Sur la séparation d'ensembles situés sur le plan.

Par

Casimir Kuratowski (Lwów).

Je me propose de développer dans cet ouvrage une méthode qui me paraît utile pour l'étude des coupures du plan et qui permet souvent d'éviter l'emploi des lignes brisées et des polygones approximatifs.

D'après un théorème bien connu, si A et B sont deux continus bornés sans points communs, on peut couper [1] le plan entre eux à l'aide d'une courbe simple fermée (un polygone). Dans le cas plus général, où A et B sont deux ensembles connexes séparés [2] et bornés une telle courbe simple fermée peut ne pas exister; il existe, toutefois, un continu S qui coupe le plan entre A et B et — comme je prouve — on peut s'arranger de façon que ce continu diffère aussi peu que possible d'une courbe simple fermée. Plus précisément: S est en chaque point de $S-\overline{A}\,\overline{B}$ localement un arc simple (aux points de l'ensemble $\overline{A}\,\overline{B}$ son caractère est imposé par A et B); de plus, S — tout comme une courbe simple fermée — constitue la frontière commune de deux régions.

Ces deux propriétés conduisent à la conclusion importante que le „séparateur" [3] S se laisse décomposer d'une façon *cyclique* [4] en

[1]) Un ensemble E coupe le plan entre X et Y, si $XE=0=YE$ et s'il n'existe aucun continu C disjoint de E tel que $XC\neq 0\neq YC$.

[2]) A et B sont dits séparés, lorsque $A\overline{B}+B\overline{A}=0$; un ensemble est dit connexe, lorsqu'il n'est pas somme de deux ensembles séparés non-vides.

[3]) Pour la définition précise de ce terme, voir § 1.

[4]) La décomposition (en ensembles fermés disjoints) $S=\sum T_\xi$, où ξ parcourt la circonférence, est cyclique, si l'égalité $\lim \xi_n=\xi_0$ entraine: $\operatorname{Lim\,sup} T_{\xi_n}\subset T_{\xi_0}$ (c'est-à-dire que les formules $p_{n_i}\,\varepsilon\, T_{\xi_{n_i}}$ et $p=\lim p_{n_i}$ entraînent $p\,\varepsilon\, T_{\xi_0}$). La fonction $\xi=f(p)$, définie par la condition $p\,\varepsilon\, T_\xi$, est continue sur S. (Voir ma note *Sur les décompositions semi-continues d'espaces métriques compacts*, Fund. Math. XI, pp. 169—185).

sous-continus:

$$S=\sum T_\xi,$$

l'indice ξ parcourant une circonférence et T_ξ étant, soit une composante [1]) de $\overline{A}\,\overline{B}$, soit un point individuel de $S-\overline{A}\,\overline{B}$.

En particulier, dans le cas où $\overline{A}\,\overline{B}$ est punctiforme [2]) (ou vide), chaque tranche T_ξ se réduit à un seul point et S est alors une courbe simple fermée.

Il est à remarquer que la propriété d'être décomposable d'une façon cyclique en sous-continus n'appartient pas à toutes les frontières communes à deux régions [3]). C'est bien de cette propriété du séparateur que provient son utilité.

En s'appuyant sur cette propriété, j'étend plusieurs théorèmes qui concernent les relations entre des courbes simples fermées et des continus au cas où il s'agit de relations entre les séparateurs et les ensembles connexes. Tel est, par ex., le théorème suivant: si l'on unit un point situé à l'intérieur du cercle à un autre situé à l'extérieur par deux arcs qui ne se rencontrent pas sur la circonférence, ces arcs coupent le plan entre deux points de la circonférence; je généralise cet énoncé dans le th. II, où je remplace les arcs par des ensembles connexes arbitraires et la circonférence du cercle par un séparateur (assujetti à certaines conditions).

Tel est encore ce théorème: ab et $(ab)_1$ étant deux arcs n'ayant que leurs extrémités en commun et étant situés (abstraction faite des extrémités) l'un à l'intérieur et l'autre à l'extérieur d'un cercle, leur somme coupe le plan entre tout couple des points situés sur la circonférence entre lequel leur produit coupe la circonférence. Je généralise cet énoncé dans le th. IV, que j'appelle théorème de réciprocité.

[1]) Un sous-ensemble d'un ensemble E est dit sa composante, s'il est connexe est n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de E.

[2]) Un ensemble est dit punctiforme lorsqu'il ne contient aucun continu qui ne se réduise pas à un seul point.

[3]) Par ex. les continus indécomposables ne jouissent jamais de cette propriété; plus généralement: les continus „monostratiques" (j'appelle ainsi tout continu qui est une somme finie ou dénombrable de continus indécomposables et de continus de condensation). D'autre part, toute frontière commune à deux régions et non-monostratique se laisse décomposer en sous-continus d'une façon cyclique. (Voir ma note *Sur la structure des frontières communes à deux regions*, ce volume, pp. 20—42).

Dans le cas où A et B sont deux ensembles connexes bornés et séparés, le théorème de réciprocité permet de déduire les propriétés de l'ensemble $\bar{A}+\bar{B}$ relatives au plan des propriétés de l'ensemble $\bar{A}\bar{B}$ relatives au séparateur des ensembles A et B.

Ainsi, en particulier, si ni $\bar{A}$ ni $\bar{B}$ ne coupent séparément le plan, le nombre des régions en lesquelles $\bar{A}+\bar{B}$ coupe le plan est égal au nombre des „intervalles" en lesquels $\bar{A}\bar{B}$ coupe le séparateur (normé) des ensembles A et B. De là résulte facilement le théorème de Jordan.

A l'aide des séparateurs je parviens, entre autres, au théorème suivant: A et B étant deux ensembles connexes bornés et séparés et a et b deux points entre lesquels $\bar{A}+\bar{B}$ coupe le plan tandis que ni $\bar{A}$ ni $\bar{B}$ n'est une coupure entre ces points, il suffit d'ajouter à $A+B$ *deux* points convenablement choisis pour que l'ensemble ainsi obtenu coupe le plan entre a et b. Il serait intéressant de reconnaître, s'il est vrai que, lorsque A est un ensemble connexe tel que $\bar{A}$ coupe le plan entre deux points, il existe *un* point qu'il suffit d'ajouter à A pour obtenir une coupure entre les deux points considérés?

La plupart des théorèmes mentionnés jusqu'ici se trouve dans le § 2, qui concerne les propriétés des séparateurs. Le § 1 contient des théorèmes d'existence; je reviens au problème d'existence des séparateurs cycliques à la fin du § 2 après avoir établi quelques propriétés des séparateurs qui sont nécessaires pour traiter ce problème. Le § 3 est consacré plus spécialement aux rapports entre les frontières communes à deux régions et les continus irréductibles entre deux points. La méthode des séparateurs y est utilisée constamment.

Tous les théorèmes concernent les ensembles situés sur le plan Euclidien.

§ 1.

Existence des séparateurs.

1. Définitions. A et B étant deux ensembles séparés, S est dit *séparateur* de ces ensembles, lorsque S est une *coupure irréductible* du plan entre eux; autrement dit, lorsque S est une coupure entre chaque couple de points extraits de A et de B, tandis que, pour tout vrai sous-ensemble fermé X de S, il existe un tel couple: $a \in A$, $b \in B$, entre lequel X ne coupe pas le plan.

On tiendra compte du fait que, dans le cas où A et B sont connexes, leur séparateur est la *frontière commune de deux régions* qui contiennent A et B resp.[1]; en symboles $S=F(P)=F(Q)$, P et Q désignant les régions en question.

Le séparateur S est dit *normé*, lorsque

$$S(\bar{A}+\bar{B})=\bar{A}\bar{B} \tag{1}$$

et lorsque, en outre, S est *régulier*[2] en chaque point qui n'appartient pas à $\bar{A}\bar{B}$.

Le séparateur est dit *cyclique*, lorsqu'il constitue la frontière commune des deux régions qui contiennent A et B resp. et admet une décomposition cyclique en sous-continus (au sens établie p. 214, note [4]); cf. aussi la note [3]) p. 215).

2. Théorème I. *A et B étant deux ensembles bornés*[3] *séparés, il existe entre eux un séparateur S normé et borné.*

De plus[4],

$$\textit{si} \quad X \subset S-\bar{A} \quad \textit{et} \quad x \in \overline{X}\,\overline{B}, \tag{2}$$

il existe dans tout entourage de x un continu K tel que

$$KA \neq 0 \neq KX \quad \textit{et} \quad K\bar{B}=0. \tag{3}$$

D é m o n s t r a t i o n[5]. Soit E_n l'ensemble de tous les x tels que

[1] en vertu du théorème suivant: pour qu'un ensemble fermé E soit une coupure irréductible entre a et b, il faut et il suffit que a et b appartiennent à deux régions distinctes situées en dehors de E et que E constitue leur frontière commune.

[2] Un ensemble E est dit *régulier* (au sens de M. M e n g e r) au point p lorsqu'il existe un entourage de p relatif à E aussi petit que l'on veut et ayant la frontière (relative) composée d'un nombre fini de points.

[3] On peut, d'ailleurs, supposer que ce n'est que A qui est borné.

[4] Nous n'allons nous servir de cette propriété que dans la démonstration du théorème V.

[5] L'idée de cette démonstration n'est pas nouvelle: elle apparait, par ex., chez M. R. L. M o o r e dans sa note *Concerning the separation of point sets by curves*, Proc. Nat. Ac. Sc. XI, dans la démonstration (publiée par M. K n a s t e r et moi, Fund. Math. II, *Sur les ensembles connexes*, th. XXXVII) de l'existence, pour tout couple d'ensembles connexes séparés, d'un continu qui coupe le plan entre ces ensembles. Nous nous sommes servis aussi de la même idée en démontrant que l'accessibilité par un arc équivaut à l'accessibilité par un continu arbitraire (dans l'espace n-dimensionnel); voir Fund. Math. V, p. 38, cf. aussi K é r é k j a r t ó *Topologie* I, p. 82.

$$x \in \overline{A} \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \varrho(x, \overline{B}) \leqslant \frac{1}{n},$$

$\varrho(x, \overline{B})$ désignant la distance de x à $\overline{B}$.

Il s'en suit que E_n est fermé et borné et que

(4) $$\overline{A} - \overline{B} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n.$$

En vertu du théorème de Heine-Borel, il existe une suite finie de cercles (ouverts) $R^n_1, \ldots, R^n_{k_n}$ à rayon $< \frac{1}{n+1}$ et tels que

(5) $$E_n \subset R^n_1 + \ldots + R^n_{k_n}$$

(6) $$\overline{R}^n_i . \overline{B} = 0, \quad i = 1, \ldots, k_n$$

(7) $$R^n_i . E_n \neq 0.$$

Posons

(8) $$G = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k_n} R^n_i.$$

Je dis que: $A \subset G$.

En effet, A et B étant séparés, on a $A \subset \overline{A} - \overline{B}$ et, comme selon (4), (5) et (8):

(9) $$\overline{A} - \overline{B} \subset \sum_{n=0}^{\infty} E_n \subset G,$$

il vient $A \subset G$.

J'établirai, à présent, la proposition suivante:

(10) *si $p \in \overline{G} - \overline{A}$, p appartient à un $\overline{R}^{n_0}_{i_0}$ et dans l'entourage de p il n'y a qu'un nombre fini de cercles R^n_i.*

Supposons, en effet, que dans l'entourage de p il existe une infinité de cercles R^n_i; on a donc $p = \lim p_m$, $p_m \in R^{n_m}_{i_m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ et $n_m < n_{m+1}$. Les diamètres de ces cercles tendant vers 0, on a, en vertu de la formule (7); $p \in \overline{\sum_{n=0}^{\infty} E_n}$, d'où en raison de (4): $p \in \overline{A}$.

Il en résulte aussitôt que, si $p \in \overline{G} - \overline{A}$, il existe un cercle $R^{n_0}_{i_0}$ tel que $p \in \overline{R}^{n_0}_{i_0}$.

La proposition (10) est donc établie.

On en tire, d'après (6), l'égalité

(11) $$\overline{G}\,\overline{B} - \overline{A} = 0$$

d'où $\overline{G}B = 0$, puisque $B\overline{A} = 0$.

Cela étant, l'ensemble $F(G)$, comme frontière de l'ensemble ouvert G, est une coupure entre A et B. La propriété d'être une coupure fermée du plan entre deux ensembles A et B, étant inductive [1]), l'ensemble $F(G)$ contient un séparateur S entre A et B.

Je vais prouver que ce séparateur est normé.

Comme $S \subset \overline{G}$, il vient, selon (11): $S\overline{B} - \overline{A} = 0$.

D'autre part, en multipliant (9) par S et, en tenant compte du fait que $SG = 0$ (puisque $S \subset F(G)$), on a $S\overline{A} - \overline{B} = 0$.

Donc $S(\overline{A} + \overline{B}) \subset \overline{A}\,\overline{B}$. Ainsi, pour établir l'égalité (1), il reste à prouver l'inclusion inverse.

Or, S étant une coupure entre A et B, le complémentaire de S se décompose en deux ensembles séparés M et N tels que $A \subset M$ et $B \subset N$; d'où

$$\overline{A}\,\overline{B} \subset \overline{M}\,\overline{N} \subset S$$

et, par conséquent: $\overline{A}\,\overline{B} \subset S(\overline{A} + \overline{B})$.

L'égalité (1) établie, nous allons prouver que S est régulier en chaque point $p \in S - \overline{A}\,\overline{B}$.

Selon (1), $p \in S - \overline{A}$; donc $p \in \overline{G} - \overline{A}$ et selon la proposition (10), il n'y a dans l'entourage de p qu'un nombre fini de cercles R^n_i. Par conséquent, l'entourage de p relatif à $F(G)$ est contenu dans un nombre fini de circonférences de ces cercles; $F(G)$ est donc évidemment régulier au point p. Il en est de même de S, puisque $S \subset F(G)$.

Il est ainsi établi que le séparateur S est normé. Le fait que S (et G) est borné résulte facilement de la formule (7).

Supposons, finalement, que x et X satisfont aux conditions (2). Soit C un cercle de rayon arbitraire, décrit du point x.

Comme $x \in \overline{B}$, on conclut de (6) que x n'appartient à aucun $\overline{R}^n_i$ et comme, d'autre part, il n'y a qu'un nombre fini de cercles R^n_i dont le diamètre dépasse un nombre positif donné, on peut entourer x d'un cercle C_1 assez petit pour que l'inégalité $\overline{R}^n_i . C_1 \neq 0$

[1]) c'est-à-dire, que le produit d'une suite descendente de coupures fermées entre A et B est encore une coupure entre ces ensembles. De là résulte, selon un théorème de M. Brouwer, l'existence d'une coupure irréductible.

entraîne l'inclusion $\overline{R}_i^n \subset C$. Or, l'hypothèse $x \in \overline{X}$ entraîne l'existence d'un point $p \in X C_1$ et, comme $X \subset S - \overline{A} \subset \overline{G} - \overline{A}$, il vient $p \in C_1 . (\overline{G} - \overline{A})$. Il existe donc, selon (10), un cercle R_i^n tel que $p \in \overline{R}_i^n$, d'où $\overline{R}_i^n . C_1 \neq 0$ et, par conséquent $\overline{R}_i^n \subset C$.

En posant $K = \overline{R}_i^n$, on satisfait aux formules (3), en raison de (7), (4) et (6).

Lemme. *E étant un vrai sous-ensemble fermé d'un séparateur borné S qui est localement connexe* [1]) *en chaque point de $S - E$, si S constitue la frontière commune à deux régions, sa décomposition en composantes de E et en points individuels de $S - E$ est cyclique.*

Démonstration. L'hyper-espace [2]) $\mathscr{H}$ de cette décomposition est évidemment localement connexe en chaque point de $S - E$ (puisque S y est localement connexe). D'autre part, tous les autres „points" de $\mathscr{H}$, c'est-à-dire les composantes de E, constituent (d'après un théorème général de M. Brouwer) un ensemble punctiforme. On en conclut que $\mathscr{H}$ est en chaque point localement connexe, car les points de non-connexité locale ne forment jamais d'ensemble punctiforme non-vide [3]).

Or, $\mathscr{H}$, comme hyper-espace localement connexe d'une décomposition en continus d'une frontière (bornée) commune à deux régions, est une courbe simple fermée [4]), ce qui revient à dire que la décomposition considérée est cyclique.

Corollaire 1. *A et B étant deux ensembles connexes* [5]) *bornés et séparés, il existe entre eux un séparateur normé et cyclique; sauf le cas où $\overline{A}\,\overline{B}$ coupe le plan entre A et B* [6]) *(cas où le séparateur est identique à $\overline{A}\,\overline{B}$).*

[1]) c'est-à-dire, que pour chaque point de $S - E$ il existe des entourages connexes (relatifs à S) aussi petit que l'on veut. La propriété d'être un point régulier d'un continu implique la connexité locale (selon un théorème de M. Menger, Math. Ann. 95, pp. 300—301).

[2]) c'est-à-dire, la famille des „tranches" de la décomposition envisagée, où l'on considère une suite $T_1, T_2, \ldots$, comme convergente vers la tranche T lorsque $\text{Lim sup}\, T_n \subset T$. Voir ma note citée, Fund. Math. XI, p. 171.

[3]) d'après un théorème publié par moi, Fund. Math. III, p. 60.

[4]) d'après les théorèmes (δ) p. 24 et C p. 28 de ma note publiée dans ce volume.

[5]) Dans le § 2 (th. V) nous allons remplacer l'hypothèse de connexité par une hypothèse moins restrictive.

[6]) Ainsi, par. ex., dans le cas où C est un continu indécomposable qui con-

En effet, le séparateur S est, comme nous l'avons dit au début du § 1, une frontière commune à deux régions; on n'a donc qu'à substituer dans le lemme précédent $\overline{A}\,\overline{B}$ à la place de E, pour arriver à la conclusion demandée ($\overline{A}\,\overline{B}$ est un vrai sous-ensemble de S, puisque, par hypothèse, $\overline{A}\,\overline{B}$ ne coupe pas le plan entre A et B, tandis que S le coupe).

Corollaire 2. *A et B étant deux ensembles bornés et séparés et $p \in A$, $q \in B$, il existe un séparateur S entre p et q tel que*

$$S\overline{A} = S\overline{B} \tag{12}$$

et que S est régulier en chaque point de $S - \overline{A}\,\overline{B}$.

Sauf le cas où $\overline{A}\,\overline{B}$ coupe le plan entre p et q, S est un séparateur cyclique.

En effet, selon te th. I, il existe un séparateur normé S_0 entre A et B. S_0 étant une coupure entre p et q, il contient une coupure irréductible entre ces points, c'est-à-dire, un séparateur S des points p et q. En vertu de (1), on a $S(\overline{A} + \overline{B}) = S\overline{A}\,\overline{B}$, ce qui équivaut à (12); en outre, S, comme sous-ensemble de S_0, est régulier en chaque point de $S - \overline{A}\,\overline{B}$.

Si l'on suppose que $\overline{A}\,\overline{B}$ n'est pas une coupure entre p et q, l'ensemble $S\overline{A}\,\overline{B}$ est un vrai sous-ensemble de S et, en vertu du lemme, S est cyclique.

Corollaire 3 [1]). *Si dans les corollaires 1 et 2 on remplace la condition que $\overline{A}\,\overline{B}$ ne soit pas une coupure entre A et B (ou entre p et q resp.) par l'hypothèse que $\overline{A}\,\overline{B}$ soit punctiforme, le séparateur S est une courbe simple fermée.*

En effet, dans ce cas, dans la décomposition $S = \Sigma T_\xi$ en composantes de l'ensemble $S\overline{A}\,\overline{B}$ et en points individuels de $S - \overline{A}\,\overline{B}$ toutes les tranches T_ξ se réduisent à des points individuels. La

stitue la frontière commune de deux régions A et B, il n'existe aucun séparateur cyclique entre ces régions.

Evidemment, lorsque $\overline{A}\overline{B}$ coupe le plan entre A et B, on a $S = \overline{A}\,\overline{B}$.

[1]) La partie du corollaire 3 qui concerne le corollaire 2 exprime d'une façon un peu différente une idée contenue dans le „separation theorem" de M. R. L. Moore, publié dans ce volume.

Le théorème suivant de M. Lubben en est une conséquence directe: K étant un continu borné, T un ensemble punctiforme, $K - T = A + B$ deux ensembles séparés et $p \in A$, $q \in B$, il existe alors une courbe simple fermée S qui sépare p et q et $SK \subset T$ (Ann. de la Soc. Pol. de Math. t. V, p. 111).

fonction T_ξ transforme donc la circonférence en le séparateur S d'une façon bicontinue, c. q. f. d.

§ 2.

Propriétés des séparateurs.

3. Notations. S désigne, dans ce §, un séparateur cyclique borné entre p et q; P et Q désignent resp. les régions qui contiennent p et q et dont S forme la frontière commune. $S = \sum_\xi T_\xi$ est une décomposition cyclique de S en sous-continus, l'indice ξ parcourant la circonférence dans un sens déterminé.

α et β étant deux valeurs de ξ, $L_{\alpha\beta}$ désigne „l'arc ouvert": $\sum_{\alpha<\xi<\beta} T_\xi$ et $L_{\overline{\alpha\beta}}$ „l'arc fermé": $\sum_{\alpha\leq\xi\leq\beta} T_\xi$.

4. Théorème II. *V et W étant deux ensembles connexes fermés relativement à S*[1]*, unissant p et q et tels que, pour tout ξ, on a. soit $VT_\xi = 0$, soit $WT_\xi = 0$, il existe dans S deux „arcs ouverts" $L_{\alpha\beta}$ et $L_{\gamma\delta}$ entre lesquels $V+W$ coupe le plan et qui satisfont aux conditions*[2]:

$$(L_{\alpha\beta} + L_{\gamma\delta})\,(V+W) = 0 \tag{1}$$

$$(T_\alpha + T_\beta)\,V \neq 0 \neq (T_\alpha + T_\beta)\,W, (T_\gamma + T_\delta)\,V \neq 0 \neq (T_\gamma + T_\delta)\,W. \tag{2}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soient Γ et Δ les ensembles des indices ξ tels que $VT_\xi \neq 0$ et $WT_\xi \neq 0$ resp. Ce sont donc deux ensembles fermés et disjoints, situés sur la circonférence. Il n' y a donc sur cette circonférence qu'un nombre fini ($\geqslant 2$) d'intervalles contigus à $\Gamma + \Delta$ et ayant l'une extrémité située sur Γ et l'autre sur Δ.

Soit $\xi_1 \prec \xi_2 \prec \dots \prec \xi_n \prec \xi_1$, $n \geqslant 2$, une suite de points intérieurs à chacun de ces intervalles. On voit aussitôt que l'intervalle ouvert $\xi_1\,\xi_2$ contient des points d'un et d'un seul des deux ensembles Γ ou Δ et, qu'en outre, s'il contient des points de Γ, $\xi_2\,\xi_3$ contient des points de Δ. On peut donc admettre que

$$[\xi_1\,\xi_2 + \xi_3\,\xi_4 + \dots + \xi_{n-1}\,\xi_n]\,\Delta = 0 = [\xi_2\,\xi_3 + \xi_4\,\xi_5 + \dots + \xi_n\,\xi_1]\,\Gamma. \tag{3}$$

[1]) c'est-à-dire que les ensembles SV et SW sont fermés.

[2]) Le sens de ces conditions est que $L_{\alpha\beta}$ et $L_{\gamma\delta}$ sont deux „intervalles ouverts contigus" à l'ensemble $S(V+W)$ et étendus entre SV et SW.

Soit $s_i \in T_{\xi_i}$. Je dis que parmi les points $s_1, \dots, s_n$ il y a, au moins, deux entre lesquels $V+W$ coupe le plan.

Supposons qu'il n'en est pas ainsi. Il existe donc un continu C qui passe par tous les points $s_1, \dots, s_n$ et que

$$C(V+W) = 0. \tag{4}$$

Considérons les deux ensembles fermés D et E:

$$D = C + L_{\overline{\xi_1\xi_2}} + L_{\overline{\xi_3\xi_4}} + \dots + L_{\overline{\xi_{n-1}\xi_n}}$$
$$E = C + L_{\overline{\xi_2\xi_3}} + L_{\overline{\xi_4\xi_5}} + \dots + L_{\overline{\xi_n\xi_1}}.$$

On a, en vertu de (3) et (4): $DW = 0 = EV$, ce qui prouve que ni D ni E ne coupe le plan entre p et q. D'autre part, le produit de ces ensembles est un continu, puisque

$$DE = C + T_{\xi_1} + T_{\xi_2} + \dots + T_{\xi_n}$$

et C passe par tous les T_{ξ_i}.

D'après le théorème de J a n i s z e w s k i[1]), la somme $D+E$ ne coupe donc nonplus le plan entre p et q. Mais ceci est impossible, car $D+E = C+S$ et S coupe le plan entre p et q.

Il est ainsi établi que parmi les indices $1, \dots, n$, il y en a deux: j et k, tels que $V+W$ coupe le plan entre les points s_j et s_k. En désignant par $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ les intervalles contigus à $\Gamma+\Delta$ qui contiennent resp. ξ_j et ξ_k, on vérifie les formules (1) et (2).

Corollaire 1. *A et B étant deux ensembles connexes situés resp. dans P et Q, s et t deux points de $\bar{A}\,\bar{B}$ et $s \in T_\alpha$ et $t \in T_\beta$, l'ensemble $A+s+t+B$ coupe le plan entre les „arcs ouverts" $L_{\alpha\beta}$ et $L_{\beta\alpha}$.*

Pour le prouver, on pose dans le théorème précédent: $V = A+s+B$, $W = A+t+B$.

Corollaire 2. *C étant un sous-continu borné de $\bar{P}$ tel que*

$$CT_\alpha \neq 0 \neq CT_\beta \text{ et } CT_\gamma = 0 = CT_\delta$$

les indices satisfaisant à la condition $\alpha \prec \gamma \prec \beta \prec \delta \prec \alpha$, C coupe $\bar{P}$ entre T_γ et T_δ.

Soit, en effet, K un sous-continu de C irréductible entre les

[1]) en vertu duquel, D et E étant deux ensembles fermés et bornés dont produit est un continu et dont aucun n'est une coupure entre deux points donnés p et q, $D+E$ n'est nonplus une coupure entre ces points. (Prace Mat.-Fiz. 1913).

„arcs" $L_{\overline{\gamma\delta}}$ et $L_{\overline{\delta\gamma}}$ [1]). On a donc $\overline{K-S}=K$ et $KL_{\gamma\delta}\neq 0\neq KL_{\delta\gamma}$. Soient s et t deux points tels que $s\in KL_{\delta\gamma}$ et $t\in KL_{\gamma\delta}$, soient $s\in T_{\alpha_1}$ et $t\in T_{\beta_1}$. On a, par conséquent: $\alpha_1\prec\gamma\prec\beta_1\prec\delta\prec\alpha_1$.

En posant dans le corollaire précédent: $A=K-S$, $B=Q$, $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, on en conclut que l'ensemble $(K-S)+s+t+Q$ coupe le plan entre T_γ et T_δ; il en est donc de même de $C+Q$, puisque $(K-S)+s+t\subset C$.

Il n'existe donc aucun sous-continu de $\overline{P}$ qui unisse T_γ à T_δ et qui soit disjoint de C, c. q. f. d.

Corollaire 3. *Si l'on ajoute aux hypothèses du corollaire précédent celle que l'inégalité $T_\xi C\neq 0$ entraîne l'inclusion $T_\xi\subset C$, l'ensemble $\overline{P}-C$ se décompose en deux ensembles séparés G et H tels que $T_\gamma\subset G$ et $T_\delta\subset H$.*

Ce corollaire est une conséquence immédiate du corollaire 2 et du lemme suivant.

Lemme. *C étant un sous-ensemble fermé (et borné) de $\overline{P}$ tel que l'inégalité $T_\xi C\neq 0$ entraîne l'inclusion $T_\xi\subset C$, si C coupe $\overline{P}$ entre deux points g et h (de $\overline{P}-C$), l'ensemble $\overline{P}-C$ se décompose en deux ensembles séparés G et H tels que $g\in G$ et $h\in H$.*

Démonstration. La région P peut être supposée bornée, car le cas où P est non bornée se ramène à celui-ci par inversion. On peut donc appliquer le théorème II de ma note publiée dans ce volume (p. 32) [2]), en vertu duquel il existe une fonction continue $\varphi(x)$ définie sur $\overline{P}$ qui transforme 1°: P de façon bicontinue en l'intérieur d'un cercle Φ et 2°: S en la circonférence de Φ de façon que, pour $x\in S$, on a $x\in T_{\varphi(x)}$.

Je dis que l'ensemble fermé $\varphi(C)$ coupe le cercle Φ entre les points $\varphi(g)$ et $\varphi(h)$. En effet, en vertu de l'hypothèse $\varphi(g)$ et $\varphi(h)$

[1]) Un continu K est dit *irréductible* entre les ensembles fermés M et N, lorsque 1°: $KM\neq 0\neq KN$ et 2°: il n'existe aucun vrai sous-continu X de K tel que $XM\neq 0\neq XN$. Tout continu borné qui a des points communs avec deux ensembles fermés M et N contient un continu K irréductible entre ces ensembles; l'ensemble $K-(M+N)$ est connexe et $\overline{K-(M+N)}=K$ (lorsque K ne se réduit pas à un point). Voir la note de M. Straszewicz et moi, publiée dans ce volume, pp. 152—156.

[2]) Ce théorème fut énoncé pour le cas, où la décomposition $S=\sum T_\xi$ est une décomposition en tranches „fondamentales". Mais, comme on voit, sa démonstration est valable pour toute décomposition cyclique de S en sous-continus.

appartiennent à $\Phi-\varphi(C)$; s'il existait dans $\Phi-\varphi(C)$ un continu Δ unissant $\varphi(g)$ à $\varphi(h)$, Δ serait image d'un continu [1]) D (c'est-à-dire que $\Delta=\varphi(D)$) unissant g à h dans $P-C$, contrairement à l'hypothèse.

Or, $\varphi(C)$ étant une coupure fermée du cercle Φ entre les points $\varphi(g)$ et $\varphi(h)$, $\Phi-\varphi(C)$ se décompose en deux ensembles séparés contenant $\varphi(g)$ et $\varphi(h)$ resp. [2]); d'où [3]) la conclusion demandée.

5. Définition. *A et B étant deux ensembles fermés et R une région-composante du complémentaire de $A+B$, R est dite région intermédiaire, lorsque R n'est une région-composante ni du complémentaire de A ni de celui de B.*

En symboles cette condition peut être exprimée de cette façon

$$F(R)-A\neq 0\neq F(R)-B.$$

Nous allons prouver la proposition suivante:

A et B étant deux ensembles séparés, S leur séparateur normé et R une région intermédiaire des ensembles $\overline{A}$ et $\overline{B}$, on a $RS\neq 0$ [4]).

Il existe, par définition de R, un point $a\in F(R)-\overline{A}$. Comme $F(R)\subset\overline{A}+\overline{B}$, il vient $a\in\overline{B}-\overline{A}$ et comme $S\overline{B}\subset\overline{A}$ (puisque S est normé), on en tire $a\in\overline{B}-(\overline{A}+S)$.

Le point a peut donc être entouré d'un cercle C tel que $C.(\overline{A}+S)=0$. On en conclut que

$$CB\neq 0\neq CR \quad\text{et}\quad CS=0. \tag{5}$$

D'une façon analogue, il existe un cercle D tel que

$$DA\neq 0\neq DR \quad\text{et}\quad DS=0. \tag{6}$$

L'ensemble $C+R+D$ est donc connexe et unit un point de A à un de B; S étant une coupure entre A et B, il vient $S(C+R+D)\neq 0$, d'où, en vertu de (5) et (6): $SR\neq 0$.

[1]) Cf. ma note citée *Sur les décompositions semi-continues...*, cor. 1, p. 182.

[2]) En général, Φ étant un continu localement connexe et Γ, une coupure fermée de Φ entre φ_1 et φ_2, l'ensemble $\Phi-\Gamma$ se décompose en deux ensembles séparés contenant φ_1 et φ_2 resp.

[3]) Cf. ibid., th. X, 9°, p. 174.

[4]) Dans le cas, où A et B sont connexes cette proposition peut être remplacée par un énoncé plus précis; cf. cor. 1 du th. IV.

6. Théorème III. *A et B étant deux ensembles connexes, bornés et séparés, a et b deux points entre lesquels $\overline{A}+\overline{B}$ est une coupure tandis que ni $\overline{A}$ ni $\overline{B}$ n'en est pas une, il existe dans $\overline{A}\,\overline{B}$ deux points s et t tels que $A+s+t+B$ est une coupure entre a et b.*

Démonstration. Soient R_a et R_b les deux régions déterminées sur le plan par $\overline{A}+\overline{B}$ qui contiennent a et b resp. Par hypothèse, ces deux régions sont intermédiaires entre $\overline{A}$ et $\overline{B}$. Soit S un séparateur normé des ensembles A et B (son existence résulte du th. I). Il existe, selon la proposition du N5 deux points a_1 et b_1 tels que

$$a_1 \epsilon S R_a \quad \text{et} \quad b_1 \epsilon S R_b. \tag{7}$$

Par conséquent: $S-\overline{A}\,\overline{B}\neq 0$, le séparateur S peut donc, en vertu du corollaire 1, p. 220, être supposé cyclique. Autrement dit: sa décomposition en composantes de l'ensemble $\overline{A}\,\overline{B}$ et en points individuels de $S-\overline{A}\,\overline{B}$ est cyclique.

Soit $S=\Sigma T_\xi$ cette décomposition; le point a_1 constitue donc une tranche T_ξ; il en est de même de b_1. Je dis que les deux „arcs" $a_1 b_1$ et $b_1 a_1$ du séparateur contiennent des points de l'ensemble $\overline{A}\,\overline{B}$.

En effet, si par ex. $a_1 b_1$ était disjoint de $\overline{A}\,\overline{B}$, il serait aussi disjoint de $\overline{A}+\overline{B}$ (car le séparateur S étant normé, on a $S(\overline{A}+\overline{B})=\overline{A}\,\overline{B}$); mais alors on pourrait unir, en vertu de (7), les points a et b par un continu situé en dehors de $\overline{A}+\overline{B}$, — contrairement à l'hypothèse.

Ceci établi, on en conclut qu'il existe deux indices α et β tels que $T_\alpha \overline{A}\,\overline{B}\neq 0 \neq T_\beta \overline{A}\,\overline{B}$ et que a_1 et b_1 sont situés resp. sur les „arcs" $L_{\alpha\beta}$ et $L_{\beta\alpha}$. En extrayant deux points s et t de T_α et T_β, on déduit du corollaire 1, p. 223 (où, comme p et q, on admet deux points arbitraires de A et B), que $A+s+t+B$ est une coupure entre a_1 et b_1, donc — en vertu de (7) — entre a et b.

Théorème IV (de réciprocité). *A et B étant deux ensembles connexes, bornés et séparés, S leur séparateur cyclique et a et b deux points situés sur deux tranches de S qui sont disjointes de $\overline{A}+\overline{B}$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{A}+\overline{B}$ coupe le plan entre les points a et b est que $\overline{A}\,\overline{B}$ coupe le séparateur entre ces deux points; c'est-à-dire qu'on ait*

$$L_{\gamma\delta}.\overline{A}\,\overline{B}\neq 0 \neq L_{\delta\gamma}.\overline{A}\,\overline{B}, \tag{8}$$

où $a \epsilon T_\gamma$ et $b \epsilon T_\delta$.

Démonstration. 1. La condition est nécessaire.

Soient: $p \epsilon A$, $q \epsilon B$. Par conséquent $A\subset P$, $B\subset Q$.

Supposons que K soit un continu tel que $a, b \epsilon K\subset S-\overline{A}\,\overline{B}$. On a donc $K(A+\overline{A}\,\overline{B}+B)=0$, ce qui prouve que $A+\overline{A}\,\overline{B}+B$ ne coupe pas le plan entre a et b. Comme, d'autre part, ni $\overline{A}$ ni $\overline{B}$ ne coupe nonplus le plan entre ces points — puisque les ensembles connexes $Q+a+b$ et $P+a+b$ sont, par hypothèse, disjoints de $\overline{A}$ et $\overline{B}$ resp. — on conclut du théorème précédent que $\overline{A}+\overline{B}$ n'est pas une coupure du plan entre a et b.

2. La condition est suffisante. Supposons que $\overline{A}\,\overline{B}$ coupe S entre a et b.

Je dis que la formule (8) est remplie.

En effet, si par ex. $L_{\gamma\delta}.\overline{A}\,\overline{B}=0$, le continu $T_\gamma+L_{\gamma\delta}+T_\delta$ est disjoint de $\overline{A}\,\overline{B}$ (en vertu de l'hypothèse que les tranches qui contiennent a et b sont disjointes de $\overline{A}+\overline{B}$) et unit a à b, contrairement à l'hypothèse que $\overline{A}\,\overline{B}$ coupe S entre ces deux points.

La formule (8) établie, soit $s \epsilon L_{\gamma\delta}.\overline{A}\,\overline{B}$ et $t \epsilon L_{\delta\gamma}.\overline{A}\,\overline{B}$. Selon le corollaire 1, p. 223, l'ensemble $A+s+t+B$ et, à plus forte raison, $\overline{A}+\overline{B}$ coupe le plan entre a et b.

Corollaire 1 [1]. *A et B étant deux ensembles connexes, bornés et séparés et S leur séparateur normé* [2] *toute région intermédiaire entre $\overline{A}$ et $\overline{B}$ contient un et un seul „arc"-composant de l'ensemble $S-\overline{A}\,\overline{B}$ et, inversement, tout „arc"-composant est situé dans une seule région intermédiaire.*

Démonstration. Décomposons, comme d'habitude, le séparateur S en tranches en considérant comme tranches les composantes de $\overline{A}\,\overline{B}$ et les points individuels de $S-\overline{A}\,\overline{B}$. Soit R une région intermédiaire entre $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

D'après la proposition du N 5, on a $RS\neq 0$.

Je dis que RS est une composante de l'ensemble $S-\overline{A}\,\overline{B}$.

D'abord: RS est connexe. Car autrement, il contiendrait deux points a et b qui ne se laissent pas unir par un continu dans $S-(\overline{A}+\overline{B})$, donc — en vertu de la normalité de S — dans

[1] Je dois ce corollaire à M. Knaster, qui m'a attiré l'attention au fait que les régions intermédiaires entre les continus $\overline{A}$ et $\overline{B}$ peuvent être — dans les hypothèses faites sur A et B — rangées en un cycle.

[2] L'existence de S résulte du th. I; sauf le cas où $\overline{A}\,\overline{B}=S$, cas où le cor. 1 est vérifié „dans le vide", S est un séparateur cyclique, conformément au cor. 1, p. 220.

$S-\overline{A}\,\overline{B}$. Mais alors, conformément au théorème de réciprocité, ces points ne pourraient appartenir à la même région-composante R du complémentaire de $\overline{A}+\overline{B}$.

D'autre part, RS n'est un vrai sous-ensemble d'aucun ensemble connexe situé dans $S-\overline{A}\,\overline{B}$, car, si $b_1 \in S-\overline{A}\,\overline{B}-RS$, il vient $b_1 \in S-(\overline{A}+\overline{B}+R)$, puisque $S-\overline{A}\,\overline{B}=S-(\overline{A}+\overline{B})$; cela veut dire que $\overline{A}+\overline{B}$ coupe le plan entre a et b_1. Mais alors, selon le théorème de réciprocité, $\overline{A}\,\overline{B}$ coupe le séparateur S entre ces points, c'est-à-dire que ces deux points appartiennent à deux „arcs"-composants de $S-\overline{A}\,\overline{B}$; par conséquent, b_1 ne se laisse pas unir avec RS par une composante de $S-\overline{A}\,\overline{B}$.

RS est donc une composante de $S-\overline{A}\,\overline{B}$.

Il reste à prouver que si $a \in S-\overline{A}\,\overline{B}$, a appartient à une région intermédiaire.

Or, a appartenant au complémentaire de $\overline{A}+\overline{B}$, soit R la région-composante de ce complémentaire qui contient a.

L'inégalité $RS \neq 0$ entraîne $RP \neq 0$ et comme $A \subset P$ et $AR=0$, il vient $P-R \neq 0$, d'où $P.F(R) \neq 0$.

D'autre part $P\overline{B}=0$. On a donc $F(R)-\overline{B} \neq 0$ et, d'une façon analogue: $F(R)-\overline{A} \neq 0$. La région R est donc intermédiaire.

Corollaire 2. *Dans les hypothèses du corollaire précédent, le nombre des régions-intermédiaires entre $\overline{A}$ et $\overline{B}$ est égal à celui des „intervalles contigus" à $\overline{A}\,\overline{B}$ dans S.*

Remarque. Le *théorème de Jordan* se déduit facilement du corollaire précédent.

En effet, le fait qu'un arc simple ne coupe pas le plan résulte du théorème de Janiszewski[1]), sans l'aide des séparateurs, de la façon suivante:

Si l'on suppose qu'un arc coupe le plan entre p et q, il contient un arc ab irréductible par rapport à la propriété d'être une coupure entre p et q. Par conséquent, si $a \lesssim c \lesssim b$, ni ac ni cb ne coupe le plan entre p et q et, leur produit étant un continu, on conclut du théorème de Janiszewski que $ac+cb$ ne coupe nonplus le plan entre ces points, contrairement à l'hypothèse précédente.

Ceci établi, soient s et t deux points situés sur une courbe simple fermée C. Soient A et B les deux arcs ouverts en lesquels ces points décomposent C; A et B étant connexes et séparés, il existe un séparateur normé S entre ces ensembles. L'ensemble $\overline{A}\,\overline{B}$ étant composé de deux points (s et t), S est une courbe simple fermée (cor. 3, p. 221). De plus, ces deux points décomposent S en deux arcs (st et ts). En vertu du corollaire précédent, il y a précisément deux régions intermédiaires entre $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

[1]) cité p. 223.

Mais, parmi les régions en lesquelles $C=\overline{A}+\overline{B}$ coupe le plan, il n'y a que les régions intermédiaires, puisque $\overline{A}$ et $\overline{B}$, comme arcs simples, ne coupent pas le plan.

C coupe donc le plan en deux régions. C constitue leur frontière, car autrement un vrai sous-continu de C, donc un arc simple, serait une coupure du plan.

7. *Généralisation du cor. 1, p. 220.*

Théorème V. *A et B étant deux ensembles bornés, séparés et tels que 1°: A est connexe, 2°: $\overline{B}$ est un continu et 3°: $\overline{A}$ ne coupe le plan entre aucun couple de points de B, il existe entre A et B un séparateur normé et cyclique; sauf le cas où $\overline{A}\,\overline{B}$ coupe le plan entre A et B.*

Démonstration. Soit S_0 un séparateur borné et normé entre A et B satisfaisant à la thèse du th. I. Je vais prouver que S_0 est cyclique.

Soient R et Q deux régions déterminées par S_0 telles que

$$AR \neq 0 \neq BQ. \tag{9}$$

S_0 étant une coupure entre A et B, on en conclut que

$$BR=0=AQ. \tag{10}$$

En vertu du lemme du $N2$ (p. 220), notre théorème se ramène (en posant $E=\overline{A}\,\overline{B}$) à prouver que:

$$F(R)=S_0=F(Q), \tag{11}$$

$$A \subset R, \quad B \subset Q. \tag{12}$$

On a évidemment

$$F(R)+F(Q) \subset S_0. \tag{13}$$

A étant connexe, l'inégalité (9) entraîne la première inclusion (12); en rapprochant cette inclusion de la formule (10), on voit que $F(R)$ est une coupure entre A et B. Or, S_0 étant une coupure irréductible entre ces ensembles, on déduit de l'inclusion (13) la première égalité (11).

D'une façon analogue, la deuxième égalité (11) va être établie dès que l'inclusion $B \subset Q$ va être démontrée. Ainsi notre théorème se ramène à la démonstration de cette inclusion.

La première égalité (11) étant prouvée, on en conclut que $R= =R+S_0$, donc que Q est une région-composante du complémentaire de $\overline{R}$. Par conséquent[1]), $F(Q)$ est un séparateur entre Q et R

[1]) En vertu du théorème suivant: R étant une région et Q une région du

Or, supposons, contrairement à la deuxième inclusion (12) qu'il existe deux points p et q tels que

(14) $$p \epsilon B - Q \quad \text{et} \quad q \epsilon BQ.$$

Désignons par P la région du complémentaire de $F(Q)$ qui contient p. On a

(15) $$F(P) - \overline{A} \neq 0 \neq F(Q) - \overline{A},$$

car, autrement, $\overline{A}$ couperait le plan entre p et q, contrairement à l'hypothèse 3°.

Je dis que

(16) $$F(Q) = F(P).$$

En effet, S_0 étant régulier en chaque point qui n'appartient pas à $\overline{A}\,\overline{B}$, il en est de même de $F(Q)$ (en vertu de (13)). De plus, $F(Q) - \overline{A}\,\overline{B} \neq 0$ d'après la deuxième inégalité (15). Or, $F(Q)$ étant — comme nous l'avons prouvé — un séparateur qui constitue une frontière commune à deux régions, on peut substituer dans le lemme du $N2$ (p. 220): $F(Q)$ à la place de S et $\overline{A}\,\overline{B}F(Q)$ à la place de E. On en conclut que la décomposition $F(Q) = \Sigma T_\xi$ en composantes de $\overline{A}\,\overline{B}F(Q)$ et en points individuels de $F(Q) - \overline{A}\,\overline{B}$ est cyclique.

Or, si l'on suppose que l'égalité (16) n'est pas vérifiée, $F(P)$ est contenu dans une seule tranche T_ξ [1]), donc dans $\overline{A}$, contrairement à (15).

L'égalité (16) établie, nous pouvons poser

$$S = F(P) = F(Q)$$

sans être en désaccord avec les notations adoptées au début du § 2

S_0 étant normé, on en conclut (v. form. (1), p. 217) en vertu de l'inclusion $S \subset S_0$ (form. (13)), que

(17) $$S(\overline{A} + \overline{B}) = S\overline{A}\,\overline{B},$$

complémentaire de $\overline{R}$, $F(Q)$ est une coupure irréductible entre Q et R, donc $F(Q)$ est la frontière de la région-composante du complémentaire de $F(Q)$ qui contient R. Voir ma note ***Sur les coupures irréductibles du plan,*** Fund. Math. VI, p. 133

[1]) En vertu du théorème suivant: C étant une frontière commune à deux régions décomposée en tranches (continus) de façon cyclique et P étant une région-complémentaire de C telle que $F(P) \neq C$, $F(P)$ est contenu entièrement dans une seule tranche de C. Voir ma note de ce volume, p. 31.

donc que

(18) $$T_\xi \overline{B} = T_\xi \overline{A}\,\overline{B},$$

quel que soit ξ.

Par hypothèse 3°, p et q se laissent unir par un continu W (ligne brisée) tel que

(19) $$W\overline{A} = 0.$$

Je dis que, pour tout ξ, on a soit $T_\xi \overline{B} = 0$ soit $T_\xi W = 0$. En effet, si $T_\xi \overline{B} \neq 0$, on a selon (18): $T_\xi \overline{A}\,\overline{B} \neq 0$, donc conformément à la définition de la décomposition ΣT_ξ, T_ξ est une composante de $\overline{A}\,\overline{B}S$ et il vient: $T_\xi \subset \overline{A}$, d'où selon (19): $T_\xi W = 0$.

Ainsi, lorsqu'on pose $V = \overline{B}$, on voit que toutes les hypothèses du théor. II (p. 222) sont satisfaites. Il existe donc deux „arcs ouverts" $L_{\alpha\beta}$ et $L_{\gamma\delta}$ entre lesquels $\overline{B} + W$ coupe le plan et qui satisfont aux formules (1) et (2) du même théorème.

L'inégalité $T_\alpha V \neq 0$ équivaut à $T_\alpha \overline{B} \neq 0$ et celle-ci donne, comme nous venons de voir (en posant α à la place de ξ) l'inclusion: $T_\alpha \subset \overline{A}\,\overline{B}$, d'où $T_\alpha \subset \overline{B}$.

Comme évidemment $\overline{L}_{\alpha\beta} . T_\alpha \neq 0$, il vient

(20) $$\overline{L}_{\alpha\beta} . \overline{B} \neq 0.$$

D'autre part, selon la form. (1) du th. II, $L_{\alpha\beta}\overline{B} = 0$; et comme en vertu de (17), $L_{\alpha\beta} . \overline{A} = L_{\alpha\beta} . \overline{B}$, il vient $L_{\alpha\beta} . \overline{A} = 0$, d'où:

(21) $$L_{\alpha\beta} \subset S_0 - \overline{A}.$$

Par conséquent, si l'on désigne $L_{\alpha\beta}$ par X et un point arbitraire de $\overline{L}_{\alpha\beta} . \overline{B}$ par x, la condition (2) du théor. I (p. 217, où l'on remplace S par S_0), est (en vertu de (20) et (21)) réalisée.

Selon (17), on a $x \epsilon \overline{A}$, donc d'après (19), x n'appartient pas à W. On en conclut, en vertu du théor. I, qu'il existe un continu K tel que:

(22) $$KA \neq 0 \neq K . L_{\alpha\beta}$$

(23) $$K\overline{B} = 0 = KW.$$

Les hypothèses sur $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ étant symétriques, il en résulte l'existence d'un continu M tel que:

(24) $$MA \neq 0 \neq M . L_{\gamma\delta}$$

(25) $$M\overline{B} = 0 = MW.$$

Les ensembles A et B étant séparés, on tire des formules (19), (23) et (25) l'égalité:

$$(26) \qquad (K+A+M)(\overline{B}+W)=0.$$

D'autre part, A étant connexe, on conclut des inégalités (22) et (24) qu'il en est de même de $K+A+M$. En vertu des mêmes inégalités, cet ensemble connexe unit $L_{\alpha\beta}$ à $L_{\gamma\delta}$ sans passer par $\overline{B}+W$ (form. (26)). Mais ceci contredit la propriété de $\overline{B}+W$ d'être une coupure du plan entre $L_{\alpha\beta}$ et $L_{\gamma\delta}$.

La contradiction demandée est ainsi établie. On en conclut que la formule (12) est réalisée, c. q. f. d.

Remarques. On voit que la condition 3° est nécessaire pour que le séparateur S soit cyclique, puisque B doit être situé dans une région déterminée sur le plan par S et disjointe de $\overline{A}$.

Quant à la condition 2°, elle ne peut être omise dans l'énoncé du th. V, comme le prouve l'exemple suivant: A se compose des points: $y=\sin\frac{\pi}{x}$, $0<|x|\leqslant 1$ et $x=0$, $0<|y|\leqslant 1$, B est la suite des points $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \ldots$, de l'axe des x.

Il est aussi à remarquer que pour la démonstration du théor. précédent il a été tout à fait essentiel que le séparateur S_0 (qui nous a servi de point de départ) jouisse de la dernière propriété énoncée dans le théor. I.

Considérons, en effet, l'exemple suivant: A est l'intervalle $0<y\leqslant 1$ de l'axe des y, B se compose des points $0<|x|\leqslant\frac{1}{2}$ de l'axe des x, S_0 est la lemniscate $\varrho=\sqrt{\cos 2\Theta}$.

Or, S_0 ne contient aucun séparateur cyclique entre A et B (comme c'était le cas dans notre raisonnement). On voit, en même temps, que S_0 est un séparateur normé entre A et B qui ne satisfait pas à la dernière condition du théor. I; cette condition est donc indépendante des autres.

Corollaire [1]. *C_1 et C_2 étant deux continus bornés tels que 1°: C_1-C_2 est connexe, 2°: C_1C_2 est punctiforme et 3°: C_1 ne coupe le plan entre aucun couple de points de C_2-C_1, il existe une courbe simple fermée qui coupe le plan entre C_1-C_2 et C_2-C_1.*

En tenant compte du cor. 3 (p. 221), on déduit ce corollaire directement du théorème précédent, en posant $A=C_1-C_2$ et $B=C_2-C_1$.

[1]) On rapprochera ce corollaire du théorème 2 de la note de M. R. L. Moore *Concerning the separation of point sets by curves*, Proc. Nat. Ac. Sc. 11, p. 470. Ce théorème, ainsi que sa démonstration, m'ont suggéré le théor. V de cet ouvrage.

§ 3.

Les rapports entre les coupures irréductibles du plan et les continus irréductibles entre deux points.

8. Théorème VI. *A et B étant deux ensembles connexes, bornés et séparés, S leur séparateur normé et a et b deux points de $S\dot{-}\overline{A}\,\overline{B}$, la condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{A}+\overline{B}$ soit une coupure irréductible du plan entre a et b est que les continus $\overline{A}$ et $\overline{B}$ soient irréductibles* [1]) *entre les „arcs"* [2]) *ab et ba du séparateur.*

Démonstration. 1. La condition est nécessaire.

Supposons que $\overline{A}+\overline{B}$ est une coupure entre a et b. On a donc, selon le théorème de réciprocité:

$$(ab).\,\overline{A}\;\overline{B}\neq 0\neq(ba).\,\overline{A}\;\overline{B}.$$

Par conséquent, $\overline{A}$ contient un continu irréductible K entre les arcs ab et ba; on a donc $K=\overline{K-S}$ et

$$(ab).\overline{K-S}\neq 0\neq(ba).\overline{K-S},$$

d'où, en vertu de la normalité de S:

$$(1) \qquad (ab).\overline{K-S}\;\overline{B}\neq 0+(ba).\overline{K-S}\;\overline{B}$$

(puisque $S\overline{A}\subset\overline{B}$ et $\overline{K-S}\subset\overline{A}$).

Or, $K-S$ étant connexe et situé dans la région déterminée par S qui contient A, S est un séparateur entre $K-S$ et B. En appliquant le théorème de réciprocité, où l'on pose $K-S$ à la place de A, on conclut en vertu de (1), que $\overline{K-S}+\overline{B}$ coupe le plan entre a et b.

$\overline{A}+\overline{B}$ étant, par hypothèse, une coupure irréductible entre ces points, il vient $\overline{K-S}+\overline{B}=\overline{A}+\overline{B}$ et comme $\overline{K-S}=K$ et $A\overline{B}=0$ (A et B étant séparés), on en tire $A\subset K$, d'où $\overline{A}\subset K$ et finalement: $\overline{A}=K$, ce qui prouve que $\overline{A}$ est un continu irréductible entre ab et ba.

Il en est de même de $\overline{B}$, en raison de symétrie.

[1]) Pour la définition et les propriétés de cette notion voir la note [1]), p. 224.

[2]) Le séparateur S étant, en vertu du cor. 1, p. 220, cyclique, nous l'imaginons décomposé, comme d'habitude, en composantes de $\overline{A}\,\overline{B}$ et en points individuels de $S-\overline{A}\,\overline{B}$.

2. La condition est suffisante. Supposons que les continus $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont irréductibles entre les arcs ab et ba. On a donc $(ab)\overline{A}\neq 0\neq (ba)\overline{A}$, d'où en vertu de la normalité de S:

(2) $$(ab)\overline{A}\,\overline{B}\neq 0\neq (ba)\overline{A}\,\overline{B}.$$

Cette inégalité implique, conformément au théorème de réciprocité que $\overline{A}+\overline{B}$ est une coupure du plan entre a et b. Elle contient donc[1]) une coupure irréductible I entre ces points. Il s'agit de prouver que

(3) $$\overline{A}+\overline{B}=I.$$

I étant une coupure entre a et b, on a

(4) $$(ab).I\neq 0\neq (ba).I,$$

car autrement, soit ab, soit ba, unirait les points a et b en dehors de I.

La formule (4) implique que I contient un continu irréductible M entre ab et ba. L'ensemble $M-S$ est donc connexe et l'on a:

(5) $$\overline{M-S}=M$$

(6) $$(ab)M\neq 0\neq (ba)M,$$

(7) $$M\subset I\subset \overline{A}+\overline{B},$$

d'où $M-S\subset(\overline{A}+\overline{B})-S(\overline{A}+\overline{B})=(\overline{A}+\overline{B})-\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A}-\overline{B}+\overline{B}-\overline{A}$.

Les ensembles $\overline{A}-\overline{B}$ et $\overline{B}-\overline{A}$ étant séparés, l'ensemble $M-S$, comme connexe, est contenu dans l'un d'eux, soit dans $\overline{A}-\overline{B}$. On a donc $\overline{M-S}\subset\overline{\overline{A}-\overline{B}}\subset\overline{A}$, d'où selon (5), $M\subset\overline{A}$ et $\overline{A}$ étant irréductible entre ab et ba, on en conclut (en tenant compte de (6)) que $M=\overline{A}$.

Il vient, d'après (7):

(8) $$\overline{A}\subset I,$$

d'où $A\subset I$ et $IA=A$. Par conséquent:

$$I=I\overline{A}+I-\overline{A}=\overline{A}+I-\overline{A}=\overline{IA}+\overline{I-\overline{A}}.$$

[1]) d'après un théorème de M. Mazurkiewicz, Fund. Math. I, p. 63.

Les ensembles $IA\,(=A)$ et $I-\overline{A}$ étant connexes[1]) et séparés (puisque $A.\overline{I-\overline{A}}\subset A\overline{B}$ selon (7)), on déduit du théorème de réciprocité (en y substituant IA à la place de A et $I-\overline{A}$ à la place de B) la formule

(9) $$(ab).\overline{I-\overline{A}}\neq 0\neq (ba).\overline{I-\overline{A}}.$$

D'autre part, selon (7): $I-\overline{A}\subset\overline{B}$, d'où $\overline{I-\overline{A}}\subset\overline{B}$ et comme $\overline{I-\overline{A}}$ est un continu (puisque $I-\overline{A}$ est connexe) et $\overline{B}$ est un continu irréductible entre (ab) et (ba), on en conclut (en tenant compte de (9)) que $\overline{I-\overline{A}}=\overline{B}$, d'où

(10) $$\overline{B}\subset I.$$

Les inclusions (7), (8) et (10) donnent l'égalité (3).

Théorème VII.[2]) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu décomposable*[3]) *borné C soit une coupure irréductible entre deux points est qu'on ait:*

(11) $$C=I+K,\quad IK=M+N,$$

(12) $$MN=0,\quad M\neq 0\neq N,$$

où M et N sont deux ensembles fermés et I et K deux continus irréductibles entre M et N.

Démonstration. 1. La condition est nécessaire.

C étant une coupure irréductible entre deux points, décomposable et bornée, il existe deux continus I et K tels que[4])

(13) $$C=I+K,\quad \overline{C-I}=K,\quad \overline{C-K}=I,\quad I\neq C\neq K,$$

[1]) $I-\overline{A}$ est connexe, car $\overline{A}$ est un sous-continu de I, qui est une frontière commune à deux régions (Voir, lemme 1 de ma note citée de Fund. Math. VI, p. 136).

[2]) J'ai signalé ce théorème dans ce volume, p. 22, comme un résultat trouvé par M. Knaster et moi. Indépendemment, le même théorème fut trouvé et démontré par M. W. A. Wilson tout récemment dans Bull. Amer. Math. Soc. 1928, pp. 81—90.

Il est à remarquer que ce théorème permet de caractériser d'une façon *intrinsèque* les coupures irréductibles entre deux points et décomposables, c'est-à-dire: les frontières décomposables communes à deux régions; de là résulte, par ex. leur invariance topologique.

[3]) c'est-à-dire, qui est somme de deux continus différents de lui.

[4]) selon la proposition (η) de ma note de ce volume, p. 25.

et deux régions D et E telles que

$$F(D) = C = F(E). \tag{14}$$

Or, $C-I$ et $C-K$ étant deux ensembles séparés, il existe entre eux un séparateur normé S. On a donc:

$$IK = S(I+K) = SC. \tag{15}$$

Les régions D et E étant des régions intermédiaires entre I et K (d'après les formules (13) et (14)), on a, selon la proposition du N 5, p. 225:

$$SD \neq 0 \neq SE.$$

Comme, en outre, $C-I$ et $C-K$ sont connexes [1]), on peut supposer, conformément au cor. 1, p. 220, que S est cyclique. Soient: $a \in SD$ et $b \in SE$. Le continu C est donc, selon (14), une coupure irréductible entre a et b.

On en conclut, en vertu du théorème précédent, que $\overline{C-I}$ et $\overline{C-K}$ sont des continus irréductibles entre les arcs ab et ba de S, donc entre $(ab).C$ et $(ba).C$. En posant $(ab).C = M$ et $(ba).C = N$, on déduit de (14) et (15) les formules (11) et (12) [2]).

[1]) d'après le théorème cité, p. 235, note [1]).

[2]) Cette partie de notre théorème établie, il en résulte, en vertu de la proposition **B** publiée dans ce volume p. 27, que la décomposition d'une frontière commune à deux régions et non-monostratique en „tranches fondamentales" est cyclique. Ce théorème, que j'ai appelé théorème fondamental (ce volume p. 29), fut prouvé à l'aide d'un lemme que M. Knaster avait démontré en se servant des lignes brisées. On voit ainsi qu'on peut éviter l'emploi des lignes brisées pour prouver ce théorème.

Il en est de même du théorème suivant, que j'ai démontré dans la même note en me servant aussi des lignes brisées (p. 36): *une frontière commune à trois régions est, soit indécomposable, soit somme de deux continus indécomposables.*

Soit, en effet, C une frontière décomposable commune à trois régions: D, E et G. Considérons la décomposition (13) et soit S le séparateur normé et cyclique des ensembles connexes $C-I$ et $C-K$. Comme auparavant, on prouve l'existence de trois points: $a \in SD$, $b \in SE$, $c \in SG$. On peut supposer que $a \prec b \prec c$. Soient: $a_1 \in (ab).C$, $b_1 \in (bc).C$, $c_1 \in (ca).C$. Le continu C étant une coupure irréductible entre les couples (a, b), (b, c), (c, a), on conclut en vertu de la partie du théor. VII déjà démontrée, que I est un continu irréductible entre les couples (a_1, b_1), (b_1, c_1) et (c_1, a_1), donc que I est indécomposable.

Il en est de même de K, c. q. f. d.

2. La condition est suffisante. I et K étant deux continus irréductibles entre M et N, les ensembles $C-I$ et $C-K$, comme égaux à $K-I.K$ et $I-K.I$ resp., sont connexes [1]), séparés et les formules (13) sont réalisées.

Soit S le séparateur normé et cyclique des ensembles $C-I$ et $C-K$. La formule (15) est donc remplie.

Décomposons (comme d'habitude) le séparateur S en composantes de l'ensemble IK (donc en composantes de M et de N) et en points individuels de $S-IK$. Soit $L_{\gamma\delta}$ un „arc contigu" à M et contenant des points de N; en symboles:

$$L_{\gamma\delta}.M = 0, \quad L_{\gamma\delta}.N \neq 0, \quad T_\gamma + T_\delta \subset M. \tag{16}$$

Soient L_{ν_1} et L_{ν_2} la première et la dernière tranches de l'ensemble $L_{\gamma\delta}.N$. On a donc

$$\gamma \prec \nu_1 \preceq \nu_2 \prec \delta \prec \gamma \tag{17}$$

$$L_{\gamma\nu_1}.N = 0 = L_{\nu_2\delta}.N, \quad T_{\nu_1} + T_{\nu_2} \subset N. \tag{18}$$

Je vais prouver que le continu I est irréductible entre les arcs fermés $L_{\overline{\nu_1\nu_2}}$ et $L_{\overline{\delta\gamma}}$.

Supposons, par contre, que Z est un continu tel que:

$$Z \subset I, \quad Z \neq I, \tag{19}$$

$$L_{\overline{\delta\gamma}}.Z \neq 0 \neq L_{\overline{\nu_1\nu_2}}.Z. \tag{20}$$

Il existe donc deux indices α et β tels que:

$$T_\alpha Z \neq 0 \neq T_\beta Z, \tag{21}$$

$$\delta \preceq \alpha \preceq \gamma, \quad \nu_1 \preceq \beta \preceq \nu_2, \tag{22}$$

d'où selon (17):

$$\alpha \preceq \gamma \prec \beta \prec \delta \preceq \alpha. \tag{23}$$

En vertu de (19), (15) et (11), on a

$$T_\beta Z = T_\beta Z I = T_\beta Z I K = T_\beta Z M + T_\beta Z N. \tag{24}$$

[1]) en vertu des propriétés des continus irréductibles, citées p. 224, note [1]).

Comme, d'autre part, les formules (23) et (16) entraînent: $T_\beta M=0$, il vient, d'après (21) et (24):

$$ZN \neq 0. \tag{25}$$

On en conclut, en raison de (19) et en tenant compte de l'irréductibilité de I entre M et N, que $ZM=0$. Donc, selon (16):

$$ZT_\gamma = 0 = ZT_\delta. \tag{26}$$

Désignons par W le continu qui s'obtient de Z en l'augmentant de toutes les tranches T_ξ tels que $Z \cdot T_\xi \neq 0$.

Par définition de la décomposition ΣT_ξ, on a $W \subset I$ et il vient, suivant (21) et (26):

$$WT_\alpha \neq 0 \neq WT_\beta, \quad WT_\gamma = 0 = WT_\delta, \quad \text{d'où } \gamma \neq \alpha \neq \delta. \tag{27}$$

Or, en substituant dans le cor. 3, p. 224, W à la place de C et en désignant par P la région déterminée par S qui contient $I-K$, on en conclut de (23) et (27) que $\overline{P}-W$ se décompose en deux ensembles séparés G et H de sorte que:

$$\overline{P}-W = G+H, \quad T_\gamma \subset G, \quad T_\delta \subset H. \tag{28}$$

Par conséquent, $I-W=IG+IH$ et les ensembles IG et IH sont séparés. En outre, il ne sont pas vides, car en vertu de (16) et (28): $T_\gamma \subset IG$ et $T_\delta \subset IH$. On en conclut [1]) que $W+IG$ est un **vrai** sous-continu de I, donc, I étant irréductible entre M et N, on tire de l'inégalité $(W+IG)N \neq 0$ qui résulte de (25):

$$(W+IG)M=0, \quad \text{d'où} \quad IGM = GM = 0,$$

ce qui contredit les formules (16) et (28), qui donnent $T_\gamma \subset GM$.

Cette contradiction prouve que I est irréductible entre $L_{\overline{\nu_1\nu_2}}$ et $L_{\overline{\delta\gamma}}$.

Or, soient: $a \in L_{\gamma\nu_1}$ et $b \in L_{\nu_2\delta}$. En vertu de (16) et (18), a et b sont deux points de $S-IK$, puisque

$$(L_{\gamma\nu_1}+L_{\nu_2\delta})(M+N)=0, \quad \text{d'où} \quad (L_{\gamma\nu_1}+L_{\nu_2\delta}) \cdot IK = 0. \tag{29}$$

[1]) en vertu de ce théorème: si W est un sous-continu d'un continu I et si $I-W=X+Y$, deux ensembles séparés, $W+X$ est un continu. Voir la note de M. **Knaster** et moi de Fund. Math. II, théor. VI.

La formule (29) donne en vertu de (15):

$$(L_{\gamma\nu_1}+L_{\nu_2\delta})I=0;$$

la propriété de I d'être irréductible entre $L_{\overline{\nu_1\nu_2}}$ et $L_{\overline{\delta\gamma}}$ équivaut donc à celle d'être irréductible entre les arcs ab est ba du séparateur. K est irréductible entre les mêmes arcs, en raison de symétrie. En appliquant le théorème VI, on en conclut que le continu $C=I+K$ est une coupure irréductible du plan entre a et b.