MB}$. Alors M'_0 appartiendrait à $\widehat{MB}$ comme limite de M''' et M'_0 appartiendrait à $\widehat{AM}$ comme limite de point M'' de $\widehat{AM}$. Et comme M'_0 est distinct de M, la courbe aurait encore un point multiple.

Conditions pour qu'un ensemble soit compact.

M. M. Alexandroff et Niemytzki m'ont récemment communiqué une forme intéressante de la condition pour qu'un ensemble de points de l'espace de Hilbert soit compact. Dans les lignes qui suivent, je montre comment on peut retrouver leur résultat en le rattachant à une autre forme de condition que j'avais indiquée autrefois; et j'étends leur proposition dans diverses directions.

IX. Condition pour qu'un ensemble complet soit compact. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E complet soit compact est qu'il existe des ensembles compacts (distincts ou non) aussi voisins qu'on le veut de E.*

La condition est évidemment nécessaire. Il n'est besoin de préciser le sens de l'énoncé que pour en établir la suffisance.

Nous supposons que E est un ensemble complet appartenant à un espace (D), et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble compact F_ε appartenant au même espace (D) et tel que tout point de E soit à une distance $< \varepsilon$ d'un point, au moins, de F_ε. Et, ici, nous supposons qu'on emploie une définition de la distance satisfaisant au critère de convergence de Cauchy au moins en ce qui concerne les suites de points de E, — ce qui est possible par hypothèse.

Ceci étant, nous allons montrer que E est compact. Il suffira d'établir que toute suite infinie de points de E distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a un ensemble dérivé non vide.

Par hypothèse, il existe un point A_n^ε de F_ε à une distance $< \varepsilon$ de a_n. Puisque F_ε est compact, on peut extraire de la suite $A_1^\varepsilon, A_2^\varepsilon, \ldots$, une suite convergente de points. Dans cette nouvelle suite, les distances mutuelles sont $< \varepsilon$ à partir d'un certain rang. En supprimant les premiers termes de cette suite, on peut supposer que ce rang est le premier. On a donc une suite $A_{n_1}^\varepsilon, A_{n_2}^\varepsilon, \ldots$ telle que $(A_{n_i}^\varepsilon, A_{n_j}^\varepsilon) < \varepsilon$ quels que soient i et j. D'où

$$(a_{n_i}, a_{n_j}) \leqslant (a_{n_i}, A_{n_i}^\varepsilon) + (A_{n_i}^\varepsilon, A_{n_j}^\varepsilon) + (A_{n_j}^\varepsilon, a_{n_j}) < 3\,\varepsilon.$$

On a finalement extrait de la suite $a_1, a_2, \ldots$ une suite de points $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ dont les distances mutuelles sont toutes $< 3\varepsilon$. Appelons $b_1, b_2, \ldots$ la suite qu'on extrairait ainsi pour $3\varepsilon = 1$; appelons $c_1, c_2, \ldots$ la suite qu'on extrairait ainsi de la suite $b_1, b_2, \ldots$ pour $3\varepsilon = \frac{1}{2}$; appelons $d_1, d_2, \ldots$ la suite qu'on extrairait de même de la suite $c_1, c_2, \ldots$ pour $3\varepsilon = \frac{1}{3}$, etc.

Alors les distances mutuelles des points de la suite $a_1, b_2, c_3, d_4, \ldots$ sont à partir du rang $n+1$ inférieures à $\frac{1}{n}$, et d'après le critère de Cauchy, cette suite est convergente. Comme elle est formée de points de rangs certainement croissants de la suite $a_1, a_2, \ldots$ celle-ci a bien au moins un point d'accumulation.

X. *Condition pour qu'un ensemble de points de l'espace de Hilbert soit compact.* Il s'agit de l'espace des points X dont chacun a une suite infinie de coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_n$, dont la somme des carrés converge. Nous avons énoncé dans les Comptes Rendus de 1907, t. CXLIV, p. 1414, une condition pour qu'un ensemble E de points de cet espace soit compact. Et nous l'avons démontrée dans les Rend. Cir. Mat. Palermo, 1910, t. 30, p. 18. Il faut et il suffit que sur E, la somme de la série

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \ldots$$

soit bornée et que cette série converge uniformément.

En partant de cette condition, nous allons montrer qu'on retrouve facilement la condition obtenue directement par M. M. Alexandroff et Niemytzki:

XI. *Pour qu'un ensemble fermé E situé dans l'espace de Hilbert soit compact, il faut et il suffit que la condition suivante se trouve réalisée:*

Quelque soit le nombre positif ε, il existe une déformation continue Δ qui transforme E en un ensemble E_0 homéomorphe à un sous-ensemble H fermé et borné d'un espace cartésien de telle manière *qu'aucun point de E ne subisse un déplacement supérieur à ε au cours de la déformation Δ.*

Il y a lieu de remarquer: 1° qu'on peut, en modifiant légèrement l'énoncé, l'étendre au cas des ensembles non fermés, 2° que la condition nécessaire peut être rendue moins stricte.

On peut d'abord ne pas supposer E fermé et alors au lieu de supposer E_0 homéomorphe à H, on supposera simplement que E_0 appartient à un ensemble $\overline{E_0}$ homéomorphe à H.

D'autre part, il n'est pas nécessaire pour que E soit compact d'exiger que la transformation Δ soit continue. Remarquons en outre que H étant fermé et borné, l'ensemble $\overline{E_0}$ homéomorphe à H est nécessairement compact et par suite E_0 aussi. Finalement, pour démontrer que la condition énoncée ci-dessus, même étendue aux ensembles E non fermés est suffisante, il reste à démontrer que la condition moins stricte ci-dessus, est suffisante:

XII. *Un ensemble E de points de l'espace de Hilbert est compact s'il existe dans cet espace des ensembles E_0 compacts (distincs ou non) aussi voisins qu'on le veut de E.* Nous entendons par là que pour tout $\varepsilon > 0$, il y a un ensemble compact E_0 tel que tout point de E soit à distance inférieure à ε d'un au moins des points de E_0.

Or cette proposition est un cas très particulier de la condition établie plus haut pour qu'un ensemble complet soit compact.

Par contre, l'énoncé de M. M. Alexandroff et Niemytzki fournit, en ce qui concerne la condition nécessaire, un renseignement précieux sur le mode de transition des ensembles compacts de l'espace de Hilbert aux ensembles bornés dans les espaces cartésiens. Nous allons montrer comment on peut le rattacher à la proposition XIII rappelée plus haut.

Soit E un ensemble compact situé dans l'espace de Hilbert et soit ε un nombre positif donné. D'après cette proposition, il existe un rang n déterminé uniquement par ε et tel que

$$x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \dots < \varepsilon^2$$

pour tout point $X(x_1, x_2, \dots)$ de E. Soit t un nombre quelconque, faisons correspondre à X, le point $X(t)$ dont les coordonnées sont

$$x_1, \dots x_n, \; tx_{n+1}, \; tx_{n+2}, \dots \; tx_{n+p}, \dots$$

Quand X décrit E, $X(t)$ décrit un ensemble $E(t)$ de points qui appartiennent évidemment à l'espace de Hilbert.

La correspondance X, $X(t)$ réalisée, pour une valeur fixe de t entre les points de E et de $E(t)$ est, pour $t \neq 0$, une homéomorphie.

En effet:

$$[X(t), X'(t)]^2 = (x_1 - x_1')^2 + \dots + (x_n - x_n')^2 + \\ + t^2[(x_{n+1} - x'_{n+1})^2 + \dots + (x_{n+p} - x'_{n+p})^2 + \dots]$$

et ce second membre est

$$\leqslant (X, X')^2 \qquad \text{si } t^2 \leqslant 1$$
$$\leqslant t^2 (X, X')^2 \qquad \text{si } t^2 \geqslant 1.$$

De même

$$(X, X')^2 \leqslant [X(t), X'(t)]^2 \quad \text{si } t^2 \geqslant 1$$
$$(X, X')^2 \leqslant \frac{1}{t^2} [X(t), X'(t)]^2 \quad \text{si } t^2 \leqslant 1.$$

Donc: 1° Si l'un des couples X, X' et $X(t)$, $X'(t)$ est formé de 2 points distincts, il en est de même de l'autre, 2° si X' tend vers X, $X'(t)$ tend vers $X(t)$ et réciproquement.

Dans le cas particulier où $t = 0$, les formules précédentes montrent seulement que la correspondance envisagée est une transformation univoque continue de E en $E(0)$ ou plus simplement E_0.

Or E_0 est évidemment homéomorphe à un ensemble borné appartenant à l'espace cartésien R_n à n-dimensions. D'autre part, on remarque que si l'on fait décroitre t de 1 à 0, $E(t)$ est un ensemble variable subissant une déformation qui l'amène de E en E_0. Dans cette déformation, le déplacement d'un point de $E(t)$ a pour carré

$$[X, X(t)]^2 = (1-t)^2 (x_{n+1}^2 + \dots) \leqslant (1-t)^2 \varepsilon^2 \leqslant \varepsilon^2;$$

ce déplacement reste $\leqslant \varepsilon$.

Enfin, cette déformation est continue, car on a:

$$[X(t), X(t')]^2 = (t-t')^2 x_{n+1}^2 + \dots + (t-t')^2 x_{n+p}^2 + \dots \leqslant (t-t')^2 \varepsilon^2.$$

Donc si t' tend vers t, $[X(t), X(t')]$ tend vers zéro et cela uniformément.

Les points de $\overline{E_0}$ ont, comme ceux de E_0, des coordonnées nulles à partir du rang $n+1$; donc $\overline{E_0}$ est homéomorphe à un ensemble H de points de l'espace cartésien R_n à n-dimensions. Or.

par hypothèse, la série $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_{n+1}^2+\ldots$ a une borne supérieure M, finie quand X parcourt E. On aura donc $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant M$ quand X_0 parcourt E_0 et même aussi $\overline{E}_0$, et par suite aussi H: H est borné et fermé. Finalement, si un ensemble E de points de l'espace de Hilbert est compact il existe pour chaque nombre $\varepsilon>0$, une déformation continue qui transforme E en un ensemble E_0 contenu dans un ensemble $\overline{E}_0$ homéomorphe à un ensemble borné et fermé d'un espace cartésien, et cela de manière qu'aucun point de E ne subisse un déplacement $>\varepsilon$ au cours de la déformation.

D'ailleurs, on peut préciser encore ce résultat et éviter l'intervention de $\overline{E}_0$, en définissant la distance dans l'espace euclidien R_n comme d'ordinaire, ce qui permet de considérer R_n comme une partie de l'espace de Hilbert. Alors:

XIII. *Si E est un ensemble compact appartenant à un espace de Hilbert, il existe pour chaque nombre $\varepsilon>0$, une déformation continue Δ de E au cours de laquelle aucun point de E ne subit un déplacement $>\varepsilon$ et qui transforme E en un ensemble borné E_0 appartenant à un espace euclidien plongé dans l'espace de Hilbert.*

La réciproque est vraie, même si E, ni E_0, ne sont fermés

Remarque. La preposition de M. M. Alexandroff et Niemytzki peut s'étendre à bien d'autres espaces qu'à l'espace de Hilbert. Par exemple, elle s'étend sans changer la démonstration (pourvu qu'on remplace partout les carrés $(x_i-x_i')^2$ par $|x_i-x_i'|$) à l'espace A des séries absolument convergentes (E. A. p. 86).

Elle s'étend, en modifiant assez peu la démonstration, à l'espace (E_ω). Soit E un ensemble compact de points de cet espace, formons de même $E(t)$.

Après avoir déterminé n par la condition que

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots<\varepsilon,$$

on aura:

$$(X, X(t))=\frac{1}{(n+1)!}\frac{|1-t||x_{n+1}|}{1+|1-t||x_{n+1}|}+\ldots\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots<\varepsilon.$$

On aura en outre

$$[X(t), X(t')]=\frac{1}{(n+1)!}\frac{|t-t'||x_{n+1}|}{1+|t-t'||x_{n+1}|}+\frac{1}{(n+2)!}\frac{|t-t'||x_{n+1}|}{1+|t-t'||x_{n+2}|}+\ldots$$
$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\frac{|t-t'|M_{n+1}}{1+|t-t'|M_{n+1}}+\frac{1}{(n+2)!}\frac{|t-t'|M_{n+2}}{1+|t-t'|M_{n+2}}+\ldots$$

en appelant M_p la borne supérieure de $|x_p|$ sur E, borne qui est finie puisque E est compact. Lorsque $|t-t'|$ décroit de $+\infty$ à 0, le dernier membre décroit de $\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots$ à 0; il peut être rendu inférieur à une quantité positive arbitraire η en prenant $|t-t'|$ inférieure à une quantité ω indépendante du point X.

Donc $X(t')$ tend vers $X(t)$ quand t' tend vers t, et cela uniformément quand X parcourt E.

Enfin, on a, d'une part:

$$[X(t), X'(t)]=\frac{|x_1-x_1'|}{1+|x_1-x_1'|}+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{|x_n-x_n'|}{1+|x_n-x_n'|}+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\frac{|t||x_{n+1}-x_{n+1}'|}{1+|t||x_{n+1}-x_{n+1}'|}+\ldots\leqslant(X, X')$$

pour $|t|<1$.

D'autre part, si $|t|<1$ et $t\neq 0$:

$$(X, X')-[X(t), X'(t)]=$$
$$=\frac{1}{(n+1)!}\left\{\frac{|x_{n+1}-x_{n+1}'|}{1+|x_{n+1}-x_{n+1}'|}-\frac{|t||x_{n+1}-x_{n+1}'|}{1+|t||x_{n+1}-x_{n+1}'|}\right\}+\ldots\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1-|t|}{|t|}\left\{\frac{1}{(n+1)!}\frac{|t||x_{n+1}-x_{n+1}'|}{1+|t||x_{n+1}-x_{n+1}'|}+\ldots\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1-|t|}{|t|}[X(t), X'(t)].$$

D'où:

$$(X, X')\leqslant\frac{1}{|t|}[X(t), X'(t)].$$

Par conséquent, si $|t|<1$, $X'(t)$ tend vers $X(t)$ quand X' tend vers X et si en outre $t\neq 0$, X' tend vers X quand $X'(t)$ tend vers $X(t)$. La transformation de E en $E(t)$ est une homéomorphie quand $t\neq 0$ et $|t|<1$; c'est une transformation univoque et continue quand $t=0$.

On voit aussi que sur $\overline{E}_0$ aussi bien que sur E_0 et sur E, on a $|x_1| \leqslant M_1, \ldots |x_n| \leqslant M_n$, de sorte que $\overline{E}_0$ est borné et fermé. Le reste de la démonstration s'ensuit.

Question à résoudre. La proposition de M. M. Alexandroff et Niemytzki a déjà été étendue ici-même en ce qui concerne la condition suffisante aux ensembles de tous les espaces (D) complets (au lieu du seul espace de Hilbert). Elle vient d'être étendue en ce qui concerne la condition nécessaire à deux autres espaces que l'espace de Hilbert. Cela conduit à penser que cette condition nécessaire doit pouvoir être étendue aux ensembles compacts de toute une catégorie d'espaces (D), qu'il serait intéressant de caractériser.

17 Déc. 1927.