1) *Si* $E \in F$, *on a* $E \in K$,

2) *Si* $E_n \in K$, *pour* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *et* $E_m E_n = 0$ *pour* $m \neq n$, *on a* $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots \in K$.

3) *Si* $E_1 \in K$, $E_2 \in K$ *et* $E_2 \subset E_1$, *on a* $E_1 - E_2 \in K$.

Thèse: *La classe* $K = K_0$ *jouit de la propriété suivante*:

4) *Si* $E_1 \in K$ *et* $E_2 \in K$, *on a* $E_1 - E_2 \in K$.

Démonstration.

Lemme. Si $H_1 \in F$ et $E \in K_0$, on a $H_1 E \in K_0$.

Soit, en effet, $H_1$ un ensemble donné de $K_0$ et désignons par $K_1$ la classe de tous les ensembles $E$, tels que

$$E \in K_0 \quad \text{et} \quad H_1 E \in K_0.$$

D'après les propriétés des classes $F$ et $K_0$ on vérifie sans peine que la classe $K_1$ satisfait aux conditions 1), 2) et 3), ce qui donne (vu la définition de $K_0$): $K_0 \subset K_1$. Donc, si $E \in K_0$, on a $E \in K_1$, donc $H_1 E \in K_0$, c. q. f. d.

Soient maintenant $P_1$ et $P_2$ deux ensembles donnés de $K_0$. Désignons par $K_2$ la classe de tous les ensembles $E$, tels que

$$E \in K_0 \quad \text{et} \quad P_1 E \in K_0.$$

D'après notre lemme on voit que la classe $K = K_2$ jouit de la propriété 1). Or, il résulte sans peine des propriétés de la classe $K_0$ que la classe $K = K_2$ jouit aussi des propriétés 2) et 3). On a donc $K_0 \subset K_2$, donc, d'après $P_2 \in K_0$, on trouve $P_2 \in K_2$, c'est-à-dire $P_1 P_2 \in K_0$. La propriété 4) de la classe $K_0$ est ainsi établie.

Des propriétés 2) et 4) résultent encore tout tout de suite les propriétés $4^0$ et $6^0$.

Voici une application du théorème démontré. Soit $F$ la famille de tous les intervalles (pouvant se réduire aux points), $K$ — la classe de tous les ensembles qu'on obtient en partant des intervalles et en effectuant (dans un ordre quelconque) un nombre fini ou une infinité dénombrable de fois l'addition des ensembles disjoints deux à deux ou la soustraction d'un sous-ensemble d'un ensemble. De notre théorème résulte tout de suite que la classe $K$ coïncide avec la classe de tous les ensembles qu'on obtient en partant des intervalles et en effectuant (dans un ordre quelconque) un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions, de soustractions ou de multiplications des ensembles [1].

[1]) Cf. ma note „*Sur une classification des ensembles mesurables (B)*", Fund. Math. t. X, p. 320–327.

---

# Sur les images continus et biunivoques des complémentaires analytiques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Mazurkiewicz a démontré [1]) que tout ensemble (linéaire) qui est une différence de deux ensembles $(A)$ est l'image biunivoque et continue (dans un sens) d'un ensemble $C(A)$. Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante, qui constitue une extension du théorème de M. Mazurkiewicz:

**Théorème:** *Tout ensemble (linéaire) qu'on obtient, en effectuant un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions, de soustractions et de multiplications d'ensembles (dans un ordre quelconque) à partir des ensembles* $(A)$ *est l'image biunivoque et continue (dans un sens) d'un ensemble* $C(A)$ *linéaire.*

Démonstration. Désignons par $K_1$ la classe de tous les ensembles linéaires qui sont des images biunivoques et continues dans un sens des ensembles $C(A)$ (linéaires). D'après le résultant cité de M. Mazurkiewicz, la classe $K_1$ jouit de deux propriétés suivantes:

1) Tout ensemble $(A)$ linéaire appartient à $K_1$.

2) Tout ensemble $C(A)$ linéaire appartiennt à $K_1$.

Nous prouverons maintenant les deux propriétés suivantes de la classe $K_1$:

3) Si les ensembles disjoints $E_1, E_2, E_3, \ldots$ appartienent à $K_1$, leurs somme $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ appartient à $K_1$.

4) Si les ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ appartiennent à $K_1$, leur produit $E_1 E_2 E_3 \ldots$ appartient à $K_1$.

[1]) *Fund. Math.* t. X, p. 172–174.

Pour prouver la propriété 3) observons d'abord que tout ensemble de la classe $K_1$ est une image biunivoque et continue dans un sens d'un ensemble $C(A)$ intérieur à un intervalle: pour le voir il suffit de remarquer que l'ensemble de tous les nombres réels est homéomorphe à l'ensemble de tous les nombres intérieurs à un intervalle et qu'un ensemble homéomorphe à un $C(A)$ est un $C(A)$. Donc, si $E=E_1+E_2+E_3+\dots$ est une somme disjointe d'ensembles $E_n$ appartenant à la classe $K_1$ (pour $n=1,2,3,\dots$), il existe, pour tout indice $n$, un ensemble $H_n$ qui est un $C(A)$ situé à l'intérieur de l'intervalle $(n-1,n)$ et tel que $E_n$ est une image biunivoque et continue dans un sens de $H_n$. La somme $E=E_1+E_2+E_3+\dots$ étant disjointe, il en résulte tout de suite que $E$ est une image continue et biunivoque de l'ensemble $H=H_1+H_2+H_3+\dots$ qui est un $C(A)$ (en tant qu'une somme d'une infinité d'ensembles $C(A)$). Donc, $E$ appartient à la classe $K_1$, c. q. f. d.

Pour prouver la propriété 4) de la classe $K_1$, il suffit de modifier un peu la démonstration que j'ai donnée pour le théorème qu'un produit d'une infinité dénombrable des images continues des ensembles $C(A)$ est un ensemble $C(A)$ [1].

Soient $E_n$ $(n=1,2,3,\dots)$ des ensembles de la classe $K_1$ et posons $E=E_1E_2E_3\dots$ Soit $n$ un indice donné. $E_n$ appartenant à $K_1$, il existe, comme nous savons, un ensemble $P_n$ qui est un $C(A)$, intérieur à l'intervalle $(0,1)$ et dont $E_n$ est une image continue et biunivoque. Désignons par $Q_n$ l'ensemble de tous les nombres (irrationnels) $x$, tels que $x-\sqrt{2}$ est un nombre rationnel appartenant à $P_n$. Les ensembles $Q_n$ et $R_n$ seront évidemment des ensembles $C(A)$, donc aussi l'ensemble de nombres irrationnels $X_n=Q_n+R_n$, et $P_n$ sera une image continue et biunivoque de $X_n$. Donc $E_n$ (comme image continue et biunivoque de $P_n$) sera une image continue et biunivoque de l'ensemble de nombres irrationnels $X_n$, soit $E_n=f_n(X_n)$. On a donc les formules (1) de la note citée (*Fund. Math.* t. XI, p. 124). En conservant les notations de cette Note, on aura donc les formules (4) et (5), donc les formules

$$\text{(I)} \qquad f_n(\varphi_n(X_0))=E, \text{ pour } n=1,2,3,\dots,$$

d'où il résulte que l'ensemble $E$ est une image continue d'un ensemble $C(A)$, $X_0$.

[1]) *Fund. Math.* t. XI, p. 123—125. Cf. aussi: N. Lusin, *Fund. Math.* t. X, p. 48.



Or, soient $x'$ et $x''$ deux nombres différents de $X_0$. Les développements en fractions continues des nombres (irrationnels) $x'$ et $x''$ sont donc distincts, p. e. dans ses $m$-ièmes quotients. Soit $m=2^{p-1}(2q-1)$: on a donc (vu la définition de la fonction $\varphi_p(x)$:

$$\text{(II)} \qquad \varphi_p(x')\neq\varphi_p(x'')$$

(piusque les fractions continues $\varphi_p(x')$ et $\varphi_p(x'')$ diffèrent dans les $q$-ièmes quotients). Or, la fonction $f_p(x)$ est biunivoque dans $X_p$, donc, à plus forte raison, dans $\varphi_p(X_0)$, puisque $X_p=\varphi_p(N_p)$ et $N_p\supset N_0\supset X_0$. L'inégalité (II) donne donc

$$f_p(\varphi_p(x'))\neq f_p(\varphi_p(x''))$$

(puisque, d'après $x'\in X_0$, $x''\in X_0$, on a $\varphi_p(x')\in\varphi_p(X_0)$ et $\varphi_p(x'')\in\varphi(X_0)$. La fonction $F(x)=f_p(\varphi_p(x))$ est donc biunivoque dans $X_0$ et la formule (I) prouve que $E$ est une image biunivoque de l'ensemble $X_0$.

L'ensemble $E$ appartient donc à $K_1$ et la propriété 4) de la classe $K_1$ est établie.

La classe $K=K_1$ satisfait donc aux conditions 1⁰, 2⁰, 3⁰ et 4⁰ de ma Note „*Un théorème général sur les familles d'ensembles*" [1]), si l'on entend par $F$ la famille de tous les ensembles $(A)$ (linéaires).

Désignons par $K_0$ la plus petite classe d'ensembles satisfaisant aux conditions 1⁰ à 4⁰: nous aurons donc $K_0\subset K_1$. Or, d'après le théorème de la note citée tout à l'heure, la classe $K_0$ jouit encore des propriétés

6⁰. Si $E\in K_0$, pour $n=1,2,3,\dots$, on a $E_1+E_2+E_3+\dots\in K_0$, et

7⁰. Si $E_1\in K_0$ et $E_2\in K_0$, on a $E_1-E_2\in K_0$,

d'où on conclut sans peine (d'après 1⁰ et 3⁰) que $K_0$ est la classe d'ensembles qui s'obtient, en partant des ensembles $(A)$ et en effectuant (dans un ordre quelconque) un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions, de soustractions et de multiplication d'ensembles. Comme $K_0\subset K_1$, la définition de $K_1$ implique que tout ensemble de la classe $K_0$ est l'image continue et biunivoque d'un ensemble $C(A)$. Notre théorème est ainsi démontré.

[1]) ce volume . 206.