Sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints.

Par

Alfred Tarski (Varsovie).

Dans son article *„Sur une décomposition d'ensembles"* [1]) M. Sierpiński a introduit la notion *d'ensembles presque disjoints* et établi le théorème, d'après lequel tout ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ est décomposable en une classe de puissance supérieure à $\mathfrak{m}$ d'ensembles presque disjoints.

Le but de cette Note est de démontrer, dans le même ordre d'idées, quelques théorèmes ultérieurs, dont les plus intéressants semblent être les th. 14, 21 et 25. Dans mes considérations l'axiome du choix de M. Zermelo jouera un rôle essentiel; je me servirai en particulier du théorème sur le bon ordre (*Wohlordnungssatz*), qui en est la conséquence et d'après lequel tout nombre cardinal infini est un aleph.

J'admets la définition suivante due à M. Sierpiński:

Définition 1. *Les ensembles M et N sont dits presque disjoints lorsqu'on a simultanément*:

$$\overline{\overline{M.N}} < \overline{\overline{M}} \quad et \quad \overline{\overline{M.N}} < \overline{\overline{N}}$$ [2]).

Dans des cas où les ensembles différents formant une classe $\boldsymbol{K}$ sont presque disjoints deux à deux, nous emploierons des expressions telles comme p. ex.: „la classe $\boldsymbol{K}$ est une classe d'ensembles presque disjoints", „la classe $\boldsymbol{K}$ se compose d'ensembles presque disjoints" etc.

[1]) Monatshefte für Math. und Phys., 1928. La connaissance de cet article de M. Sierpiński n'est pas nécessaire pour comprendre les raisonnements qui vont suivre.

[2]) Le signe „$\overline{\overline{M}}$" dénote, comme d'habitude, la puissance de l'ensemble M.

J'introduis en outre la notion de *degré de disjonction* d'une classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles.

Définition 2. *Le degré de disjonction d'une classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles, en symboles $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K})$, est le plus petit des nombres cardinaux $\mathfrak{p}$ tels que l'on a $\overline{\overline{X.Y}} < \mathfrak{p}$ pour tous deux ensembles différents X et Y de la classe $\boldsymbol{K}$.*

Il résulte facilement du théorème du bon ordre que pour toute classe d'ensembles un tel nombre existe et qu'il est unique. Si la classe $\boldsymbol{K}$ est vide ou composée d'un seul ensemble, on a $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) = 0$; si $\boldsymbol{K}$ est une classe d'ensembles disjoints (composée d'au moins deux ensembles différents), on a $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) = 1$; de même la formule $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leq \aleph_0$, resp. $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leq \aleph_1$, désigne que les ensembles différents, qui forment la classe $\boldsymbol{K}$, ont deux à deux un nombre fini, resp. tout au plus une infinité dénombrable, d'éléments communs.

Ceci dit, passons aux théorèmes.

Théorème 1. *Si un ensemble infini M de puissance $\mathfrak{m}$ se laisse décomposer en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ de puissance $\mathfrak{n}$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leq \mathfrak{p}$, alors on a $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$* [1]).

Démonstration. On peut se borner évidemment, sans compromettre la généralité du raisonnement, au cas où $\boldsymbol{K}$ est une classe d'ensembles non vides.

A tout ensemble X de puissance $\geq \mathfrak{p}$ appartenant à la classe $\boldsymbol{K}$ faisons correspondre à l'aide de l'axiome du choix un sous-ensemble $F(X)$ de puissance $\mathfrak{p}$. En vertu de la déf. 2, on déduit facilement de la formule $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leq \mathfrak{p}$ que cette correspondance est biunivoque. Il en résulte aussitôt que la classe $\boldsymbol{L}$ composée de tous les ensembles $F(X)$ où $\overline{\overline{X}} \geq \mathfrak{p}$ et $X \in \boldsymbol{K}$ ainsi que de tous les ensembles X de puissance $< \mathfrak{p}$ qui appartiennent à $\boldsymbol{K}$ est de puissance égale à celle de $\boldsymbol{K}$. On a donc:

$$\overline{\overline{\boldsymbol{L}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{K}}} = \mathfrak{n}. \tag{1}$$

[1]) Je me borne dans cette Note à n'étudier que les décompositions des ensembles infinis, sans chercher d'étendre les théorèmes aux ensembles finis, même dans les cas où cette extension est presque immédiate, comme celle du th. 1. Le problème de la décomposition des ensembles finis en ensembles presque disjoints fait l'objet de l'article de M. E. Sterner, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Zeitschr. 27, 1928, p. 544—584.

„$\boldsymbol{N}$" désignant la classe de tous les sous-ensembles non vides X de M assujettis à la condition $\overline{\overline{X}} \leq \mathfrak{p}$, on a:

(2) $$\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{N}.$$

D'autre part, la définition des puissances de nombres cardinaux nous donne sans peine une décomposition d'un ensemble arbitraire de puissance $(\overline{\overline{M}})^{\mathfrak{p}}$ en une classe d'ensembles non vides et disjoints qui est de puissance égale à celle de la classe $\boldsymbol{N}$. On en conclut en vertu de l'axiome du choix que

(3) $$\overline{\overline{\boldsymbol{N}}} \leq (\overline{\overline{M}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}.$$

Or, les formules (1)–(3) impliquent aussitôt que

$$\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Le théorème qui vient d'être démontré peut être énoncé d'une façon plus courte:

Toute classe $\boldsymbol{K}$ d'ensembles vérifie la formule: $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}} \leq [\overline{\overline{\Sigma(\boldsymbol{K})}}]^{\mathfrak{d}(\boldsymbol{K})}$ (pour $\Sigma(\boldsymbol{K})$ infini) [1].

Corollaire 2. *Si un ensemble infini M de puissance $\mathfrak{m}$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $\mathfrak{n}$ composée d'ensembles de puissance $\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leq \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$, alors on a $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$.*

Démonstration. Il est facile de constater que $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m} \leq \mathfrak{n} . \mathfrak{p}$ (l'égalité $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} . \mathfrak{p}$ ayant lieu certainement, lorsque $\boldsymbol{K}$ est une classe d'ensembles disjoints). Il en résulte que l'inégalité $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$ ne peut se présenter, car l'hypothèse $\mathfrak{m} > \mathfrak{p}$ donnerait alors $\mathfrak{m} > \mathfrak{n} . \mathfrak{p}$. On a par conséquent:

(1) $$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}.$$

En rapprochant à présent l'inégalité (1) à l'inégalité $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ qui résulte immédiatement du th. 1, on obtient

$$\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Corollaire 3. *Si un ensemble infini M de puissance $\mathfrak{m}$ se laisse décomposer en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ dont la puissance est $> \mathfrak{m}$ et qui satisfait à la condition $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \mathfrak{p}$, on a $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$.*

Ce corollaire est une conséquence immédiate du th. 1, car l'hypothèse du corollaire et le th. 1 donnent la formule $\mathfrak{m} < \overline{\overline{\boldsymbol{K}}} \leqslant \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$.

[1]) le signe „$\Sigma(\boldsymbol{K})$" dénote la somme de tous les ensembles appartenant à la classe $\boldsymbol{K}$.

Nous en tirons des corollaires ultérieurs suivants:

Corollaire 4. *Aucun ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ n'est décomposable en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ d'ensembles qui remplisse la condition $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \mathfrak{p}$.*

On aurait en effet dans le cas contraire selon le cor. 3:

$$\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} < (\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}^2},$$

tandis qu'on a en vérité $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}^2}$ (dans l'hypothèse que le nombre cardinal $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$, donc à fortiori soit $\mathfrak{m}$ soit $\mathfrak{p}$, est transfini).

Corollaire 5. *$\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal transfini et $\mathfrak{p}$ — un nombre fini, aucun ensemble de puissance $\mathfrak{m}$ n'est décomposable en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \mathfrak{m}$ qui remplisse la condition $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \mathfrak{p}$.*

Pour la démonstration il suffit de remarquer que l'on a en vertu de l'hypothèse l'égalité $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ (pour tout $\mathfrak{p}$ fini distinct de 0) et d'appliquer le cor. 4.

En posant dans le cor. 4: $\mathfrak{m} = 2$ et $\mathfrak{p} = \aleph_0$, on obtient comme cas particulier le

Corollaire 6. *Aucun ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ ne se laisse décomposer en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ de puissance $> 2^{\aleph_0}$ où $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$.*

Nous allons étudier à présent la question des réciproques du th. 1 et des cor. 2 et 3. Commençons à ce but par établir le théorème auxiliaire suivant:

Théorème 7. *Etant donnés trois nombres cardinaux $\mathfrak{m}, \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ où $\mathfrak{m}$ est transfini, $\mathfrak{p} > 1$ et $\mathfrak{q} > 1$, si en outre soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$ soit $\mathfrak{p}$ est le plus petit nombre cardinal satisfaisant à la formule $\mathfrak{m} < \mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$ alors tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$, composée d'ensembles presque disjoints de puissance $\mathfrak{p}$, donc telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \mathfrak{p}$.*

Démonstration. On a en vertu de l'hypothèse

(1) $$\mathfrak{q}^{\mathfrak{x}} \leqslant \mathfrak{m}, \text{ lorsque } \mathfrak{x} < \mathfrak{p}.$$

Si l'on avait donc $\mathfrak{m} < \mathfrak{p}$, on aurait selon (1) $\mathfrak{q}^{\mathfrak{m}} \leqslant \mathfrak{m}$, tandis qu'on a en vérité $\mathfrak{q}^{\mathfrak{m}} > \mathfrak{m}$ (pour $\mathfrak{q} > 1$). Par conséquent $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{p}$, d'où

$$(2) \qquad \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p}$$

car $\mathfrak{m}$ est un nombre transfini et $\mathfrak{p} \neq 0$.

Considérons un ensemble arbitraire Q de puissance $\mathfrak{q}$ et soit Q_ξ l'ensemble de toutes les suites du type ξ („ξ" désignant un nombre ordinal), dont les termes sont éléments de Q. La définition des puissances des nombres cardinaux donne:

(3) $\overline{\overline{Q_\xi}} = \mathfrak{q}^\xi$ *pour tout nombre ordinal* ξ.

Le théorème sur le bon ordre entraîne l'existence d'un nombre ordinal π tel que

$$(4) \qquad \mathfrak{p} = \aleph_\pi$$

(en omettant le cas banal où $\mathfrak{p}$ est un nombre fini, ce qui donne, comme il est facile de constater, l'égalité $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}^\mathfrak{p} = \mathfrak{q}^\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}$, dont il résulte immédiatement la décomposition de tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $\mathfrak{q}^\mathfrak{p}$, composée d'ensembles de puissance $\mathfrak{p}$ même entièrement disjoints deux à deux).

Posons $M_1 = \sum_{\xi < \omega_\pi} Q_\xi$. En vertu de (1), (3) et (4) on obtient

$$\overline{\overline{M_1}} = \sum_{\xi < \omega_\pi} \overline{\overline{Q_\xi}} = \sum_{\xi < \omega_\pi} \mathfrak{q}^\xi \leqslant \mathfrak{m} \cdot \aleph_\pi = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p},$$

d'où selon (2)

$$(5) \qquad \overline{\overline{M_1}} \leqslant \mathfrak{m}.$$

Décomposons maintenant M_1 en sous-ensembles, en plaçant dans le même sous-ensemble deux suites, qui sont éléments de M_1, lorsqu'elles sont des segments d'une même suite appartenant à l'ensemble Q_{ω_π}. Or, il est facile de montrer que la classe $\boldsymbol{K}_1$ de tous les sous-ensembles de M_1 ainsi obtenus satisfait aux conditions:

$$(6) \qquad \Sigma(\boldsymbol{K}_1) = M_1 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{K}_1}} = \mathfrak{q}^\mathfrak{p},$$

(7) $\boldsymbol{K}_1$ *est une classe d'ensembles presque disjoints de puissance* $\mathfrak{p}$, *de sorte que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}_1) \leqslant \mathfrak{p}$.

En effet, l'égalité $\Sigma(\boldsymbol{K}_1) = M_1$ résulte directement des définitions de M_1, Q_ξ et $\boldsymbol{K}_1$. Ensuite, la puissance de la classe $\boldsymbol{K}_1$ est évidemment égale à celle de l'ensemble Q_{ω_π}, donc, en vertu de (3) et (4), elle est égale à $\mathfrak{q}^\mathfrak{p}$. Chaque ensemble de cette classe est de puissance $\aleph_\pi = \mathfrak{p}$, car il y a autant de segments dans toute suite du type ω_π (qui est élément de l'ensemble Q_{ω_π}). Enfin, X et Y étant deux ensembles arbitraires différents, pris dans la classe $\boldsymbol{K}_1$, et x et y les deux suites qui leur correspondent dans Q_{ω_π}, on a $\overline{\overline{X \cdot Y}} = \zeta$, où ζ est le type du plus grand segment commun de x et y. Le nombre ordinal ζ étant inférieur à ω_π, l'ensemble $X \cdot Y$ est de puissance moindre que $\aleph_\pi = \mathfrak{p}$, donc moindre à celle de X et de Y. Par conséquent, selon les déf. 1 et 2, $\boldsymbol{K}_1$ est une classe d'ensembles presque disjoints et on a $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}_1) \leqslant \mathfrak{p}$. Les propositions (6) et (7) sont ainsi établies.

Considérons à présent un ensemble arbitraire M_2 de puissance $\mathfrak{m}$, mais disjoint de M_1. La formule (2) implique donc l'existence d'une classe $\boldsymbol{K}_2$ d'ensembles assujettie aux conditions:

$$(8) \qquad \Sigma(\boldsymbol{K}_2) = M_2 \quad \text{et} \quad \overline{\overline{\boldsymbol{K}_2}} = \mathfrak{m},$$

(9) $\boldsymbol{K}_2$ *est une classe d'ensembles disjoints de puissance* $\mathfrak{p}$.

En posant $M = M_1 + M_2$, on obtient selon (5), vu la puissance de l'ensemble M_2:

$$(10) \qquad \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M_1}} + \overline{\overline{M_2}} = \overline{\overline{M_1}} + \mathfrak{m} = \mathfrak{m}.$$

Posons enfin $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2$. La définition de M et l'inégalité $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{q}^\mathfrak{p}$, qui résulte de l'hypothèse du théorème, permettent de déduire facilement de (6) et (8) que

$$(11) \qquad \Sigma(\boldsymbol{K}) = \Sigma(\boldsymbol{K}_1) + \Sigma(\boldsymbol{K}_2) = M_1 + M_2 = M.$$

$$(12) \qquad \overline{\overline{\boldsymbol{K}}} = \overline{\overline{\boldsymbol{K}_1}} + \overline{\overline{\boldsymbol{K}_2}} = \mathfrak{q}^\mathfrak{p} + \mathfrak{m} = \mathfrak{q}^\mathfrak{p}.$$

Comme $M_1 \cdot M_2 = 0$, on conclut en outre de (6) et (8) que tous deux ensembles appartenant respectivement à $\boldsymbol{K}_1$ et $\boldsymbol{K}_2$ sont disjoints. Il en résulte en vertu de (7) et (9) que

(13) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2$ *est une classe d'ensembles presque disjoints de puissance* $\mathfrak{p}$, *de sorte que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \mathfrak{p}$.

Les propositions (10)—(13) montrent que l'ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$, donc aussi tout ensemble de la même puissance, se laisse décomposer d'une façon conforme à la thèse du théorème, c. q. f. d.

Le théorème qui précède a été démontré implicitement pour le cas particulier où $\mathfrak{q} = 2$ par M. Sierpiński dans son article précité, et le raisonnement ci-dessus n'est qu'une modificaton de sa démonstration.

Corollaire 8. *Dans les hypothèses du th. 7, si de plus* $0<\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$, *tout ensemble* M *de puissance* $\mathfrak{m}$ *se laisse décomposer en une classe* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $\mathfrak{n}$ *composée d'ensembles presque disjoints de puissance* $\geqslant\mathfrak{p}$ *et telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K})\leqslant\mathfrak{p}$.

Démonstration. Par l'application directe du th. 7 on obtient la décomposition de l'ensemble M en une classe $\boldsymbol{K}_1$ de puissance $\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$, formée d'ensembles presque disjoints de puissance $\mathfrak{p}$, donc satisfaisant à la condition $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}_1)\leqslant\mathfrak{p}$. L'inégalité $0<\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$ implique d'autre part que cette classe contient une sous-classe non vide $\boldsymbol{K}_2$ de puissance $\mathfrak{n}$. Transformons la classe $\boldsymbol{K}_2$, en ajoutant à un des ensembles qui en sont des éléments l'ensemble $M-\Sigma(\boldsymbol{K}_2)$, c'est-à-dire l'ensemble composé de tous les éléments de M qui n'appartiennent à aucun ensemble de la classe $\boldsymbol{K}_2$. La classe $\boldsymbol{K}$ ainsi obtenue de $\boldsymbol{K}_2$ donne, comme on voit aussitôt, la décomposition cherchée de M.

Corollaire 9. *Dans les hypothèses du th. 7, si de plus* $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{q}^{\mathfrak{p}}$ *tout ensemble* M *de puissance* $\mathfrak{m}$ *se laisse décomposer en une classe* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $\mathfrak{n}$, *composée d'ensembles presque disjoints de puissance* $\mathfrak{p}$, *donc telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K})\leqslant\mathfrak{p}$.

Démonstration. Le raisonnement appliqué pour démontrer le corollaire précédent exige ici une modification uniquement dans le cas où l'ensemble $M-\Sigma(\boldsymbol{K}_2)$ est de puissance $>\mathfrak{p}$. En omettant alors le cas banal où $\mathfrak{p}$ est un nombre fini, on décomposera $M-\Sigma(\boldsymbol{K}_2)$ en une classe $\boldsymbol{K}_3$ d'ensembles disjoints de puissance $\mathfrak{p}$ et on posera $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_2+\boldsymbol{K}_3$. Comme $\overline{\overline{\boldsymbol{K}_3}}\leqslant\overline{\overline{M-\Sigma(\boldsymbol{K}_2)}}\leqslant\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}$, il vient $\overline{\overline{\boldsymbol{K}}}=\overline{\overline{\boldsymbol{K}_2}}+\overline{\overline{\boldsymbol{K}_3}}=\mathfrak{n}+\overline{\overline{\boldsymbol{K}_3}}=\mathfrak{n}$. La classe $\boldsymbol{K}$ est par conséquent de la puissance cherchée. La démonstration des autres propriétés cherchées de cette classe ne présente déjà de difficultés.

Il est manifeste que le cor. 9 est une généralisation du th. 7. Or, en remplaçant dans le th. 7, de-même que dans les cor. 8 et 9 „$\mathfrak{q}$" par „$\mathfrak{m}$", resp. par „2", on obtient des cas particuliers de ces propositions qui sont les plus intéressants au point de vue des applications. Ainsi, dans le cas où $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}$ les cor. 8 et 9 peuvent être considérés comme des propositions partiellement réciproques (car contenant des hypothèses supplémentaires restrictives) du th. 1 et du cor. 2.

Il est à remarquer que dans les hypothèses du th. 7 et des cor. 8 et 9 figurent des conditions un peu spéciales, qui établissent certaines relations entre les nombres cardinaux $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ Nous

ignorons à l'heure actuelle combien ces conditions y sont essentielles. En particulier, pour se borner au cas le plus important où $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}$, nous ne savons pas répondre à la question si ces conditions ne se laissent réduire simplement à l'inégalité $0<\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{m}$; en d'autres termes, nous ne savons ni démontrer, ni réfuter les deux propositions suivantes, d'ailleurs équivalentes l'une à l'autre:

(*P*) $\mathfrak{m}$ *étant un nombre cardinal transfini et* $0<\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{m}$, *tout ensemble* M *de puissance* $\mathfrak{m}$ *se laisse décomposer en une classe* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$, *composée d'ensembles presque disjoints de puissance* $\mathfrak{p}$, *donc telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K})\leqslant\mathfrak{p}$.

(*Q*) $\mathfrak{m}$ *étant un nombre cardinal transfini et* $0<\mathfrak{p}\leqslant\mathfrak{m}$, *si on a en outre* $0<\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$, *tout ensemble* M *de puissance* $\mathfrak{m}$ *se laisse décomposer en une classe* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $\mathfrak{n}$, *composée d'ensembles presque disjoints de puissance* $\geqslant\mathfrak{p}$ *et telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K})\leqslant\mathfrak{p}$: *si l'on a de plus* $\mathfrak{m}\leqslant\mathfrak{n}\leqslant\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$, *la décomposition de l'ensemble* M *peut être effectuée de manière que la classe* $\boldsymbol{K}$ *soit formée exclusivement d'ensembles de puissance* $\mathfrak{p}$.

Nous ne savons démontrer les propositions (*P*) ou (*Q*) même en supprimant dans leur énoncé les conditions relatives à la puissance des ensembles de la classe $\boldsymbol{K}$, ainsi que l'inégalité $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K})\leqslant\mathfrak{p}$ (mais en conservant la condition, d'après laquelle $\boldsymbol{K}$ soit une classe d'ensembles presque disjoints). Nous ne savons nonplus démontrer des réciproques complètes du th. 1 et du cor. 2 qui s'obtiennent aussi de la propositions (*Q*), en y supprimant l'hypothèse, d'après laquelle $\boldsymbol{K}$ soit la classe d'ensembles presque disjoints.

Or, les propositions (*P*) et (*Q*) peuvent être établies facilement dans le cas où $\mathfrak{p}$ est un nombre fini (car on a alors $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ de sorte qu'en posant dans le th. 7 et dans les cor 8 et 9 $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}$, leurs hypothèses se trouvent satisfaites). Ce cas n'entraîne cependant aucune conséquence qui nous intéresse. Beaucoup plus d'intérêt semble présenter le cas où $\mathfrak{p}=\aleph_0$, dont nous allons nous occuper à présent.

Théorème 10. *Tout ensemble infini* M *de puissance* $\mathfrak{m}$ *se laisse décomposer en une classe* $\boldsymbol{K}$ *de puissance* $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$ *d'ensembles dénombrables presque disjoints, donc telle que* $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K})\leqslant\aleph_0$.

Démonstration. Cette décomposition résulte directement du th. 7, en y posant $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{p}=\aleph_0$. L'hypothèse de ce théorème se trouve alors réalisée, car on a $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ pour $1\leqslant\mathfrak{p}<\aleph_0$, d'où, en effet, soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^{\aleph_0}$, soit $\aleph_0$ est le plus petit des nombres cardinaux $\mathfrak{p}$ vérifiant l'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$.

Corollaire 11. *$\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal transfini, l'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\aleph_0}$ est une condition suffisante et nécessaire pour que tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ soit décomposable en une classe K de puissance $> \mathfrak{m}$ d'ensembles dénombrables presque disjoints, donc telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_0$.*

Démonstration. On conclut du th. 10 que l'inegalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\aleph_0}$ constitue bien une condition suffisante pour l'existence de cette décomposition de l'ensemble M; or, en vertu du cor. 3, si l'on y pose $\mathfrak{p} = \aleph_0$, l'inégalité en question en est en même temps une condition nécessaire.

Il est intéressant d'observer que le cor. 11 reste vrai, quand on supprime dans son énoncé les mots „*dénombrables presque disjoints*".

Les deux corollaires suivants du th. 10 sont de nature plus spéciale. Le premier a été établi par M. Sierpiński dans son article précité.

Corollaire 12. *Tout ensemble dénombrable se laisse décomposer en une classe K de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles dénombrables presque disjoints, donc telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_0$.*

Pour le prouver, il suffit de poser au th. 10 $\mathfrak{m} = \aleph_0$.

Corollaire 13. *Pour tout nombre ordinal α de 2-ème espèce confinal avec ω (donc, en particulier, pour $\alpha = \omega$) tout ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ se laisse décomposer en une classe K de puissance $> \aleph_\alpha$, à savoir de puissance $\aleph_\alpha^{\aleph_0}$, d'ensembles dénombrables presque disjoints, donc telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_0$.*

Pour le prouver on n'a qu'à remplacer dans le th. 10 „$\mathfrak{m}$" par „$\aleph_\alpha$"; l'inégalité $\aleph_\alpha^{\aleph} > \aleph_\alpha$ est fournie par le théorème connu de J. König[1]).

Théorème 14. *$\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal transfini, l'inégalité $0 < \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ soit décomposable en une classe K de puissance $\mathfrak{n}$ d'ensembles infinis presque disjoints et telle qu'on ait en outre $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_0$.*

Démonstration. On conclut immédiatement du th. 1 que l'inégalité en question constitue une condition nécessaire pour que

[1]) Cf. p. ex. A. Schoenflies, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig und Berlin 1913, p. 138.

tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ soit décomposable de la manière décrite dans l'énoncé. Pour prouver que cette condition est à la fois suffisante, on aura recours au cor. 8, où on posera $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{p} = \aleph_0$; le raisonnement employé dans la démonstration du th. 10 nous permet alors de montrer sans peine que dans le cas considéré les hypothèses de ce corollaire sont remplies.

Théorème 15. *$\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal transfini, la formule $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0}$ constitue une condition suffisante pour que tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ soit décomposable en une classe K de puissance $\mathfrak{n}$ d'ensembles dénombrables presque disjoints, donc telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_0$; si de plus $\mathfrak{m} > \aleph_0$, la condition est en même temps nécessaire.*

La démonstration ne diffère de celle du th. 14 que par l'application des cor. 2 et 9 au lieu du th. 1 et cor. 8 respectivement.

Comme conséquence du th. 15 on a le

Théorème 16. *Pour toute classe non vide L d'ensembles dénombrables il existe une classe K d'ensembles dénombrables presque disjoints qui satisfait aux conditions:*

$$\Sigma(K) = \Sigma(L) \quad \text{et} \quad \overline{\overline{K}} = \overline{\overline{L}}.$$

Démonstration. Sans diminuer la généralité du raisonnement on peut admettre que la classe L est infinie; car en cas contraire on a affaire à la décomposition de l'ensemble dénombrable $\Sigma(L)$ en une classe K d'ensembles dénombrables disjoints qui soit de puissance égale à celle de la classe finie L — ce qui ne présente aucune difficulté.

Posons donc

$$\overline{\overline{\Sigma(L)}} = \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{L}} = \mathfrak{n}. \tag{1}$$

En tenant compte de la puissance des ensembles qui sont des éléments de la classe L, on obtient sans peine l'inégalité $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n} \cdot \aleph_0$. Or, $\mathfrak{n}$ comme nombre cardinal transfini vérifie l'égalité $\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \aleph_0$, d'où

$$\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}. \tag{2}$$

D'autre part, en désignant par N la classe de tous les sous-ensembles dénombrables de l'ensemble $\Sigma(L)$, on parvient sans peine aux formules $L \subset N$ et $\overline{\overline{N}} \leqslant [\overline{\overline{\Sigma(L)}}]^{\aleph_0}$[1]), d'où en vertu de (1):

$$\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}^{\aleph_0}. \tag{3}$$

[1]) Cf. la démonstration de la formule (3) dans le th. 1.

En raison du th. 15 les formules (2) et (3) entraînent l'existence d'une décomposition de tout ensemble de puissance $\mathfrak{m}$, donc en particulier de l'ensemble $\Sigma(L)$, en une classe K de puissance $\mathfrak{n}$ d'ensembles dénombrables presque disjoints. On voit aussitôt que K est la classe cherchée.

Les th. 10, 14 et 15 montrent que les propositions (P) et (Q), dont il a été question (p. 195), se laissent établir pour le cas où $\mathfrak{p} = \aleph_0$. Nous allons envisager à son tour un autre cas particulier de ces propositions, à savoir celui où $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_\alpha}$ et $\mathfrak{p} = \aleph_{\alpha+1}$.

Théorème 17. *Tout ensemble M de puissance $2^{\aleph_\alpha}$ se laisse décomposer en une classe K de puissance $2^{\aleph_{\alpha+1}}$ d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, donc telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$.*

Démonstration. Lorsque $\mathfrak{p} < \aleph_{\alpha+1}$, on a $2^{\mathfrak{p}} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$; en conséquence soit $2^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_{\alpha+1}}$, soit $\aleph_{\alpha+1}$ est le plus petit nombre cardinal $\mathfrak{p}$ vérifiant la formule $2^{\aleph_\alpha} < 2^{\mathfrak{p}}$. On en conclut qu'en posant dans le th. 7: $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_\alpha}$, $\mathfrak{q} = 2$ et $\mathfrak{p} = \aleph_{\alpha+1}$, les hypothèses de ce théorème se trouveront réalisées; en appliquant donc ce théorème, on aura acquis la décomposition cherchée de M.

Corollaire 18. *Pour que tout ensemble M de puissance $2^{\aleph_\alpha}$ soit décomposable en une classe K de puissance $> 2^{\aleph_\alpha}$ d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, donc telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$, il faut et il suffit que l'on ait $2^{\aleph_\alpha} < 2^{\aleph_{\alpha+1}}$.*

Démonstration. Le th. 17 implique immédiatement que l'inégalité en question constitue la condition suffisante pour que tout ensemble M de puissance $2^{\aleph_\alpha}$ soit décomposable de la sorte. D'autre part, en posant dans le cor. 3: $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_\alpha}$ et $\mathfrak{p} = \aleph_{\alpha+1}$, on déduit de l'identité $(2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_{\alpha+1}} = 2^{\aleph_{\alpha+1}}$ que cette condition est en même temps nécessaire.

Théorème 19. *Pour que tout ensemble M de puissance $2^{\aleph_\alpha}$ soit décomposable en une classe K de puissance $\mathfrak{n}$ d'ensembles presque disjoints de puissance $\geqslant \aleph_{\alpha+1}$ et telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$, il faut et il suffit que l'on ait $0 < \mathfrak{n} \leqslant 2^{\aleph_{\alpha+1}}$.*

Démonstration. En posant dans le th. 1 $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_\alpha}$ et $\mathfrak{p} = \aleph_{\alpha+1}$, on parvient facilement à la conclusion que la formule en question est une condition nécessaire pour l'existence d'une pareille décomposition. D'autre part, en remplaçant dans le cor. 8 „$\mathfrak{m}$" par „$2^{\aleph_\alpha}$", „$\mathfrak{q}$" par „2" et „$\mathfrak{p}$" par „$\aleph_{\alpha+1}$", le raisonnement employé dans la démonstration du th. 17 permet de prouver que la condition est aussi suffisante.

Corollaire 20. *Pour que tout ensemble M de puissance $2^{\aleph_\alpha}$ soit décomposable en une classe K de puissance $2^{2^{\aleph_\alpha}}$, d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_{\alpha+1}$ et telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$, il faut et il suffit que l'on ait $2^{2^{\aleph_\alpha}} = 2^{\aleph_{\alpha+1}}$.*

Pour le démontrer, il suffit de remplacer dans le théorème précédent „$\mathfrak{n}$" par „$2^{2^{\aleph_\alpha}}$" et de tenir compte du fait que la formule $2^{\aleph_{\alpha+1}} \leqslant 2^{2^{\aleph_\alpha}}$ est toujours remplie.

Dans l'énoncé du cor. 18, du th. 19 et du cor. 20 on peut supprimer les mots „*presque disjoints de puissance* $(\geqslant) \aleph_{\alpha+1}$".

En examinant les démonstration des th. et cor. 17—20, on aperçoit aisément qu'ils peuvent être considérablement généralisés, si on substitue partout dans leur énoncé „2" par „$\mathfrak{m}$" et n'admet que $\mathfrak{m} > 1$. Cette généralisation fait aussitôt ressortir l'analogie entre les th. 10 et 14 d'une part et les th. 17 et 19 de l'autre. Un théorème analogue au th. 15 se laisse établir également; j'omets ici son énoncé explicite.

Pendant que, pour le th. 1 et le cor. 2, nous n'en avons réussi d'établir les réciproques que dans des cas spéciaux (cf. th. 14, 15 et 19), la réciproque du cor. 3 dans toute son extension ne présente aucune difficulté.

Théorème 21. *$\mathfrak{m}$ étant un nombre cardinal transfini, l'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$ est une condition nécessaire et suffisante pour que tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m}$ soit décomposable en une classe K de puissance $> \mathfrak{m}$ d'ensembles infinis presque disjoints et telle que $\mathfrak{d}(K) \leqslant \mathfrak{p}$.*

Démonstration. Le cor. 3 implique immédiatement que l'inégalité en question constitue la condition nécessaire pour l'existence de la décomposition considérée; il nous reste donc à prouver que cette condition est en même temps suffisante.

Admettons, en effet, que l'on a $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$. Le théorème de M. Zermelo sur le bon ordre entraîne l'existence du plus petit nombre ordinal $\mathfrak{p}_1$ satisfaisant à l'inégalité analogue:

$$\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}_1}. \tag{1}$$

Nous aurons par conséquent:

$$\mathfrak{p}_1 \leqslant \mathfrak{p}, \tag{2}$$

et l'inégalité (1) implique en outre que $\mathfrak{p}_1$ est un nombre transfini.

Considérons un ensemble arbitraire M de puissance $\mathfrak{m}$. En vertu du th. 7 (où „$\mathfrak{q}$“ est remplacé par „$\mathfrak{m}$“ et „$\mathfrak{p}$“ par „$\mathfrak{p}_1$“) et par définition du nombre $\mathfrak{p}_1$, l'ensemble M se laisse décomposer en une classe K d'ensembles presque disjoints de puissance $\mathfrak{p}_1$, donc infinis, qui vérifie en outre les conditions:

$$(3)\qquad \overline{\overline{K}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}_1} \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}(K) \leqslant \mathfrak{p}_1.$$

Or, les formules (1) — (3) donnent immédiatement:

$$\overline{\overline{K}} > \mathfrak{m} \quad \text{et} \quad \mathfrak{d}(K) \leqslant \mathfrak{p},$$

de sorte que la décomposition cherchée de M se trouve établie, c. q. f. d.

Il est aisé de constater que l'on peut supprimer dans l'enoncé du théorème qui vient d'être démontré les mots „*infinis presque disjoints*“. Les cor. 11 et 18 peuvent être considérés comme des cas particuliers de ce théorème.

Comme une conséquence immédiate du th. 21 on obtient le théorème de M. Sierpiński mentionné au début de cette Note.

Corollaire 22. *Tout ensemble infini M de puissance $\mathfrak{m}$ se laisse décomposer en une classe K de puissance $> \mathfrak{m}$ d'ensembles (infinis) presque disjoints.*

En raison de l'inégalité connue $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}^{\mathfrak{m}}$, il suffit, pour démontrer ce corollaire, de remplacer dans le th. 21 „$\mathfrak{p}$“ par „$\mathfrak{m}$“.

Signalons encore deux autres corollaires du même théorème, qui sont toutefois de nature plus spéciale:

Corollaire 23. *Etant donné un nombre ordinal α de 2-me espèce confinal avec un nombre ω_β (donc, en particulier, lorsque $\alpha = \omega_\beta$), tout ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ se laisse décomposer en une classe K de puissance $> \aleph_\alpha$ d'ensembles infinis presque disjoints et telle que l'on a en outre $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_\beta$.*

Pour le démontrer, on pose au th. 21: $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$, $\mathfrak{p} = \aleph_\beta$; l'inégalité nécessaire $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$ est fournie par le théorème déjà cité de J. König, généralisé par Jourdain[1]).

Corollaire 24. *L'inégalité $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$ est nécessaire et suffisante pour que tout ensemble M de puissance $\aleph_{\alpha+1}$ soit décomposable en une classe K de puissance $> \aleph_{\alpha+1}$ d'ensembles infinis presque disjoints et telle qu'on ait de plus $\mathfrak{d}(K) \leqslant \aleph_\alpha$.*

[1]) Cf. p. ex. A. Schönflies, op. cit., p. 66 ou 138.

Démonstration. Conformément au th. 21, en y remplaçant „$\mathfrak{m}$“ par „$\aleph_{\alpha+1}$“ et „$\mathfrak{p}$“ par „$\aleph_\alpha$“, la condition nécessaire et suffisante de la décomposition cherchée est donnée par l'inégalité $\aleph_{\alpha+1} < \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha}$. Or, en vertu des formules connues: $\aleph_{\alpha+1} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$ et $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$ (car $2^{\aleph_\alpha} \leqslant \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\alpha} \leqslant (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$), cette inégalité equivaut à l'inégalité $\aleph_{\alpha+1} \neq 2^{\aleph_\alpha}$.

Les cor. 18, 20 et 24 semblent être particulièrement intéressants dans le cas où $\alpha = 0$ à cause de leur relation avec la fameuse hypothèse du continu: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Le cor. 24 dans ce cas particulier m'a été obligeamment communiqué par M. Sierpiński avec la remarque qu'il constitue l'énoncé d'une condition équivalente à la négation de l'hypothèse du continu. Des cor. 18 et 20 nous tirons, par contre, des propositions équivalentes à certaines conséquences de cette hypothèse, notamment aux formules: $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ et $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1}$.

Formulés en toute généralité, les cor. 18, 20 et 24 mettent au jour la liaison intime qui existe entre les questions traitées dans la Note présente et certains problèmes généraux concernant les nombres cardinaux et non résolus encore. Nous entendons par là, en premier lieu, l'ainsi dite hypothèse de Cantor sur les alephs ou l'hypothèse du continu généralisée:

(*H*) *Quel que soit le nombre ordinal α, on a $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.*

Cette hypothèse entraîne, comme on sait, dans la théorie de l'exponentiation des nombres cardinaux des conséquences allant fort loin[1]); aussi pourrait-on, vu le caractère des théorèmes établis dans cette Note, prévoir à priori que l'admission de l'hypothèse (*H*) permettrait d'acquérir des résultats bien forts également dans la matière qui nous intéresse ici. Le théorème suivant et les corollaires qui en découlent confirment cette anticipation.

Théorème 25. *L'hypothèse (H) entraîne des conséquences suivantes:*

I. *Lorsque $\beta < cf(\alpha)$*[2]) *(donc, en particulier, lorsque α est un*

[1]) Cf. mon article *Quelques théorèmes sur les alephs*, Fund. Math. VII, p. 9 et 10.

[2]) Le signe „$cf(\alpha)$“ dénote ici l'indice du plus petit nombre initial avec lequel le nombre ω_α est confinal; ainsi, α étant un nombre de 1-ère espèce ou

nombre ordinal de 1-ère espece et $\beta < \alpha$), aucun ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ ne se laisse décomposer en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \aleph_\alpha$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$.

II. *Lorsque $\beta \geqslant cf(\alpha)$ (donc en particulier, lorsque α est un nombre ordinal de 1-ère espèce et $\beta \geqslant \alpha$), tout ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, donc de puissance $> \aleph_\alpha$, composée d'ensembles presque disjoints et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$; si en outre $\beta = cf(\alpha)$ ou $\beta = \alpha$, on peut effectuer cette décomposition de manière que la classe $\boldsymbol{K}$ soit formée exclusivement d'ensembles de puissance $\aleph_\beta$.*

Démonstration. Je vais profiter ici des deux propositions suivantes qui se déduisent facilement de l'hypothèse (H) à l'aide des raisonements exposés dans mon article *Quelques théorèmes sur les alephs*, cité tout à l'heure[1]):

(1) *Si $\beta < cf(\alpha)$, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.*

(2) $\aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ *et, plus généralement, si $\alpha \geqslant \beta \geqslant cf(\alpha)$, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$).*

Or, en vertu de (1) la partie I du théorème à demontrer est une conséquence directe du cor. 3 (ou du th. 21) où on n'a qu'à poser $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ et $\mathfrak{p} = \aleph_\beta$.

Pour passer à la partie II, remarquons que d'après (1) et (2) le nombre $\aleph_{cf(\alpha)}$ est le plus petit parmi les nombres cardinaux $\mathfrak{p}$, qui vérifient la formule $\aleph_\alpha < \aleph_\alpha^{\mathfrak{p}}$. En posant donc au th. 7: $\mathfrak{m} = \mathfrak{q} = \aleph_\alpha$ et $\mathfrak{p} = \aleph_\beta$, nous obtenons la décomposition cherchée de l'ensemble arbitraire M de puissance $\aleph_\alpha$ en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $\aleph_\alpha^{\aleph_{cf(\alpha)}} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ formée d'ensembles presque disjoints de puissance $\aleph_{cf(\alpha)}$ et satisfaisant à la condition $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_{cf(\alpha)}$, donc à plus forte raison à la condition $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$ pour $\beta \geqslant cf(\alpha)$.

Le cas de $\beta = \alpha$ doit être envisagé séparément. L'hypothèse

bien lorsque $\alpha = 0$, on aura $cf(\alpha) = \alpha$; on a ensuite: $cf(\omega) = 0$, $cf(\Omega) = 1$ etc. Dans mon article précité de Fund. Math. VII le symbole „$cf(\alpha)$" a été employé dans un sens un peu différent, qui coïncide cependant avec le sens actuel dans le cas où α est un nombre de 2-ème espèce.

[1]) Loc. cit., p. 9 et 10; il faut tenir compte ici de la signification modifiée du symbole „$cf(\alpha)$" (voir note précédente).

(H) implique immédiatement qu'on a $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1} \leqslant \aleph_\alpha$ pour $\beta < \alpha$; par suite $\aleph_\alpha$ est le plus petit nombre cardinal $\mathfrak{p}$ vérifiant la formule $\aleph_\alpha < 2^{\mathfrak{p}}$. En remplaçant donc dans le th. 7 „$\mathfrak{m}$" et „$\mathfrak{p}$" par „$\aleph_\alpha$" et „$\mathfrak{q}$" par „2", on obtient la décomposition cherchée de l'ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ de puissance $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta = \aleph_\alpha$ et de plus (tout comme dans le cas de $\beta = cf(\alpha)$) la classe $\boldsymbol{K}$ se compose uniquement d'ensembles de puissance $\aleph_\beta$. Le théorème est ainsi établi.

Corollaire 26. *L'hypothèse (H) entraîne des conséquences suivantes:*

1° *Lorsque α est un nombre ordinal de 1-ère espèce distinct de 0 ou bien de 2-ème espèce non confinal avec ω, aucun ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ ne se laisse décomposer en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \aleph_\alpha$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$.*

2° *Lorsque $\alpha = 0$ ou bien α est un nombre ordinal de 2-ème espèce confinal avec ω, tout ensemble M de puissance $\aleph_\alpha$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, donc de puissance $> \aleph_\alpha$, composée d'ensembles dénombrables presque disjoints, et satisfaisant par conséquent à la condition $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$.*

Pour le démontrer, il suffit de poser dans le th. 25 $\alpha = 0$ et de remarquer que dans l'hypothèse de 1° on a $cf(\alpha) > 0$, et dans l'hypothèse de 2° on aura $cf(\alpha) = 0$.

Le th. 25 et le cor. 26 montrent qu'à l'aide de l'hypothèse du continu généralisée on peut épuiser une partie des problèmes qui constituent le principal objet des considérations présentes. Cette hypothèse permet notamment d'établir une condition bien simple qui est à la fois nécessaire et suffisante pour que tout ensemble M de puissance $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$ soit décomposable en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \aleph_\alpha$ (plus précisément de puissance $2^{\aleph_\alpha}$) composée d'ensembles presque disjoints et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \mathfrak{p} = \aleph_\beta$, en particulier telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$. Cette condition s'exprime par l'inégalité $\beta \geqslant cf(\alpha)$ et dans le cas particulier où $\beta = 0$ elle peut être formulée de la manière suivante: α est soit $= 0$ soit un nombre ordinal de 2-ème espèce confinal avec ω.

Ensuite, moyennant l'hypothèse (H) on peut sans grande difficulté démontrer les deux propositions (P) et (Q) mentionnées p. 195, si l'on omet dans leur énoncé les conditions concernant la puissance des ensembles de la classe $\boldsymbol{K}$; par cela même on obtient la réciproque du th. 1 dans toute son étendue.

Il reste néanmoins des problèmes que nous ne savons jusqu'à présent résoudre même à l'aide de l'hypothèse du continu généralisée: ils concernent la puissance des ensembles en lesquels l'ensemble M est décomposé. Nous ignorons notamment si l'on peut exiger dans la partie II du th. 25 que la classe $\boldsymbol{K}$ soit toujours (et non seulement pour $\beta = \alpha$) composée d'ensembles de puissance $\aleph_\alpha$ ou, tout au moins, qu'elle soit toujours (et non seulement dans les cas où $\beta = cf(\alpha)$ ou bien $\beta = \alpha$) formée exclusivement d'ensembles de puissance $\aleph_\beta$. Nous ignorons en particulier si l'ensemble M de puissance $\aleph_\omega$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puisssance $> \aleph_\omega$ d'ensembles de puissance $\aleph_\omega$ ou même d'ensembles indénombrables arbitraires et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$. Nous ne connaissons nonplus aucun exemple d'ensemble infini M qui soit décomposable en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \overline{\overline{M}}$ formée exclusivement d'ensembles de puissance $> \mathfrak{d}(\boldsymbol{K})$. En relation avec cet état de choses nous ne savons, même en nous servant de l'hypothèse (H), ni prouver, ni refuter dans leur énoncé intégral les propositions (P) et (Q) déjà mentionnées; nous ne savons donc établir la réciproque du cor. 2 dans toute son étendue.

En terminant, je voudrais attirer l'attention sur le fait que les conséquences de l'hypothèse (H) qui ont été formulées dans le th. 25 et le cor. 26 se laissent établir partiellement sans cette hypothèse à condition de restreindre le champ de nos considérations aux nombres cardinaux d'un certain système d'ailleurs assez vaste $\{\aleph_{\pi(\alpha)}\}$, défini par induction comme il suit:

Définition 3. $\aleph_{\pi(0)} = \aleph_0$[1]; $\aleph_{\pi(\alpha)} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha-1)}}$ *pour tout nombre ordinal α de 1-ère espèce*; $\aleph_{\pi(\alpha)} = \sum_{\xi<\alpha} \aleph_{\pi(\xi)}$ *pour tout nombre ordinal α de 2-ème espèce.*

On peut démontrer notamment le suivant

Théorème 27. *Etant donné un nombre ordinal arbitraire α de 2-ème espèce,*

I. *si $\beta < cf(\alpha)$, aucun ensemble M de puissance $\aleph_{\pi(\alpha)}$ ne se laisse décomposer en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \aleph_{\pi(\alpha)}$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$;*

[1]) Ou plus généralement: $\aleph_{\pi(0)} = \aleph_\gamma$, où γ est un nombre ordinal quelconque.

II. *si $\beta \geqslant cf(\alpha)$, tout ensemble M de puissance $\aleph_{\pi(\alpha)}$ se laisse decomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $2^{\aleph_{\pi(\alpha)}}$, donc de puissance $> \aleph_{\pi(\alpha)}$, d'ensembles presque disjoints et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_\beta$; si l'on a en outre $\beta = cf(\alpha)$ ou $\beta = \pi(\alpha)$, la classe $\boldsymbol{K}$ peut n'être formée que d'ensembles de puissance $\aleph_\beta$.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du th. 25 et repose sur les deux propriétés connues des nombres $\aleph_{\pi(\alpha)}$[1]):

(1) *Si α est un nombre de 2-ème espèce et $\beta < cf(\alpha)$, on a $\aleph_{\pi(\alpha)}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\pi(\alpha)}$.*

(2) *Si α est un nombre de 2-ème espèce et $\pi(\alpha) \geqslant \beta \geqslant cf(\alpha)$, on a $\aleph_{\pi(\alpha)}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha)}}$.*

Nous ne savons pas étendre ce théorème aux nombres α de 1-ère espèce. Ce n'est que dans le cas de $\beta = 0$ où une telle extension ne se heurte aux difficultés, comme le prouve le suivant

Corollaire 28. 1° *Lorsque α est un nombre ordinal de 1-ère espèce distinct de 0 ou bien un nombre de 2-ème espèce non confinal avec ω, aucun ensemble M de puissance $\aleph_{\pi(\alpha)}$ ne se laisse décomposer en une classe d'ensembles $\boldsymbol{K}$ de puissance $> \aleph_{\pi(\alpha)}$ et telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$.*

2° *Lorsque $\alpha = 0$ ou bien lorsque α est un nombre ordinal de 2-ème espèce confinal avec ω, tout ensemble M de puissance $\aleph_{\pi(\alpha)}$ se laisse décomposer en une classe $\boldsymbol{K}$ de puissance $2^{\aleph_{\pi(\alpha)}}$, donc de puissance $> \aleph_{\pi(\alpha)}$, d'ensembles dénombrables presque disjoints et par suite telle que $\mathfrak{d}(\boldsymbol{K}) \leqslant \aleph_0$.*

Démonstration. Dans l'hypothèse que α est de 2-ème espèce, le corollaire résulte directement du th. 27 où on a remplacé „β" par „0". Dans le cas où α est de 1-ère espèce distinct de 0, on a conformément à la déf. 3 $\aleph_{\pi(\alpha)}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha-1)} \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_{\pi(\alpha-1)}} = \aleph_{\pi(\alpha)}$; en posant donc dans le cor. 3: $\mathfrak{m} = \aleph_{\pi(\alpha)}$ et $\mathfrak{p} = \aleph_0$, on conclut que la décomposition de M, décrite sous 1°, est en effet impossible. Enfin, le cas de $\alpha = 0$ a été examiné antérieurement au cor. 12.

Les cas particuliers les plus intéressants du cor. 28 s'obtiennent en posant: $\alpha = 0$ ($\aleph_{\pi(\alpha)} = \aleph_0$, cf. cor. 12), $\alpha = 1$ ($\aleph_{\pi(\alpha)} = 2^{\aleph_0}$, cf. cor. 6) et enfin $\alpha = \omega$ ($\aleph_{\pi(\alpha)} = \aleph_0 + 2^{\aleph_0} + 2^{2^{\aleph_0}} + \ldots$).

[1]) Cf. mon article déjà cité, Fund. Math. VII, p. 9 et 10.