Un théorème sur le balayage.

Par

Stanislas Gołąb (Cracovie).

Etant donné sur le plan P un continu C et une fonction $F(c)$ où $c \varepsilon C$, prenant comme valeurs des points (ou des ensembles de points) du plan P, nous dirons qu'un ensemble E est **balayé** par cette fonction, lorsque l'image $F(C)$ de cette fonction, c. à d. l'ensemble-somme de ses valeurs $\sum_{c \varepsilon C} F(c)$ contient E.

Les principaux résultats de cette note sont relatifs aux cas où *C est un orbe de* Jordan (courbe simple fermée)[1] et *$F(c)$ est une fonction continue au sens de* Hausdorff, *assujettie à la condition*: $c \varepsilon F(c)$. Dans ce cas:

si pour tout point c de C l'ensemble $F(c)$ est un continu borné, ne coupant pas le plan et contenant un point fixe arbitraire p (théorème du § 3),

ou bien

si le point fixe p est donné à l'extérieur de l'orbe C et l'ensemble $F(c)$ est, pour tout c de C, une courbe simple fermée renfermant p dans son intérieur (théorème du § 8),

alors

l'intérieur de l'orbe C est balayé par la fonction $F(c)$.

Le premier de ces théorèmes prend la forme particulièrement symétrique, lorsqu'on l'envisage sur une surface sphérique (§ 5). Le second constitue une généralisation d'un résultat de M. Leja[2].

Les deux théorèmes rentrent dans la Topologie du plan (resp. des surfaces sphériques); ce fut le résultat de M. Leja qui m'a suggéré d'examiner le sujet au point de vue topologique.

[1] c'est-à-dire, image homéomorphe de la circonférence.

[2] F. Leja, *Un lemme topologique et son application dans la théorie des groupes abstraits*, Fund. Math. X, p. 421.

Je commence par rappeler la définition de la *limite d'une suite d'ensembles* et quelques théorèmes qui s'y rattachent (§ 1). Je rappelle ensuite (§ 2) la notion d'*ordre d'un point par rapport à un continu de* Jordan et ses propriétés.

Le § 4 est consacré à quelques simples exemples qui montrent combien les prémisses du théorème du § 3 sont essentielles.

Dans le § 7 j'établis un théorème intéressant, paraît-il, par lui-même et que je fais intervenir dans la démonstration du théorème du § 8.

§ 1. a) Nous appelons *distance entre les ensembles A et B* et désignons par

$$\varrho(A, B)$$

la borne inférieure des distances entre les points de A et ceux de B; nous désignerons par

$$\varrho(a, B)$$

la distance entre l'ensemble B et l'ensemble formé du point a seul. On a

$$\varrho(A, b) + \varrho(b, C) \geqslant \varrho(A, C).$$

b) Nous écrivons

$$\lim_{\nu/\infty} A_\nu = A_0, \tag{1}$$

lorsque pour toute suite partielle $\{A_{\alpha_\nu}\}$ de $\{A_\nu\}$ les ralations suivantes sont équivalentes, quel que soit a:

$$a \varepsilon A_0, \tag{2}$$

$$\lim_{\nu/\infty} \varrho(a, A_{\alpha_\nu}) = 0. \tag{3}$$

c) M. Hausdorff a introduit une autre notion de la distance de deux ensembles (distance au sens de Hausdorff)[1]. On désigne par

$$\varrho_H(A, B)$$

la plus grande des deux bornes supérieures:

$$\overline{\text{borne}}_{a \varepsilon A}\, \varrho(a, B), \quad \overline{\text{borne}}_{b \varepsilon B}\, \varrho(b, A).$$

[1] Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* 1917 (1. édition), p. 293.

On a

$$\varrho_H(A, B) + \varrho_H(B, C) \geqslant \varrho_H(A, C)$$

(4) $$\varrho(A, B) + \varrho_H(B, C) \geqslant \varrho(A, C) \text{ [1]}.$$

d) Si les ensembles A_ν ($\nu/0, 1, 2, \ldots$) sont bornés et fermés, l'égalité (1) équivaut a l'égalité

(5) $$\lim_{\nu/\infty} \varrho_H(A_\nu, A_0) = 0 \text{ [2]}.$$

e) De là et de (4) on conclut que:

Si les ensembles A_ν ($\nu/0, 1, 2, \ldots$) sont bornés et fermés et que

$$\lim_{\nu/\infty} A_\nu = A_0, \quad \varrho(A_0, B) > 0,$$

alors il existe un nombre $\alpha > 0$ et un indice ν_0 à partir duquel on a

(5 a) $$\varrho(A_\nu, B) > \alpha > 0 \qquad (\nu \geqslant \nu_0).$$

f) Nous dirons qu'*une fonction* $K(c)$ où $c \varepsilon C$ *est continue* au point c_0 si pour une suite quelconque $\{c_\nu\} \subset C$ tendant vers c_0 on a [cf. b)]:

$$\lim_{\nu/\infty} K(c_\nu) = K(c_0).$$

g) Nous dirons que la *fonction* $K(c)$ *est continue au sens de* Hausdorff au point c_0, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage relatif de c_0 dans C tel que l'on a [cf. c)]:

$$\varrho_H[K(c), K(c_0)] \leqslant \varepsilon$$

pour tout point c de ce voisinage.

h) Si les ensembles $K(c)$ sont bornés et fermés, les définitions f) et g) sont équivalentes [cf. d)]: la continuité et la continuité de Hausdorff coïncident.

i) Si $K(c)$ est une fonction continue subordonnant à tout point c d'un continu plan borné C, un continu borné $K(c)$, alors l'ensemble $K(C)$ [c. à d. la portion du plan „balayée" par le continu $K(c)$, lorsque c parcourt le continu C] est un continu borné [3].

[1]) T. Ważewski, *Sur les courbes de Jordan*..., Annales de la Soc. Polon. des Math. II, § 46, lemme 2.

[2]) T. Ważewski, *Sur un continu singulier*. Fund. Math. IV, p. 225.

[3]) La démonstration de ce théorème peut être calquée sur celle d'un lemme de M. Ważewski, Fund. Math. IV, p. 233, l. c.

§ 2. Soit $m(\tau)$ une fonction continue définie dans un intervalle fermé et fini $[\tau', \tau'']$. Désignons par $m[\tau', \tau'']$ *l'image* de la fonction $m(\tau)$ dans cet intervalle, c'est-à-dire l'ensemble de points $m(\tau)$ correspondant aux points τ de l'intervalle $[\tau', \tau'']$. L'ensemble $m[\tau', \tau'']$ est donc par définition un continu jordanien. Soit q un point fixe de $P - m[\tau', \tau'']$.

Nous allons rappeler la notion d'ordre du point q par rapport à la fonction $m(\tau)$; cette notion dépend de l'orientation de l'intervalle $[\tau', \tau'']$: s'il est orienté de τ' vers τ'', nous désignerons l'ordre de q par rapport à la fonction $m(\tau)$ par

$$\omega(q, m(\tau), \tau', \tau'').$$

La notion d'ordre est définie comme suit.

Mettons la fonction $m(\tau)$ sous la forme explicite:

$$x = \varphi(\tau), \quad y = \psi(\tau),$$

$\varphi(\tau)$ et $\psi(\tau)$ étant les coordonnées du point $m(\tau)$. Soient (α, β) les coordonnées du point q.

Il existe toujours des fonctions continues $\gamma(\tau)$ pour lesquelles on a dans l'intervalle $[\tau', \tau'']$ tout entier:

$$\cos\gamma(\tau) = \frac{\varphi(\tau) - \alpha}{\varrho[q, m(\tau)]}, \quad \sin\gamma(\tau) = \frac{\psi(\tau) - \beta}{\varrho[q, m(\tau)]}.$$

$\gamma_0(\tau)$ étant une des fonctions en question, toutes les autres sont comprises dans la formule:

$$\gamma(\tau) = \gamma_0(\tau) + 2n\pi$$

où n est un entier arbitraire.

Ceci dit, posons par définition:

$$\omega(q, m(\tau), \tau', \tau'') = \frac{\gamma(\tau'') - \gamma(\tau')}{2\pi}.$$

Ainsi l'ordre ω est parfaitement déterminé par q, $m(\tau)$, τ', τ'' et par l'orientation de l'intervalle $[\tau', \tau'']$. D'autre part, il ne dépend aucunement de n.

Voici les propriétés bien connues de l'ordre:

1° ω est égal à une certaine (et non pas à une quelconque) valeur de l'angle compris entre les vecteurs $\overrightarrow{q\,m(\tau')}$, $\overrightarrow{q\,m(\tau'')}$, affectée d'un signe convenable 2π étant considéré comme unité d'angle.

2° ω est une fonction continue de q dans $P-m[\tau', \tau'']$.

3° ω tend vers zéro, lorsque q tend vers le point à l'infini.

4° $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n$ étant $n+1$ points quelconques de l'intervalle $[\tau', \tau'']$ $(\tau_0=\tau', \tau_n=\tau'')$, on a

$$\omega(q, m(\tau), \tau', \tau'') = \sum_{\nu=0}^{n-1} \omega(q, m(\tau), \tau_\nu, \tau_{\nu+1}).$$

De là:

5° $\omega(q, m(\tau), \tau', \tau'') = -\omega(q, m(\tau), \tau'', \tau')$.

6° Soient $m_\nu(\tau)$ $n+1$ fonctions continues, définies respectivement dans les intervalles $[\tau'_\nu, \tau''_\nu]$ et prenant comme valeurs les points du plan P. Admettons que

$$m_\nu(\tau''_\nu) = m_{\nu+1}(\tau'_{\nu+1}), \qquad (\nu/0, 1, \ldots, n-1),$$
$$m_n(\tau''_n) = m_0(\tau'_0).$$

Soit q un point du plan n'appartenant pas au continu:

$$K = \sum_{\nu=0}^{n} m[\tau'_\nu, \tau''_\nu].$$

Cela étant,

$$\sum_{\nu=0}^{n} \omega(q, m_\nu(\tau), \tau'_\nu, \tau''_\nu)$$

est une fonction constante de q dans chaque composante de $P-K$, elle ne prend que des valeurs entières et elle est nulle dans toute composante non-bornée.

Ceci résulte de ce qui précède et du théorème connu de Chasles concernant les sommes des angles contigus.

7° Soit $c(\sigma)$ une représentation continue d'un orbe de Jordan plan C, définie dans $[\sigma', \sigma'']$ et telle que l'on ait d'une part $c(\sigma') = c(\sigma'')$ et d'autre part $c(\sigma_1) \neq c(\sigma_2)$ toutes les fois où $\sigma_1 \neq \sigma_2$, $|\sigma_1-\sigma'|+|\sigma_2-\sigma''| \neq 0$ et $|\sigma_1-\sigma''|+|\sigma_2-\sigma'| \neq 0$ [1]).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point q se trouve à l'extérieur de la courbe C, est que l'ordre $\omega(q, c(\sigma), \sigma', \sigma'')$ soit nul.

§ 3. **Théorème.** Soient, sur le plan P: C un orbe de Jordan et p un point fixe, dont la position par rapport à C n'est soumise à aucune restriction. Soit de plus $K(c)$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes:

I. *$K(c)$ est un continu* [1]) *borné.*

II. *$K(c)$ ne coupe pas le plan.*

III. *$K(c)$ est une fonction continue au sens de* Hausdorff [cf. § 1, g), h)].

IV. $(c+p) \subset K(c)$,

quel que soit le point c de C.

Dans ces conditions *l'intérieur de la courbe C est totalement balayé par $K(c)$*; en d'autres termes: tous point intérieur à la courbe C appartient à un continu $K(c)$ au moins.

Démonstration.

α) Soit q un point quelconque de $P-K(C)$. Il s'agit de prouver que q est situé à l'extérieur de l'orbe C.

Désignons par $c(\sigma)$ une représentation régulière de l'orbe C [cf. § 2, 7°], définie dans l'intervalle fermé $[\sigma', \sigma'']$. $K_\sigma = K[c(\sigma)]$ est donc une fonction continue au sens de Hausdorff d'après la condition III de notre théorème et on a:

$$K_{\sigma'} = K_{\sigma''}. \tag{6}$$

β) A tout point σ^* de l'intervalle $[\sigma', \sigma'']$ correspond un intervalle partiel $[\sigma_1, \sigma_2]$

1° contenant σ^* et, plus précisément, contenant σ^* *dans son intérieur* toutes les fois que $\sigma'' \neq \sigma^* \neq \sigma'$,

2° tel que $P-K\{c[\sigma_1, \sigma_2]\}$ contient un continu non-borné renfermant q, où $K\{c[\sigma_1, \sigma_2]\}$ désigne la portion du plan balayée par le continu mobile K_σ lorsque σ parcourt l'intervalle $[\sigma_1, \sigma_2]$ [cf. § 1, i)].

Nous nous bornons au cas où σ^* se trouve à l'intérieur de $[\sigma', \sigma'']$, la démonstration dans les autres cas étant analogue.

En vertu des conditions I et II le continu K_{σ^*} est borné et ne coupe pas le plan. Par l'hypothèse il ne renferme pas le point q. Comme $K_{\sigma^*} \subset K\{c[\sigma_1, \sigma_2]\}$, il existe donc en vertu de 2° un continu non-borné I disjoint [2]) de K_{σ^*} et contenant le point q. K_{σ^*} étant borné on a

$$\varrho(K_{\sigma^*}, I) > 0. \tag{7}$$

[1]) J'appelle dans la suite une telle représentation „*représentation régulière*".

[1]) Le théorème, dans son énoncé primitif, supposait que les $K(c)$ étaient des continus jordaniens. M. T. Ważewski m'a fait remarquer que cette restriction était superflue.

[2]) c. à d. sans points communs.

$K(c)$ étant d'après la condition III une fonction continue au sens de Hausdorff, il existe en vertu de la continuité d'une fonction composée un intervalle $[\sigma_1^*, \sigma_2^*]$ contenant σ^* dans son intérieur et tel que tout σ de cet intervalle satisfait à l'inégalité

$$\varrho_H(K_\sigma, K_{\sigma^*}) < \tfrac{1}{2}\varrho(K_{\sigma^*}, I). \tag{8}$$

Mais [cf. § 1 c), (4)]:

$$\varrho(K_{\sigma^*}, I) \leqslant \varrho_H(K_{\sigma^*}, K_\sigma) + \varrho(K_\sigma, I),$$

donc en raison de (7) et (8)

$$\varrho(K_\sigma, I) > \tfrac{1}{2}\varrho(K_{\sigma^*}, I) > 0$$

et par conséquent $I.K_\sigma =$ ensemble vide. Ceci ayant lieu pour tout σ de l'intervalle $[\sigma_1^*, \sigma_2^*]$, le continu I est disjoint de $K\{c[\sigma_1^*, \sigma_2^*]\}$, parce que on a par définition d'image: $K\{c[\sigma_1^*, \sigma_2^*]\} = \sum_{\sigma\varepsilon[\sigma_1^*, \sigma_2^*]} K_{\sigma^*}$.

γ) Il en résulte facilement en vertu du théorème de Borel-Lebesgue l'existence d'une telle subdivision: $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de l'intervalle $[\sigma', \sigma'']$, $(\sigma_0 = \sigma', \sigma_n = \sigma'')$ que le point q fasse partie de la composante non-bornée de

$$P - K\{c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]\}, \qquad (\nu/0, 1, \ldots, n-1).$$

δ) Nous affirmons que

$$K_{\sigma_\nu} + K_{\sigma_{\nu+1}} + c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}] \subset K\{c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]\} \tag{9}$$
$$(\nu/0, 1, \ldots, n-1).$$

Il est manifeste que les deux premiers sommandes du membre gauche de cette inclusion sont contenus dans le membre droit. Or, l'arc $c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]$ de l'orbe C y est aussi contenu, puisque $K_\sigma = K(c(\sigma))$ renferme le point $c(\sigma)$ en vertu de la condition IV.

ε) Soit I_ν $(\nu/0, 1, \ldots, n-1)$ un continu non-borné disjoint de $K\{c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]\}$ et renfermant le point q [cf. γ)]. $K\{c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]\}$ étant borné et fermé [§ 1, i)], on a:

$$\varrho(I_\nu, K\{c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]\}) > 0 \qquad (\nu/0, 1, \ldots, n-1).$$

Il existe donc un nombre $\delta > 0$, tel que

$$\varrho(I_\nu, K\{c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]\}) > \delta \qquad (\nu/0, 1, \ldots, n-1)$$

et à plus forte raison, en vertu de (9):

$$\left.\begin{array}{ll} (10) & \varrho(I_\nu, K_{\sigma_\nu}) > \delta > 0 \\ (11) & \varrho(I_\nu, K_{\sigma_{\nu+1}}) > \delta > 0 \\ (12) & \varrho(I_\nu, c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]) > \delta > 0 \end{array}\right\} \quad (\nu/0, 1, \ldots, n-1).$$

Comme selon la condition IV on a $p + c(\sigma_\nu) \subset K_{\sigma_\nu}$, on peut trouver sur le continu K_{σ_ν} $(\nu/0, 1, \ldots, n-1)$ une suite de points

$$a_0^\nu, a_1^\nu, \ldots, a_{s_\nu}^\nu \tag{S_ν}$$

jouissant des propriétés suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0^\nu = p \\ a_{s_\nu}^\nu = c(\sigma_\nu) \end{array}\right. \tag{13}$$

$$\varrho(a_\lambda^\nu, a_{\lambda+1}^\nu) < \frac{\delta}{2} \qquad (\lambda/0, 1, \ldots, s_\nu - 1). \tag{14}$$

Comme selon (6): $K_{\sigma_0} = K_{\sigma_n} = K_{\sigma'}$, on peut s'arranger de façon que les suites S_0 et S_n soient identiques.

Désignons par L_ν la ligne polygonale ayant les points (13) comme sommets consécutifs (L_ν peut d'ailleurs se réduire au seul point p). On a

$$L_0 = L_n. \tag{15}$$

Soit b un point quelconque de L_ν. D'après (14) il existe parmi les sommets de L_ν au moins un — appelons-le a_λ^ν — pour lequel on a:

$$\varrho(a_\lambda^\nu, b) < \frac{\delta}{2},$$

d'où *a fortiori*

$$\varrho(K_{\sigma_\nu}, b) < \frac{\delta}{2}, \tag{16}$$

puisque a_λ^ν appartient à K_{σ_ν}.

Mais [§ 1, a)]:

$$\varrho(I_\nu, b) + \varrho(b, K_{\sigma_\nu}) \geqslant \varrho(I_\nu, K_{\sigma_\nu}),$$

donc en raison de (16) et (10):

$$\varrho(I_\nu, b) > \frac{\delta}{2},$$

b étant un point quelconque de L_ν.

On a par conséquent

$$\varrho(I_\nu, L_\nu) \geqslant \frac{\delta}{2} > 0 \qquad (\nu/0, 1, \ldots, n-1).$$

D'une façon analogue, on a en vertu de (16) et (11):

$$\varrho(I_\nu, L_{\nu+1}) \geqslant \frac{\delta}{2} > 0 \qquad (\nu/0, 1, \dots, n-1).$$

Les deux inégalités précédentes et l'inégalité (12) impliquent que

(17) $$I_\nu (L_\nu + L_{\nu+1} + c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]) = \textit{ensemble vide}$$

pour $\nu = 0, 1, \dots, n-1$.

ζ) Envisageons L_ν comme l'image de la fonction continue $l_\nu(\tau)$, définie sur l'intervalle $[\tau'_\nu, \tau''_\nu]$ et telle que

(18) $$\begin{cases} l_\nu(\tau'_\nu) = p \\ l_\nu(\tau''_\nu) = c(\sigma_\nu) \end{cases} \qquad (\nu/0, 1, \dots, n-1).$$

On a donc

(19) $$L_\nu = l_\nu[\tau'_\nu, \tau''_\nu] \qquad (\nu/0, 1, \dots, n-1).$$

En vertu de (15) on peut s'arranger de manière que les fonctions $l_0(\tau)$ et $l_n(\tau)$ soient identiques.

Le continu

$$M_\nu = l_\nu[\tau'_\nu, \tau''_\nu] + l_{\nu+1}[\tau'_{\nu+1}, \tau''_{\nu+1}] + c[\sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}]$$

étant borné pour tout $\nu/0, 1, \dots, n-1$, le point q appartient en vertu de (17) et (19) à la composante non-bornée de $P - M_\nu$.

Comme, d'autre part, selon (18):

$$l_\nu(\tau''_\nu) = c(\sigma_\nu), \quad c(\sigma_{\nu+1}) = l_{\nu+1}(\tau''_{\nu+1}), \quad l_{\nu+1}(\tau'_{\nu+1}) = l_\nu(\tau'_\nu) = p,$$

on a en vertu du th. 6°, § 2:

$$\omega(q, l_\nu(\tau), \tau'_\nu, \tau''_\nu) + \omega(q, c(\sigma), \sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}) + \omega(q, l_{\nu+1}(\tau), \tau''_{\nu+1}, \tau'_{\nu+1}) = 0$$

pour $\nu = 0, 1, \dots, n-1$.

La sommation selon ν des relations précédentes nous conduit à l'égalité

(20) $$\omega(q, l_0(\tau), \tau'_0, \tau''_0) + \sum_{\nu=1}^{n-1} \omega(q, c(\sigma), \sigma_\nu, \sigma_{\nu+1}) + \omega(q, l_n(\tau), \tau''_n, \tau'_n) = 0$$

(où les termes supprimés dans le membre gauche de cette égalité se détruisent deux à deux [cf. § 2, 5°]).

Mais en vertu de (15) et (19) les fonctions $l_0(\tau)$ et $l_n(\tau)$ sont identiques; on a donc selon § 2, 5°:

$$\omega(q, l_n(\tau), \tau''_n, \tau'_n) = \omega(q, l_0(\tau), \tau''_0, \tau'_0) = -\omega(q, l_0(\tau), \tau'_0, \tau''_0).$$

Il en résulte, en appliquant à (20) la proposition 4° du § 2, l'égalité:

$$\omega(q, c(\sigma), \sigma', \sigma'') = 0,$$

ce qui implique, conformément au théorème 7° du § 2, que le point q se trouve situé à l'extérieur de la courbe C, c. q. f. d.

§ 4. **Exemples.**

Les exemples qui suivent montrent que le théorème du § 3 devient faux, lorsqu'on y supprime une quelconque des prémisses I—III.

Soit, sur le plan P, une circonférence $\mathcal{C}$ (= orbe C du § 3) de centre p et soient L_1 et L_2 les deux arcs formant $\mathcal{C}$, à extrémités communes c_1 et c_2 $(c_1 \neq c_2)$. Nous désignons par R le rayon (p, c_1). Voici les exemples:

ad I): $K(c)$ égal au continu fixe $R + \mathcal{C}$,

ad II): $K(c) = R + \mathcal{C} +$ l'extérieur de $\mathcal{C}$,

ad III): $K(c) = R + L_1$ pour $c \in L_1$ et $K(c) = R + L_2$ pour $c \in (\mathcal{C} - L_1)$.

§ 5. Le rôle du point à l'infini dans le théorème du § 3 (les continus C et $K(c)$ y étant supposés bornés) apparaît sous un aspect particulièrement clair, si l'on transforme le plan en surface sphérique.

Soit en effet C un orbe de Jordan situé sur une surface sphérique S. Soit sur cette surface $K(c)$ un continu qui ne la coupe pas, qui contient le point c de C et un point fixe p et qui varie d'une façon continue au sens de Hausdorff, quand c décrit la courbe C. Désignons par D_1 et D_2 les deux régions déterminées sur la surface S par l'orbe C.

Nous affirmons *qu'une au moins de ces deux régions est entièrement balayée par le continu mobile* $K(c)$.

Supposons en effet, qu'un point q de D_1 n'appartienne à aucun continu $K(c)$, où $c \in C$, c'est-à-dire que $q \in [S - K(C)]$.

Effectuons une projection stéréographique de S sur un plan P, en prenant le point q comme pôle de projection.

Le point q passe alors en point à l'infini du plan P et la région D_2 en région *intérieure* de C. Notre théorème se réduit ainsi au théorème du § 3, ce qui montre que D_2 est balayé par $K(c)$, lorsque D_1 ne l'était pas.

§ 6. Le théorème précédent permet aussi d'étendre le théorème du § 3 au continus non-bornés:

Théorème. Soient, sur le plan P, un orbe de Jordan C et un continu mobile $K(c)$ ne coupant pas P, contenant c et variant d'une façon continue (au sens ordinaire, qui a été précisé dans le § 1, b) et f)), pendant que c parcourt C. Admettons de plus que, quelle que soit la position de c sur C, le continu $K(c)$ contienne un point fixe p, ce dernier pouvant être donné à l'infini (ce qui veut dire que $K(c)$ reste *non-borné* dans *toute* position de c).

Dans ces hypothèses: *ou bien l'intérieur de l'orbe C, ou bien son extérieur est totalement balayé par K(c).*

Démonstration. Si $K(c)$ balaie tout le plan, le théorème est évidemment vrai. Supposons donc qu'un point q n'appartienne à aucun $K(c)$. Soit S une surface sphérique tangeante au plan P dans le point q. Désignons par q' le point de S diamètralement opposé à q et effectuons la projection stéréographique Φ de P sur S, en regardant le point q' comme pôle.

Soient, $c_1 = \Phi(c)$ l'image de c, C_1 l'image de C et $K_1(c_1)$ l'image de $K(c)$, données sur S par cette projection. Soit $K_2(c_1) = K_1(c_1) + (q')$, lorsque $K(c)$ est non-borné, et $K_2(c_1) = K_1(c_1)$ dans le cas contraire. Dans le premier cas tout $K_2(c)$ contient le point fixe q' et dans le second le point fixe $p_1 = \Phi(p)$. De plus, ce sont, en tout cas, des continus bornés sur S et ils ne coupent pas S.

Nous allons maintenant démontrer que la fonction $K_2(c_1)$ est continue au sens du § 1, b) et f). En effet, $\Phi(x)$ désignant d'une façon générale l'image située sur S du point x du plan P, donnée par la projection stéréographique Φ, mettons $\Psi(A) = \Phi(A)$, si A est un ensemble borné et $\Psi(A) = \Phi(A) + (q')$ dans le cas contraire. Il s'agit de prouver que l'égalité:

$$\lim_{\nu/\infty} A_\nu = A \tag{i}$$

implique l'égalité:

$$\lim_{\nu/\infty} \Psi(A_\nu) = \Psi(A). \tag{ii}$$

Il suffit évidemment d'envisager le cas où A est un ensemble non-borné. Il existe alors une suite de points a_ν telle que $a_\nu \epsilon A_\nu$ et que $\lim\limits_{\nu/\infty} \varrho(a_\nu, a_1) = +\infty$.

De là résulte que

$$\lim_{\nu/\infty} \varrho(\Phi(a_\nu), q') = 0. \tag{21}$$

Soit $b \epsilon \Psi(A)$. Nous allons prouver que

$$\lim_{\nu/\infty} \varrho(\Psi(A_{\alpha_\nu}), b) = 0 \tag{22}$$

pour toute suite partielle A_{α_ν} de A_ν.

Or, dans le cas où $b = q'$, on a:

$$\Phi(a_{\alpha_\nu}) \epsilon \Psi(A_{\alpha_\nu}),$$

donc, suivant (21):

$$\lim_{\nu/\infty} \varrho(\Psi(A_{\alpha_\nu}), q') = 0,$$

ce qui coïncide avec (22).

Dans le cas où $b \neq q'$, il existe un point a tel que

$$a \epsilon A, \quad b = \Phi(a).$$

En vertu de (i) on a $\lim\limits_{\nu/\infty} \varrho(A_{\alpha_\nu}, a) = 0$, donc $\lim\limits_{\nu/\infty} \varrho(\Phi(A_{\alpha_\nu}), b) = 0$; comme $\Phi(A_{\alpha_\nu}) \subset \Psi(A_{\alpha_\nu})$ il en résulte encore la relation (22).

Cette relation étant ainsi établie, soit:

$$\lim_{\nu/\infty} \varrho(\Psi(A_{\alpha_\nu}), b) = 0. \tag{23}$$

Nous allons prouver que $b \epsilon \Psi(A)$. C'est évidemment vrai si $b = q'$, car A est dans ce cas non-borné. Dans le cas où $b \neq q'$, il existe un a tel que $b = \Phi(a)$.

Comme

$$\Psi(A_{\alpha_\nu}) = \overline{\Phi(A_{\alpha_\nu})},$$

on a

$$\varrho(\Psi(A_{\alpha_\nu}), b) = \varrho(\Phi(A_{\alpha_\nu}), b) = \varrho(\Phi(A_{\alpha_\nu}), \Phi(a)).$$

Selon (23) on a: $\lim\limits_{\nu/\infty} \varrho(\Phi(A_{\alpha_\nu}), \Phi(a)) = 0$, donc $\lim \varrho(A_{\alpha_\nu}, a) = 0$, d'où en vertu de (i) $a \epsilon A$ et par conséquent $b = \Phi(a) \epsilon \Phi(A) \subset \Psi(A)$, ce qui donne l'égalite (ii). Nous avons ainsi démontré, que la fonction $K_2(c_1)$ est continue et comme tout $K_2(c_1)$ est par définition fermé et borné, elle est continue au sens de Hausdorff [en vertu de § 1, h)]. D'après le théorème du § 5, une des régions D_1 et D_2 déterminées par C_1 sur S est complètement balayée par $K_2(c_1)$. Ainsi l'image soit de D_1, soit de D_2 sur le plan P, c'est-à-dire, l'une des régions, soit l'extérieure, soit l'intérieure, détérminées par C sur P est entièrement balayée par $K(c)$, c. q. f. d.

§ 7. Considérons une suite infinie $C_0, C_1, C_2, \ldots$ d'orbes de Jordan et désignons respectivement par I_ν et E_ν l'intérieur et l'extérieur de C_ν $(\nu/0, 1, 2, \ldots)$. Posons encore

(24) $$\bar{I}_\nu = I_\nu + C_\nu, \quad \bar{E}_\nu = E_\nu + C_\nu.$$

Théorème. *Si*

(25) $$\prod_{\nu=1}^{\infty} I_\nu \neq 0$$

et

(26) $$\lim_{\nu/\infty} C_\nu = C_0\ ^{1)},$$

on a

$$\lim_{\nu/\infty} \bar{I}_\nu = \bar{I}_0, \quad \lim_{\nu/\infty} \bar{E}_\nu = \bar{E}_0\ ^{2)}.$$

La démonstration se ramène au lemme suivant:

Lemme. Etant donnés deux cercles:

$$K_i \subset I_0, \quad K_e \subset E_0,$$

les relations (25) et (26) entraînent l'existence d'un indice ν_0 tel que l'on a

(27) $$K_i \subset I_\nu, \quad K_e \subset E_\nu$$

pour tout $\nu \geqslant \nu_0$.

Soit, en effet, A_i et A_e deux continus disjoints de C_0 et reliant, respectivement, le cercle K_i à un point quelconque $p \in \prod_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ et le cercle K_e au point à l'infini. On a donc

(28) $$A_i + K_i \subset I_0, \quad A_e + K_e \subset E_0.$$

Comme $I_0 C_0 = 0 = E_0 C_0$, les inclusions (28) donnent:

$$(A_i + K_i) \cdot C_0 = 0 \quad \text{et} \quad (A_e + K_e) \cdot C_0 = 0.$$

En vertu de (26) il existe donc un ν_0 tel que ces égalités restent vraies lorsqu'on y remplace C_0 par C_ν où $\nu \geqslant \nu_0$.

Il en résulte que

$$A_i + K_i \subset I_\nu \quad \text{et} \quad A_e + K_e \subset E_\nu,$$

puisque par hypothèse: $p \in I_\nu$. A_e et A_e n'est pas borné. Les relations (27) ont donc lieu à plus forte raison.

1) cf. § 1, b).

2) Si l'on modifie les prémisses du théorème de façon à avoir $I_0 \cdot \prod_{\nu/\infty}^{\infty} E_\nu \neq 0$, on obtient l'égalité: $\lim_{\nu/\infty} \bar{I}_\nu = C_0$.

Corollaire. *Si* $i \in I_0$ *et* $e \in E_0$, *il existe un nombre* $\alpha > 0$ *et un indice* ν_0 *à partir duquel on a:*

$$\varrho(i, \bar{E}_\nu) > \alpha, \quad \varrho(e, \bar{I}_\nu) > \alpha. \qquad (\nu \geqslant \nu_0)$$

Il suffit, pour le montrer, d'entourer i et e de deux cercles K_i et K_e contenus respectivement dans I_0 et E_0 et de prendre comme α un nombre positif inférieur aux rayons de ces cercles.

Nous revenons à la démonstration de notre théorème. En vertu de § 1, b) il s'agit de prouver que les relations

(29 a) $$i \in \bar{I}_0,$$

(29 b) $$e \in \bar{E}_0$$

équivalent respectivement aux égalités

(30 a) $$\lim_{\nu/\infty} \varrho(i, \bar{I}_{\alpha_\nu}) = 0,$$

(30 b) $$\lim_{\nu/\infty} \varrho(e, \bar{E}_{\alpha_\nu}) = 0.$$

pour toute suite croissante de nombres naturels $\{\alpha_\nu\}$.

Or, l'égalité (30 a) résulte de (29 a) en raison du lemme précédent; d'autre part (30 a) entraîne (29 a), car dans le cas opposé on aurait en vertu du corollaire: $i \in E_0$, contrairement à (30 a). La démonstration de l'équivalence entre (29 b) et (30 b) est symétrique.

§ 8. *Généralisation du théorème de M. Leja.*

Théorème. Soient, C un orbe de Jordan, p un point fixe situé *à l'extérieur* de C et $K(c)$ une fonction assujettie pour tout $c \in C$ aux conditions:

I° *tout* $K(c)$ *est un orbe de Jordan.*

II° *tout* $K(c)$ *contient le point* p *dans son intérieur.*

III° *la fonction* $K(c)$ *est continue au sens de* Hausdorff.

Nous affirmons que *l'intérieur de l'orbe* C *est balayé par* $K(c)$.

Démonstration. Désignons par $I(c)$ et $E(c)$ respectivement l'intérieur et l'extérieur de $K(c)$; par I et E l'intérieur et l'extérieur de C. Il s'agit de montrer que $I \subset \sum_{c \in C} K(c)$:

Posons comme dans le § 7:

$$\bar{I}(c) = I(c) + K(c), \quad \bar{E}(c) = E(c) + K(c).$$

D'après le théorème du § 7, les conditions II° (qui donne: $(\prod_{c \in O} I(c) \neq 0)$ et III° impliquent que $\overline{I}(c)$ et $\overline{E}(c)$ sont des fonctions continues au sens de Hausdorff. $\overline{I}(c)$ et $\overline{E}(c)$ sont en vertu de la condition I° des continus ne coupant pas le plan, dont le premier contient selon la condition II° le point fixe p, tandisque le second est non-borné. Or, $\overline{I}(c)$ étant en outre borné par définition, il balaie l'intérieur I de C, en vertu du théorème démontré dans le § 3. D'autre part, $\overline{E}(c)$ ne peut pas balayer E, car aucun $\overline{E}(c)$ ne contient le point p de E. En vertu du théorème du § 6, $\overline{E}(c)$ balaie donc également I.

Soit i un point quelconque de I. Lorsque I est balayé par $\overline{I}(c)$ et par $\overline{E}(c)$, il existe, sur la courbe C, deux point c_1 et c_2, tels que

$$i \in \overline{I}(c_1), \quad i \in \overline{E}(c_2).$$

Si pour tout i de I on a: $i \in K(c_1)$, le théorème est démontré.

Il reste donc d'examiner le cas où l'on a pour un i:

$$i \in I(c_1) \quad \text{et} \tag{31}$$

$$i \in \overline{E}(c_2) \tag{32}$$

et il s'agit de prouver qu'il existe dans ce cas un tel c_0 de C que $i \in K(c_0)$.

Soit à ce but L un arc de C à extrémités c_1 et c_2, orienté de c_1 vers c_2. Désignons par c_0 la borne inférieure des points c de L pour lesquels on a

$$i \in \overline{E}(c).$$

Cette borne existe, puisque c_2 satisfait à la relation (32).

En s'appuyant sur le lemme du § 7, nous déduirons d'abord de (31) que

$$c_0 \neq c_1. \tag{33}$$

Supposons, en effet, que $c_0 = c_1$. En vertu de (31) on aurait $i \in I(c_0)$. D'après le lemme du § 7 on aurait donc: $i \in I(c)$ pour c appartenant à un certain voisinage de c_0 relatif à C. Par conséquent $i \, non \in \overline{E}(c)$ pour c de ce voisinage, contrairement à la définition de c_0.

Ceci établi, nous allons montrer que

$$i \in \overline{E}(c_0). \tag{34}$$

C'est vrai, en effet, si $c_0 = c_2$ [cf. (32)]. Si $c_0 \neq c_2$, il existe d'après la définition de c_0 une suite $\{c_\nu\}$ de points pour lesquels on a:

$$c_\nu \in L, \quad i \in \overline{E}(c_\nu), \quad \lim_{\nu/\infty} c_\nu = c_0.$$

$\overline{E}(c)$ étant une fonction continue au sens de Hausdorff, on a:

$$\lim_{\nu/\infty} \overline{E}(c_\nu) = \overline{E}(c_0),$$

$$\lim_{\nu/\infty} \varrho(\overline{E}(c_\nu), i) = \lim 0 = 0,$$

d'où, d'après la définition de la limite d'une suite d'ensembles [cf. § 1, b)], la formule (34) résulte immédiatement.

Nous affirmons enfin que

$$i \, non \in E(c_0). \tag{35}$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait en vertu du lemme du § 7: $i \in E(c_\nu)$ pour une suite $\{c_\nu\}$ convergeante vers c_0. Or, en vertu de (31) ceci n'est compatible avec la définition de c_0 que si $c_0 = c_1$, contrairement à (33). La relation (35) est donc également établie.

Les formules (34) et (35) donnent:

$$i \in \overline{E}(c_0) - E(c_0) = K(c_0),$$

c. q. f. d.