Un théorème général sur les familles d'ensembles.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de démontrer un théorème concernant les familles quelconques d'ensembles qui est utile dans quelques recherches spéciales (étude des classifications d'ensembles mesurables B, théorie des ensembles projectifs [1])).

Théorème. *Soit W un ensemble donné, dont les éléments sont des objets de nature quelconque, et soit F une famille donnée quelconque de sous-ensembles de W. Soit K_0 la plus petite classe K d'ensembles jouissant des 4 propriétés suivantes:*

1°. *Si $E \epsilon F$, on a $E \epsilon K$.*

2°. *Si $E \epsilon F$, on a $CE \epsilon K$,* où CE désigne l'ensemble $W - E$.

3°. *Si $E_n \epsilon K$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, et si $E_m E_n = 0$ pour $m \neq n$, on a: $E_1 + E_2 + E_3 + \dots \epsilon K$.*

4°. *Si $E_n \epsilon K$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on a: $E_1 E_2 E_3 \dots \epsilon K$* [2]).

Thèse: *La classe $K = K_0$ jouit des propriétés suivantes:*

5°. *Si $E \epsilon K$, on a $CE \epsilon K$,*

6°. *Si $E_n \epsilon K$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on a $E_1 + E_2 + E_3 + \dots \epsilon K$.*

Démonstration. Désignons par K_1 la classe de tous les ensembles E, tels que

$$E \epsilon K_0 \quad \text{et} \quad CE \epsilon K_0.$$

Lemme I. Si $E \epsilon F$, on a $E \epsilon K_1$.

[1]) Voir ce volume, p. 213.

[2]) On voit sans peine qu'une telle classe K_0 existe toujours, et qu'elle est le produit (partie commune) de toutes les classes K (de sous-ensembles de W) satisfaisant aux conditions 1° à 4°.

En effet, si $E \epsilon F$, on a, d'après les propriétés 1° et 2° (de la classe $K = K_0$)

$$(1) \qquad E \epsilon K_0 \quad \text{et} \quad CE \epsilon K_0,$$

ce qui prouve (vu la définition de la classe K_1) que $E \epsilon K_1$, c. q. f. d.

Lemme II. Si $E \epsilon F$, on a $CE \epsilon K_1$.

En effet, si $E \epsilon F$, on a les formules (1), c'est-à-dire (d'après $CCE = E$):

$$CE \epsilon K_0 \quad \text{et} \quad CCE \epsilon K_0,$$

ce qui prouve (vu la définition de K_1) que $CE \epsilon K_1$, c. q. f. d.

Lemme III. Si $E_n \epsilon K_1$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, et $E_m E_n = 0$ pour $m \neq n$, on a $E_1 + E_2 + E_3 + \dots \epsilon K_1$.

En effet, de $E_n \epsilon K_1$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$ et de la définition de la classe K_1 résulte que

$$(2) \qquad E_n \epsilon K_0, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$(3) \qquad CE_n \epsilon K_0, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Or, de (2) et de $E_m E_n \neq 0$, pour $m \neq n$, résulte, d'après la propriété 3° (de la classe $K = K_0$) que

$$(4) \qquad E_1 + E_2 + E_3 + \dots \epsilon K_0.$$

D'autre part, de (3) et de la propriété 4° (de $K = K_0$) résulte que

$$(5) \qquad C(E_1 + E_2 + E_3 + \dots) = CE_1\, CE_2\, CE_3 \dots \epsilon K_0,$$

et les formules (4) et (5) prouvent que $E_1 + E_2 + E_3 + \dots \epsilon K_1$, c. q. f. d.

Lemme IV. Si $E_n \epsilon K_1$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$, on a $E_1 E_2 E_3 \dots \epsilon K_1$.

Supposons, en effet, qu'on a $E_n \epsilon K_1$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$: il en résulte, d'après la définition de le classe K_1:

$$(6) \qquad E_n \epsilon K_0, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$(7) \qquad CE_n \epsilon K_0, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

D'après (6) et 4° (pour $K = K_0$) on a

$$(8) \qquad E_1 E_2 E_3 \dots \epsilon K_0.$$

Or, on a évidemment

(9) $$C(E_1 E_2 E_3 \ldots) = CE_1 + E_1 CE_2 + E_1 E_2 CE_3 + \ldots + E_1 E_2 \ldots E_{n-1} CE_n + \ldots,$$

où les ensembles

(10) $$H_1 = CE_1 \quad \text{et} \quad H_n = E_1 E_2 \ldots E_{n-1} CE_n \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

satisfont à la condition

(11) $$H_m H_n = 0, \quad \text{pour} \quad m \neq n.$$

De (6), (7) et (10) résulte, d'après 4° (pour $K = K_0$) que

(12) $$H_n \in K_0, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

et de (12), (11) et 3° (pour $K = K_0$) résulte que

$$H_1 + H_2 + H_3 + \ldots \in K_0,$$

donc, d'après (10) et (9), que

(13) $$C(E_1 E_2 E_3 \ldots) \in K_0.$$

Les formules (8) et (13) prouvent que $E_1 E_2 E_3 \ldots \in K_1$, c. q. f. d.

Les lemmes I à IV prouvent que la classe $K = K_1$ jouit des propriétés 1° à 4°; K_0 étant la plus petite classe K jouissant de ces propriétés, il en résulte que

$$K_0 \subset K_1.$$

Donc, si $E \in K_0$, on a $E \in K_1$, donc (vu la définition de K_1) $CE \in K_0$. La propriété 5° de la classe $K = K_0$ est ainsi établie.

Pour prouver la propriété 6° de la classe $K = K_0$, il suffit de remarquer que si $E_n \in K_0$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a, d'après 5°, $CE_n \in K_0$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, donc d'après 4° (pour $K = K_0$):

$$C(E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) = CE_1 CE_2 CE_3 \ldots \in K_0,$$

ce qui donne, d'après 5°:

$$E_1 + E_2 + E_3 + \ldots = CC(E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) \in K_0, \quad \text{c. q. f. d.}$$

De 5° et 4° (pour $K = K_0$) et de la formule $E_1 - E_2 = E_1 CE_2$ résulte aussi tout de suite pour $K = K_0$ la propriété

7°. Si $E_1 \in K$ et $E_2 \in K$, on a $E_1 - E_2 \in K$.

Notre théorème est démontré.

Il est à remarquer que si l'on admet seulement qu'une classe K

d'ensembles jouit des propriétés 1° à 4° (sans être irréductible par rapport à ces propriétés), on ne peut pas en déduire qu'elle jouit des propriétés 5° ou 6°.

En effet, soit W un ensemble formé de deux éléments distincts, a et b, F — la famille formée d'un seul ensemble (a, b), K — la classe formée de 3 ensembles (dont le premier est vide [1]):

$$0, (a) \quad \text{et} \quad (a, b).$$

On vérifie sans peine que la classe K satisfait aux conditions 1° à 4° et à la condition 6°, mais qu'elle ne satisfait pas à la condition 5°, puisque l'ensemble (b) est complémentaire (dans W) de l'ensemble (a) de K, mais n'appartient pas à K.

On pourrait aussi donner sans peine un exemple d'une classe K satisfaisant aux conditions 1° à 4°, mais ne satisfaisant pas à la condition 6° (donc, non plus à la condition 5°, puisque 6° résulte de 4° et 5°). En effet, soit W un ensemble formé de 4 éléments distincts a, b, c, d, F — la famille formée d'un seul ensemble (a, b, c, d), K — la classe formée de 5 ensembles

$$0, (b), (b, c), (b, d), (a, b, c, d).$$

On vérifie sans peine que la classe K satisfait aux conditions 1° à 4°, mais qu'elle ne satisfait pas à la condition 6°, puisque l'ensemble (b, c, d) est une somme de deux ensembles de K, (b, c) et (b, d), mais n'appartient pas à K.

Voici encore un théorème connexe qu'on obtient en modifiant un peu la démonstration du théorème que j'ai prouvé dans ma note „*Les ensembles boreliens abstraits*" [2]).

Soit F une famille donnée quelconque d'ensembles, et soit K la plus petite classe d'ensembles jouissant des propriétes 3° et 4° et de la propriété

8° Si $E_1 \in F$ et $E_2 \in F$, on a $E_1 - E_2 \in K$.

Thèse: La classe K jouit de la propriété 7°.

Dans le même ordre d'idées nous démontrerons encore le théorème suivant.

Soit F une famille donnée quelconque d'ensembles, telle que, si $E_1 \in F$ et $E_2 \in F$, on a $E_1 E_2 \in F$. Soit K_0 la plus petite classe K d'ensembles jouissant de trois propriétés suivantes:

[1]) Il résulte sans peine de 1°, 2° et 4° que (si $F \neq 0$) la classe K contient toujours l'ensemble vide.

[2]) *Annales de la Soc. Polonaise de Math.* Th. VI, 1927, p. 50—52.

Les modifications consistent en ce qu'on désigne (v. p. 51 de la note citée) par $\mathcal{K}_1$ la classe de tous les ensembles E, tels que $E \in B(\mathcal{F})$ et $E_1 - E \in B(\mathcal{F})$ et qu'on remplace l'expression pour $E_1 - H_1 H_2 H_3 \ldots$ par la somme disjointe

$$(E_1 - H_1) + H_1(E_1 - H_2) + H_1 H_2 (E_1 - H_3) + \ldots$$

D'autres modifications nécessaires sont évidentes.

1) *Si $E \varepsilon F$, on a $E \varepsilon K$,*

2) *Si $E_n \varepsilon K$, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, et $E_m E_n = 0$ pour $m \neq n$, on a $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots \varepsilon K$.*

3) *Si $E_1 \varepsilon K$, $E_2 \varepsilon K$ et $E_2 \subset E_1$, on a $E_1 - E_2 \varepsilon K$.*

Thèse: *La classe $K = K_0$ jouit de la propriété suivante:*

4) *Si $E_1 \varepsilon K$ et $E_2 \varepsilon K$, on a $E_1 - E_2 \varepsilon K$.*

Démonstration.

Lemme. Si $H_1 \varepsilon F$ et $E \varepsilon K_0$, on a $H_1 E \varepsilon K_0$.

Soit, en effet, H_1 un ensemble donné de K_0 et désignons par K_1 la classe de tous les ensembles E, tels que

$$E \varepsilon K_0 \quad \text{et} \quad H_1 E \varepsilon K_0.$$

D'après les propriétés des classes F et K_0 on vérifie sans peine que la classe K_1 satisfait aux conditions 1), 2) et 3), ce qui donne (vu la définition de K_0): $K_0 \subset K_1$. Donc, si $E \varepsilon K_0$, on a $E \varepsilon K_1$, donc $H_1 E \varepsilon K_0$, c. q. f. d.

Soient maintenant P_1 et P_2 deux ensembles donnés de K_0. Désignons par K_2 la classe de tous les ensembles E, tels que

$$E \varepsilon K_0 \quad \text{et} \quad P_1 E \varepsilon K_0.$$

D'après notre lemme on voit que la classe $K = K_2$ jouit de la propriété 1). Or, il résulte sans peine des propriétés de la classe K_0 que la classe $K = K_2$ jouit aussi des propriétés 2) et 3). On a donc $K_0 \subset K_2$, donc, d'après $P_2 \varepsilon K_0$, on trouve $P_2 \varepsilon K_2$, c'est-à-dire $P_1 P_2 \varepsilon K_0$. La propriété 4) de la classe K_0 est ainsi établie.

Des propriétés 2) et 4) résultent encore tout tout de suite les propriétés 4° et 6°.

Voici une application du théorème démontré. Soit F la famille de tous les intervalles (pouvant se réduire aux points), K — la classe de tous les ensembles qu'on obtient en partant des intervalles et en effectuant (dans un ordre quelconque) un nombre fini ou une infinité dénombrable de fois l'addition des ensembles disjoints deux à deux ou la soustraction d'un sous-ensemble d'un ensemble. De notre théorème résulte tout de suite que la classe K coïncide avec la classe de tous les ensembles qu'on obtient en partant des intervalles et en effectuant (dans un ordre quelconque) un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions, de soustractions ou de multiplications des ensembles [1]).

[1]) Cf. ma note „*Sur une classification des ensembles mesurables (B)*", Fund. Math. t. X, p. 320–327.

Sur les images continus et biunivoques des complémentaires analytiques.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

M. Mazurkiewicz a démontré [1]) que tout ensemble (linéaire) qui est une différence de deux ensembles (A) est l'image biunivoque et continue (dans un sens) d'un ensemble $C(A)$. Le but de cette Note est de démontrer la proposition suivante, qui constitue une extension du théorème de M. Mazurkiewicz:

Théorème: *Tout ensemble (linéaire) qu'on obtient, en effectuant un nombre fini ou une infinité dénombrable d'additions, de soustractions et de multiplications d'ensembles (dans un ordre quelconque) à partir des ensembles (A) est l'image biunivoque et continue (dans un sens) d'un ensemble $C(A)$ linéaire.*

Démonstration. Désignons par K_1 la classe de tous les ensembles linéaires qui sont des images biunivoques et continues dans un sens des ensembles $C(A)$ (linéaires). D'après le résultant cité de M. Mazurkiewicz, la classe K_1 jouit de deux propriétés suivantes:

1) Tout ensemble (A) linéaire appartient à K_1.

2) Tout ensemble $C(A)$ linéaire appartiennt à K_1.

Nous prouverons maintenant les deux propriétés suivantes de la classe K_1:

3) Si les ensembles disjoints $E_1, E_2, E_3, \ldots$ appartienent à K_1: leurs somme $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ appartient à K_1.

4) Si les ensembles $E_1, E_2, E_3, \ldots$ appartiennent à K_1, leur produit $E_1 E_2 E_3 \ldots$ appartient à K_1.

[1]) *Fund. Math.* t. X, p. 172–174.