Sur la propriété de Darboux des fonctions continues d'ensemble.

Par

G. Poprougénko (Varsovie).

Soit E un espace métrique, M — un σ-corps d'ensembles [1]), satisfaisant à la condition suivante: les relations

$$(1) \qquad \xi \epsilon Z, \quad Z \epsilon M,$$

entraînent:

$$(2) \qquad (\xi) \epsilon M$$

(où (ξ) désigne l'ensemble formé d'un seul élément ξ).

Soit $\varphi(Z)$ une fonction réelle d'ensemble (finie ou non), définie dans M.

Définition I. Nous dirons que la fonction $\varphi(Z)_{Z \epsilon M}$ *possède sur M la propriété de Darboux*, si les relations:

$$(3) \qquad A \subset B, \quad A \epsilon M, \quad B \epsilon M$$

$$(4) \qquad \varphi(A) \leqslant \varphi(B),$$

$$(5) \qquad \varphi(A) \leqslant \alpha \leqslant \varphi(B),$$

entraînent l'existence d'un (au moins) ensemble X, satisfaisant aux conditions:

$$(6) \qquad \begin{cases} A \subset X \subset B, & X \epsilon M, \\ \varphi(X) = \alpha, \end{cases}$$

[1]) Une famille M d'ensembles est dite *σ-corps* si elle satisfait aux deux conditions suivantes: 1) si $E_n \epsilon M$ (pour $n = 1, 2, \ldots$), on a $E_1 + E_2 + \ldots \epsilon M$; 2) si $E_1 \epsilon M$ et $E_2 \epsilon M$, on a $E_1 - E_2 \epsilon M$. Cf. H. Hahn *Theorie der reellen Funktionen*. Berlin 1921, p. 394.

et si les relations analogues ont toujours lieu au cas, où les inégalités dans (3) et (4) sont de sens contraire.

Soit maintenant $\xi_0 \epsilon E$ un point de notre espace, tel que

$$(\xi_0) \epsilon M.$$

Désignons par Z_{ξ_0} l'ensemble variable, remplissant les conditions:

$$(7) \qquad \xi_0 \epsilon Z_{\xi_0}, \quad Z_{\xi_0} \epsilon M.$$

Définition II. Nous dirons que la fonction $\varphi(Z)$ est *localement continue* sur M au point ξ_0 par rapport à la base $d(Z)$ (où $d(Z)$ désigne le diamètre de l'ensemble variable $Z \epsilon M$) s'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, un nombre $\delta = \delta(\xi_0, \varepsilon) > 0$, tel que la relation

$$(8) \qquad d(Z_{\xi_0}) < \delta$$

entraîne:

$$(9) \qquad |\varphi(Z_{\xi_0})| < \varepsilon.$$

La fonction $\varphi(Z)$ sera dite *continue sur l'ensemble* $A \subset \sum_{Z \epsilon M} Z$, si elle est localement-continue sur M en tout point $\xi \epsilon A$. Dans le cas où $A = \sum_{Z \epsilon M} Z$, nous dirons tout simplement que $\varphi(Z)$ est *continue sur M*.

La continuité est uniforme sur $A \subseteq \sum_{Z \epsilon M} Z$, s'il existe, $\varepsilon > 0$ étant donné, un nombre *fixe* $\delta > 0$, remplissant les conditions (8) et (9) et correspondant à tout point ξ de A.

Notre définition fondamentale de la continuité locale qui est plus générale que la définition de la continuité (d'une fonction d'ensemble de M. de la Vallée Poussin [1]) coïncide, pour les fonctions absolument additives finies, avec celle de M. Hahn [2]).

Cela posé, on s'assure sans peine que la propriété de Darboux n'est en général ni nécessaire ni suffisante pour la continuité d'une fonction réelle d'ensemble. Or, il est autrement, si la fonction en question est soumise en outre à la condition de l'additiveté absolue. On peut établir dans ce cas le propostion suivante.

Théorème. *Soient: E_0 un espace métrique semi-compact, M_0 un σ-corps d'ensembles de E_0, contenant tout ensemble fermé, et $\varphi(Z)_{Z \epsilon M_0}$ une fonction réelle d'ensemble, définie dans M_0 et satisfaisant aux conditions suivantes:*

[1]) C. de la Vallé Poussin. *Intégrales de Lebesgue* etc. II, 47.

[2]) H. Hahn. *Théorie d. reellen Funktionen*. VI, § 3.

1°. *$\varphi(Z)$ est absolument additive sur M_0.*

2°. *Il existe, pour $\xi \in E_0$, au moins un voisinage U_ξ de ξ, pour lequel on a:*

$$|\varphi(U_\xi)| < \infty.$$

Pour que la fonction $\varphi(Z)$ soit continue sur M_0 par rapport à la base $d(Z)$, il faut et il suffit qu'elle possède sur M_0 la propriété de Darboux.

Démonstration. I. La propriété est nécessaire.

La démonstration s'appuit sur le lemme suivant:

Lemme. Une fonction réelle d'ensemble $\varphi(Z)$ continue sur M_0 par rapport à la base $d(Z)$ est continue uniformément (p. rap. à $d(Z)$) sur tout ensemble compact.

En effet, soient $A \subset E_0$ un ensemble compact, $\varepsilon > 0$ un nombre donné. Définissons dans l'ensemble $\bar{A}$ une fonction du point $f(\xi)$ par les conditions suivantes:

$$1) \qquad f(\xi) = \operatorname{Sup}\{\delta(\xi, \varepsilon)\}\ ^{1)},$$

si ce dernier nombre est fini, et:

$$2) \qquad f(\xi) = 1,$$

si $\operatorname{Sup}\{\delta(\xi, \varepsilon)\} = \infty$, $\delta(\xi, \varepsilon)$ ayant la signification des relations (8) et (9).

Supposons qu'on a:

$$\operatorname*{Inf}_{\xi \in \bar{A}}\{f(\xi)\} = 0.$$

L'ensemble $\bar{A}$ étant fermé et compact, il en résulte qu'il existe une suite infinie de points différents $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$, satisfaisants aux conditions:

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi_0 \in \bar{A}, \quad \xi_n \in \bar{A}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \xi_0, \ \lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n) = 0. \end{cases}$$

Soit $0 < \eta < f(\xi_0)$ un nombre donné. De la définition de $f(\xi)$ résulte que pour tout ensemble Z_{ξ_0}, contenu dans $K\left(\xi_0, \frac{\eta}{2}\right)$ [2]), on a;

$$(11) \qquad |\varphi(Z_{\xi_0})| < \varepsilon.$$

[1]) Suivant M. Hausdorff, qui désigne par *Sup* et *Inf* les bornes supérieure et inférieure d'un ensemble de nombres.

[2]) $K(p, r)$ désigne l'ensemble de tous les points de E_0 dont la distance du point p est $< r$.

Or, la fonction $\varphi(Z)$ étant continue sur M_0 par rapport à $d(Z)$, il est

$$\varphi((\xi)) \equiv 0,$$

pour $\xi \in E_0$.

Il s'en suit (et de la relation (11)), qu'on a:

$$(12) \qquad |\varphi(B)| < \varepsilon,$$

pour tout ensemble $B \subset K\left(\xi_0, \frac{\eta}{2}\right)$, $B \in M_0$.

Soit ξ' un point quelconque de l'ensemble $\bar{A} \cdot K\left(\xi_0, \frac{\eta}{4}\right)$.

On voit que tout ensemble $Z_{\xi'}$, tel que $d(Z_{\xi'}) < \frac{\eta}{4}$, remplit la condition:

$$Z_{\xi'} \subset K\left(\xi', \frac{\eta}{4}\right) \subset K\left(\xi_0, \frac{\eta}{2}\right),$$

ce qui donne, d'après (12):

$$|\varphi(Z_{\xi'})| < \varepsilon.$$

On a donc:

$$f(\xi') \geqslant \frac{\eta}{4},$$

pour tout $\xi' \in \bar{A} \cdot K\left(\xi_0, \frac{\eta}{4}\right)$, ce qui contredit (10).

Nous avons ainsi démontré que

$$\operatorname*{Inf}_{\xi \in \bar{A}}\{f(\xi)\} = c > 0,$$

et il est évident que tout nombre $b < c$ a la valeur d'un δ correspondant au nombre ε donné et applicable à tout point $\xi \in \bar{A}$, d'où il résulte que $\varphi(Z)$ est continue uniformément sur $A \subset \bar{A}$, c. q. f. d. [1]).

Soient maintenant $\varphi(Z)$ une fonction continue sur M_0 par rapport à la base $d(Z)$ et satisfaisant aux conditions 1° et 2° du théorème A et B, deux ensembles de M_0, tels que $A \subset B$.

On voit que si $\varphi(A) = \varphi(B)$, le théorème est vrai. Il suffit donc de le démontrer dans le cas où $\varphi(A) < \varphi(B)$, α est un nombre quelconque remplissant la condition:

$$(13) \qquad \varphi(A) < \alpha < \varphi(B),$$

[1]) Il est facile de voir qu'une fonction continue au sens de la Déf. II n'est pas nécessairement continue uniformément sur un ensemble quelconque.

puisqu'on ramène les conditions analogues: $A \subset B$, $\varphi(A) > \varphi(B)$, au cas actuel, en posant $F(Z) = -\varphi(Z)$.

Supposons d'abord que l'ensemble $B - A$ est compact. On a nécessairement (d'après le lemme démontré):

$$0 < \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(B - A) < \infty, \tag{14}$$

$\varphi(A)$ pouvant être supposé fini, puisque dans le cas contraire on aurrait, comme on sait (d'après 1°) soit:

$$\varphi(A) = \varphi(B) = +\infty,$$

soit

$$\varphi(A) = \varphi(B) = -\infty$$

les conditions:

$$Z_1 \neq Z_2, \quad Z_1 \epsilon M_0, \quad Z_2 \epsilon M_0, \quad \varphi(Z_1) = +\infty, \quad \varphi(Z_2) = -\infty.$$

étant impossibles comme incompaétibles avec l'additivit (absolue) supposée de $\varphi(Z)$], et le théorème serait encore vrai.

Nous allons maintenant déterminer un procédé inductif pour la construction de l'ensemble intermédiaire cherché. Posons dans ce but:

$$K_0 = A, \quad L_0 = B - A, \quad p_1 = \frac{\alpha - \varphi(K_0)}{2}.$$

La fonction $\varphi(Z)$ étant continue uniformément sur $\overline{L_0}$ par rapport à la base $d(Z)$, il existe un nombre $\delta > 0$, tel que pour tout ensemble $X \epsilon M_0$, tel que

$$X \subset K(\xi, \delta), \quad \xi \epsilon \overline{L_0},$$

on aura:

$$|\varphi(X)| < p_1.$$

L'ensemble $\overline{L_0}$ étant couvert par l'ensemble

$$\sum_{\xi \epsilon \overline{L_0}} K(\xi, \delta),$$

il existe, comme on sait, une suite finie de points $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n_1}$ de $\overline{L_0}$, telle que

$$L_0 \subset \overline{L_0} \subset \sum_{k=1}^{k=n_1} K(\xi_k, \delta).$$

Posons:

$$A_1 = L_0 \cdot K(\xi_1, \delta),$$

$$A_k = L_0 \cdot \{[K(\xi_1, \delta) + \ldots + K(\xi_k, \delta)] - [K(\xi_1, \delta) + \ldots + K(\xi_{k-1}, \delta)]\},$$
pour $k = 2, 3, \ldots, n_1$.

Les ensembles A_k ainsi définis satisfont aux conditions suivantes:

$$L_0 = A_1 + A_2 + \ldots + A_{n_1}, \quad A_k \cdot A_l = 0, \quad A_k \subset K(\xi_k, \delta), \qquad (k \neq l)$$

et, comme ils appartiennent à M_0:

$$\varphi(L_0) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \ldots + \varphi(A_{n_1}) > 2p_1, \tag{15}$$

$$|\varphi(A_k)| < p_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n_1). \tag{16}$$

Nous supposons que les A_k à $\varphi(A_k) > 0$ sont dans (15) postérieurs aux autres (pour lesquels on a: $\varphi(A_k) \leqslant 0$) et désignons par k_1 le premier nombre naturel $\leqslant n_1$, tel que

$$\varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \ldots + \varphi(A_{k_1}) > 2p_1.$$

Il s'en suit (d'après (16)):

$$p_1 < \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \ldots + \varphi(A_{k_1-1}) < 2p_1,$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\alpha - \varphi(K_0)}{2} < \sum_{K=1}^{K=K_1-1} \varphi(A_K) < \alpha - \varphi(K_0).$$

En posant:

$$K_1 = K_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{K_1-1} \subset B,$$

on obtient (K_1 appartenant à M_0):

$$\varphi(K_0) + \frac{\alpha - \varphi(K_0)}{2} < \varphi(K_1) < \alpha.$$

Pareillement, posons:

$$L_1 = B - K_1, \quad p_2 = \frac{\alpha - \varphi(K_1)}{2}.$$

On a:

$$\varphi(L_1) > \alpha - \varphi(K_1) = 2p_2.$$

En raisonnant comme plus haut, on obtient l'ensemble K_2, tel que

$$K_1 \subset K_2 \subset B, \quad K_2 \epsilon M_0,$$

$$\varphi(K_1)+\frac{\alpha-\varphi(K_1)}{2}<\varphi(K_2)<\alpha.$$

En général, en répétant le procédé indiqué pour tout n naturel on définie une suite croissante d'ensembles K_n $(n=1, 2, 3, \dots)$, telle que

$$K_n \subset B, \quad K_n \epsilon M_0,$$

$$\varphi(A)+\frac{(2^n-1)(\alpha-\varphi(A))}{2^n}<\varphi(K_{n-1})+\frac{\alpha-\varphi(K_{n-1})}{2}<\varphi(K_n)<\alpha,$$

d'où, en posant:

$$K=K_0+K_1+K_2+\dots$$

on obtient:

$$A=K_0\subset K\subset B, \quad K\epsilon M_0,$$

$$\varphi(K)=\lim_{n\to\infty}\varphi(K_n)=\alpha.$$

Supposons maintenant que $B-A$ n'est pas compact, $\varphi(B-A)$ étant fini ou non. L'espace E_0 étant semi-compact, il existe une suite croissante d'ensembles compacts C_n $(n=1, 2, 3, \dots)$, telle que

$$E_0=\sum_{n=1}^{\infty}C_n=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C}_n,$$

les $\overline{C}_n$ étant compacts et croisssants.

On a donc:

$$B-A=\lim_{n\to\infty}(B-A)\,.\,\overline{C}_n,$$

ce qui entraîne, les $(B-A)\,.\,\overline{C}_n\,\epsilon\, M_0$ étant encore compacts et croissants:

$$(17)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\varphi[(B-A)\,.\,\overline{C}_n]=\varphi(B-A)>\alpha-\varphi(A), \\ |\varphi[(B-A)\,\overline{C}_n]|<\infty. \end{cases}$$

(pour $n=1, 2, \dots$).

Il résulte de (17) qu'il existe un nombre naturel n_0, pour lequel on a:

$$\alpha-\varphi(A)<\varphi[(B-A)\,.\,\overline{C}_{n_0}]<\infty.$$

En posant:

$$A_0=A, \quad B_0=A+(B-A)\,\overline{C}_{n_0}\subset B,$$

on obtient:

$$A_0\subset B_0; \quad \varphi(A_0)<\alpha<\varphi(B_0)<\infty,$$

$$B_0-A_0=(B-A)\,.\,\overline{C}_{n_0},$$

ce qui revient au cas précédent.

Cela démontré, I: la propriété de Darboux est nécessaire.

II. La propriété de Darboux est suffisante.

En effet, soit $\varphi(Z)$ une fonction d'ensemble satisfaisant aux conditions 1° et 2° et possédant la propriété de Darboux. Il suffit de démontrer qu'on a:

$$(18)\qquad \varphi((\xi))\equiv 0,$$

pour tout $\xi\,\epsilon\,E_0$, la relation (18) entraînant dans les conditions du théorème, la continuité de $\varphi(Z)$ sur M_0 par rapport à $d(Z)$ [1]).

Soient $Z_0\,\epsilon\,M$ un ensemble remplissant les conditions:

$$Z_0\subset E_0, \quad Z_0\neq E_0, \quad |\varphi(Z_0)|<\infty,$$

(un tel ensemble existe toujours d'après les relations 1° et 2°), et soit ξ un point de E_0, tel que $\xi\,\epsilon\,CZ_0$.

D'après la propriété de Darboux et la condition 1°, on a nécessairement:

$$(19)\qquad \varphi(Z_0+(\xi))=\varphi(Z_0)+\varphi(\xi))=\varphi(Z_0),$$

puisque toute inégalité entre $\varphi(Z_0+(\xi))$ et $\varphi(Z_0)$ entraînerait l'existence d'un ensemble de puissance $\geqslant c$ d'ensembles intermédiaires entre Z_0 et $Z_0+(\xi)$, ce qui est impossible.

De (19) résulte:

$$\varphi((\xi))=0.$$

Soit maintenant $\xi\,\epsilon\,Z_0$; l'ensemble $Z_0-(\xi)$ appartient à M_0, et un raisonnement analogue prouve que la relation (18) est toujours vraie [2]), c. q. f. d.

Si E_0 est compact, il résulte de notre théorème que la propriété de Darboux est nécessaire et suffisante, pour que la fonction absolument additive bornée $\varphi(Z)$, définie dans M_0, soit *uniformé-*

[1]) V. H. Hahn, a. a. O. VI, § 3. Théorème IV; aussi W. Sierpiński: Annales de la Soc. Polon. de Math. t. VII, 1928, p. 75.

[2]) Comp. W. Sierpiński: *Sur les fonctions d'ensemble additives et continues.* Fund. Math. t. III.

ment continue par M_0 *sur rapport à la base* $d(Z)$ (c'est-à-dire: continue au sens de M. de la Vallée Poussin).

Il importe de remarquer que chacune des deux assertions du théorème établi, prise à part subit aux généralisations plus ou moins larges.

En premier lieu, on voit que la démonstration de la suffisance de la propriété de Darboux ne dépend pas de la nature singulière de l'espace métrique E et du σ-corps M. La seconde partie du théorème est donc vraie pour E et M quelconques, M satisfaisant aux conditions (1) et (2). Il faut seulement remplacer dans ce cas la relation 2° par

2[1]. Il existe, pour tout $\xi \in \sum_{Z \in M} Z$, au moins un voisinage U_ξ de ξ, tel que la fonction $\varphi(Z)$ est bornée sur l'ensemble de parties de U_ξ, appartenantes à M.

Quant à la nécessité de la propriété de Darboux, elle subsiste, dans certaines conditions, pour les fonctions d'ensemble continues par rapport aux bases abstraites. Soit $B(Z)$ une fonction arbitraire, définie dans M et satisfaisant à la condition unique:

$$(*) \qquad \operatorname*{Inf}_{(Z_\xi)} \{|B(Z_\xi)|\} = 0,$$

pour tout $\xi \in \sum_{Z \in M} Z$.

En remplaçant dans la Déf. II $d(Z)$ par $B(Z)$, on obtient les définitions correspondantes de la continuité de $\varphi(Z)$ par rapport à la base abstraite $B(Z)$.

Or, il n'est pas difficile de s'assurer qu'une fonction $\varphi(Z)$, satisfaisant aux conditions du théorème et continue sur M_0 par rapport à la base $B(Z)$ quelconque, ne possède pas nécessairement la propriété de Darboux.

Or, si l'on considère les bases $\beta(Z)$, définies dans M_0 et satisfaisant à la condition (*) sous une forme plus forte:

$$(**) \qquad \operatorname*{Inf}_{(Z_\xi)} \{|\beta(Z_\xi \cdot U_\xi)|\} = 0,$$

pour tout $\xi \in E_0$, $U_\xi \subset E_0$ (U_ξ désignant le voisinage ouvert de ξ), on démontre sans peine la proposition suivante:

Théorème: Toute fonction $\varphi(Z)$ définie dans M_0, satisfaisant aux conditions 1° et 2° et continue sur M_0 par rapport à la base $\beta(Z)$ quelconque, possède la propriété de Darboux.

La démonstration s'appuit sur la remarque qu'une telle fonction $\varphi(Z)$ est nécessairement continue sur M_0 par rapport à la base $d(Z)$.

La fonction $d(Z)$ étant donc la plus faible des bases satisfaisantes à la condition (**), nous ne pouvons rien dire sur la suffisance de la propriété de Darboux pour la continuité de $\varphi(Z)$ par rapport aux autres bases $\beta(Z)$, en premier lieu — par rapport à la base — mesure.

Ce dernier problème impliquerait le problème suivant, que nous ne savons pas résoudre:

Est-ce que toute fonction absolument-additive $\varphi(Z)$, bornée ou non, définie dans le σ-corps M_0 d'ensembles mesurables (L) d'un espace euclidien E_n (d'un domaine ouvert et borné $\Delta \subset E_n$) et continue (uniformément) sur M_0 p. rap. à la base $d(Z)$ est continue (uniformément) sur M_0 p. rap. à la base-mesure $m(Z)$ de Lebesgue?