# Sur quelques propriétés des ensembles partout localement connexes.

Par

Stanisława Nikodym (Cracovie).

MM. Janiszewski et Kuratowski ont démontré le théorème suivant [1]) qui est très maniable dans des recherches topologiques.

(*A*) *Si la somme et le produit de deux ensembles fermés $A$ et $B$ sont des continus, les ensembles $A$ et $B$ sont aussi des continus.*

Voilà un théorème analogue dont la démonstration est le but principal de la présente note.

**Théorème I.** *Si la somme et le produit de deux ensembles fermés $A$ et $B$ sont des continus de Jordan, les ensembles $A$ et $B$ sont aussi des continus de Jordan* [2]).

Démonstration. Les ensembles $A$ et $B$ étant, en vertu du théorème ($A$), des continus, il suffit de démontrer que $A$ et $B$ sont partout localement connexes [3]). Nous ne considérons que l'ensemble $A$, le raisonnement pour l'ensemble $B$ étant tout-à-fait analogue.

Envisageons un point arbitraire $p$ appartenant à $A$. Deux cas peuvent se présenter: 1) $p \in A - B$, 2) $p \in A.B$.

Considérons le cas, où $p \in A - B$.

[1]) *„Sur les continus indécomposables"*. Théorème I. Fund. Math. I.

[2]) On appelle, d'après M. Mazurkiewicz, „continu de Jordan", chaque continu partout localement connexe.

[3]) L'ensemble $E$ est dit partout localement connexe „arcwise connected" si, quel que soit $p \in E$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que si

$$q \in S(p, \delta) . E, \quad q \neq p,$$

le point $q$ peut être relié avec $p$ par un arc simple contenu dans $S(p, \varepsilon) . E$. L'ensemble ne contenant que des points isolés est donc partout localement connexe.



L'ensemble $B$ étant fermé, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $S(p, \varepsilon)$ (la sphère ouverte de rayon $\varepsilon$ et centrée en $p$) ne contient aucun point de $B$.

Par conséquent

$$S(p, \varepsilon) . A = S(p, \varepsilon) . (A + B).$$

L'ensemble $A + B$ étant, par supposition, localement connexe en $p$, il en résulte donc que $A$ y est aussi localement connexe. Considérons le cas, où $p \in A . B$. Soit $\varepsilon > 0$. L'ensemble $A . B$ étant, par l'hypothèse, localement connexe en $p$, on peut trouver un nombre positif $\delta' < \varepsilon$ tel que chaque point $q \neq p$ appartenant à $A . B . S(p, \delta')$ peut être relié avec $p$ par un arc simple contenu dans $A . B . S(p, \varepsilon)$.

L'ensemble $A + B$ étant, par l'hypothèse, localement connexe en $p$, il existe un nombre positif $\delta'' < \delta'$ tel que chaque point $r \neq p$ appartenant à $(A + B) . S(p, \delta'')$ peut être relié avec $p$ par un arc simple contenu dans $(A + B) . S(p, \delta')$.

Envisageons un point $s$, où $s \in A . S(p, \delta'')$ et $s \neq p$. Démontrons que $s$ peut être relié avec $p$ par un arc simple contenu dans $A . S(p, \varepsilon)$. Cela est évident dans le cas, où $s \in A . B$, parce que $\delta'' < \delta'$.

Il suffit donc de supposer que $s \in A - A . B$.

D'après ce que nous avons remarqué plus haut, il existe un arc simple $(sp)$ contenu dans $(A + B) . S(p, \delta')$. Le cas, où $(sp) \subset A$ donne $(sp) \subset A . S(p, \delta') \subset A . S(p, \varepsilon)$. Considérons le cas, où la relation $(sp) \subset A$ ne subsiste pas.

Il existe sur l'arc $(sp)$, dont les points nous imaginons ordonnés dans la direction de $s$ à $p$, le premier point $t \in B$, $B$ étant fermé. On a nécessairement $t \neq s$. Le point $t$, comme point d'accumulation de l'ensemble fermé $A$, appartient lui-même à $A$. On a donc $t \in A.B$, d'où il résulte $t \in A . B . S(p, \delta')$.

Cela étant, on peut trouver un arc simple $(tp)$, où

$$(tp) \subset A . B . S(p, \varepsilon) \subset A . S(p, \varepsilon).$$

On a ainsi $(st) + (tp) \subset A . S(p, \varepsilon)$ [1]), d'où on déduit que $t$ et $p$ peuvent être reliés par un arc simple contenu dans $A . S(p, \varepsilon)$.

Nous avons ainsi démontré que, quel que soit le point $s \in A . S(p, \delta'')$, on peut le relier avec $p$ par un arc simple contenu dans $A . S(p, \varepsilon)$.

[1]) $(st)$ désigne l'arc simple contenu dans $(sp)$.

Par conséquent $A$ est localement connexe en $p$. Le point $p$ étant choisi arbitrairement dans $A$, il s'ensuit que $A$ est partout localement connexe, donc il est un continu jordanien c. q. f. d.

**Remarque.** L'hypothèse que $A.B$ et $A+B$ sont des continus n'intervient dans le th. I que pour démontrer que $A$ et $B$ sont des continus. Par conséquent on obtient le corollaire suivant:

**Corollaire 1.** *Si la somme et le produit de deux ensembles fermés $A$ et $B$ sont des ensembles partout localement connexes, les ensembles $A$ et $B$ sont aussi des ensembles partout localement connexes.*

Le théorème peut être modifié de sorte qu'il soit analogue au théorème suivant démontré par MM. Knaster et Kuratowski[1]).

(*B*) *Lorsque les ensembles $A+B$ et $A.B$ sont connexes* (au sens plus large)[2]) *et en outre $A$ et $B$ sont fermés dans $A+B$, les ensembles. $A$ et $B$ sont aussi connexes* (au sens plus large).

Voilà l'énoncé du théorème en question.

**Théorème II.** *Si 1°. les ensembles $A+B$ et $A.B$ sont connexes (au sens plus large) et en outre partout localement connexes, 2°. $A$ et $B$ sont fermés dans $A+B$ (c'est-à-dire $A=\overline{A}.(A+B)$ et $B=$ $=\overline{B}.(A+B)$), alors $A$ et $B$ sont aussi connexes (au sens plus large) et en outre partout localement connexes.*

La démonstration est analogue à celle du théorème I. Au lieu de s'appuyer sur le théorème (*A*), on applique le théorème (*B*) dont on conclut que $A$ et $B$ sont des ensembles connexes au sens large. Pour démontrer pour $A$ la connexité locale en tout son point, il suffit de modifier le raisonnement que voici.

Dans le cas, où $p\,\epsilon\,A-B=A-\overline{B}.(A+B)$, il existe un nombre $\varepsilon>0$ tel que

$$S(p,\varepsilon).A=S(p,\varepsilon).(A+B),$$

puisque, $B$ étant fermé dans $A+B$, l'ensemble $A-B$ ne peut contenir aucun point d'accumulation de $B$.

Dans le cas, où $p\,\epsilon\,A.B$, le raisonnement reste sans changement jusqu'au moment, où l'on suppose que $s\,\epsilon\,A-A.B$ et que l'arc simple $(sp)$ ne soit pas contenu dans $A$. Il existe sur l'arc $(sp)$ (dont les points sont ordonnés dans la direction de $s$ à $p$) le point $t$ qui est le premier point de $B$, l'ensemble $B.(sp)$ étant fermé

[1]) *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. II, p. 211, Corollaire VII.

[2]) Cela veut dire qu'un ensemble vide ou composé d'un seul point est considéré comme un ensemble connexe.



en vertu de la relation

$$B.(sp)=\overline{B}.(A+B).(sp)=\overline{B}.(sp).$$

D'autre part on a $t\,\epsilon\,\overline{A}$ et par conséquent

$$t\,\epsilon\,\overline{A}.B\subset\overline{A}.B+\overline{A}.A=\overline{A}(A+B)=A,$$

l'ensemble $A$ étant fermé dans $A+B$.

Le point $t$ appartenant à $A.B$, le raisonnement s'achève sans changement.

Le théorème est ainsi démontré.

Comme conséquence du théorème I on obtient une condition suffisante pour qu'un sous-continu $C$ d'un continu jordanien $J$ soit lui même jordanien.

**Théorème III.** *Si $C$ est un sous-continu du continu jordanien $J$ et si la frontière relative de $C$ est un ensemble partout localement connexe, le continu $C$ est aussi jordanien* [1]).

La condition spécifiée dans ce théorème est suffisante, mais elle n'est pas nécessaire, comme le prouvent des exemples aisés à trouver

Démonstration. $C$ et $\overline{J-C}$ sont des ensembles fermés. Par l'hypothèse: $J=C+\overline{J-C}$ et $C.\overline{J-C}$ sont des ensembles partout localement connexes, On en déduit, en vertu du corollaire 1, que $C$ est partout localement connexe, donc $C$ est un continu jordanien.

Dans cet ordre d'idées M. Kuratowski m'a bien voulu communiquer qu'on peut démontrer les corollaires suivants.

**Corollaire 2.** *Si $K$ est un sous-continu jordanien d'un continu jordanien $C$ et si $M$ et $N$ sont deux ensembles séparés et tels que $C-K=M+N$, les ensembles $K+M$ et $K+N$ sont partout localement connexes* [2]).

**Corollaire 3.** *Si $K$ est un sous-continu jordanien du continu jordanien $C$ et si $S$ est une composante de l'ensemble $C-K$, alors $C-S$ est aussi un continu jordanien.*

En effet, $S$ est un ensemble ouvert[3]) et en outre on a

$$(C-S)(S-K)=K \quad \text{et} \quad (C-S)+(S+K)=C.$$

[1]) En ce qui concerne les sous-continus jordaniens du continus jordaniens, voir mon travail dans le XII tome des Fund. Math

[2]) Ce théorème est analogue au théorème VI du travail de MM. Knaster et Kuratowski „*Sur les ensembles connexes*". Fund. Math. II, p. 210.

[3]) M. Kuratowski (Fund. Math. I) et M. Hahn (Fund. Math. II).