Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-continu d'un continu jordanien et plan soit lui-même jordanien.

Par

Stanisława Nikodym (Cracovie).

M. J. R. Kline, pendant son séjour à Cracovie, m'a proposé le problème suivant: chercher une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-continu vrai C d'un continu jordanien J soit lui-même jordanien, cette condition n'étant exprimée que par une propriété de l'ensemble $J-C$ [1]). C'est dans cet ordre d'idées que j'ai trouvé pour les continus J plans une condition exprimant une sorte d'accessibilité du côté de $J-C$ pour les points de la frontière relative [2]) $C.\overline{J-C}$. Le présent travail a pour but d'etablir cette condition.

Dans la suite nous considérons des continus jordaniens ordinaires ou généralisés (au sens de M. Mazurkiewicz [3]). On appelle donc *jordanien* tout continu J qui est localement connexe [4]) dans tout son point a. C'est-à-dire: pour tout entourage (cercle) $\varepsilon(a)$ du point a on peut trouver un autre $\delta(a)$ de sorte que tout point $b \varepsilon J.\delta(a)$ puisse être relié avec a par un sous-continu de $J.\varepsilon(a)$. On obtient une définition équivalente, si l'on remplace dans l'énoncé

[1]) Si J est constitué par le plan entier et C est borné, une telle condition est fournie par le théorème suivant de M. R. L. Moore: Chaque domaine saturé du complémentaire de C doit être uniformément „connected im Kleinen" et en outre, quel que soit $\varepsilon > 0$, le nombre de domaines saturés du complementaire dont le diamètre est $> \varepsilon$ doit être fini.

[2]) On désignera par $\overline{E}$ la somme de l'ensemble E et de son dérivé.

[3]) *Sur les lignes de Jordan. Fund. Math.* I., p. 193.

[4]) Dans ses traveaux fondamentaux sur les continus jordaniens M. Mazurkiewicz a employé le mot „point de 1-er genre". ibid. p. 170.

ci-dessus le mot „un sous-continu de $J.\varepsilon(a)$" par „un arc simple contenu dans $J.\varepsilon(a)$".

En ce qui concerne les notations, nous désignerons par $S(x, a)$ le cercle ouvert de rayon a et centré en x. $\mathfrak{L}_s[A, P]$ désignera la constituante de P contenant A, c'est-à-dire, le plus grand ensemble fermé et connexe contenant A et contenu dans P (n. b. s'il existe un tel ensemble) cet ensemble $\mathfrak{L}_s$ pouvant se réduire à un seul point suivant le cas.

Conformément à la terminologie généralement admise, on dit qu'un point p de la frontière F d'un domaine P est accessible du côté de P si, quel que soit le point $q \varepsilon P$, il existe un arc simple C (ou, plus généralement, un continu), tel que $p \varepsilon C$, $q \varepsilon C$, $C-(p) \subset P$. La notion d'accessibilité se prête à des généralisations et modifications de diverses sortes. Remarquons d'abord qu'au lieu de supposer que F soit la frontière du domaine P, on peut supposer que F et P ne sont que des ensembles quelconques de points.

F et P étant des ensembles nous dirons qu'un point $p \varepsilon F$ est accessible au sens large dans F et du côté de P si, quelque soit le point $q \varepsilon P$, il existe un continu C, tel que $p \varepsilon C$, $q \varepsilon C$, $C-\mathfrak{L}_s[p, F] \subset P$. La notion d'accessibilité prise soit dans le sens ordinaire soit dans le sens large peut être „localisée", d'où la définition suivante:

1. Définition. On dit qu'un point p appartenant à F est *dans F localement accessible au sens large du côté de P* si, quelque soit l'entourage $\varepsilon(p)$ du point p, on peut trouver un autre $\delta(p)$ de sorte que, pour tout point $q \varepsilon \delta(p).P$ il existe un continu C tel que $p \varepsilon C$, $q \varepsilon C$, $C-\mathfrak{L}_s[p, F.\overline{\varepsilon(p)}] \subset \varepsilon(p)$. Si l'on n'a affaire qu'avec des points et des sous-ensembles d'un continu fixe J, on peut considérer les entourages $\varepsilon(p)$ et $\delta(p)$ comme relativisés par rapport à J.

Remarquons que, dans le cas des ensembles du plan ou de l'espace, on obtient une définition équivalente en remplaçant dans l'énoncé de la définition les mots „entourages" par les mots „cercles, sphères centrées en p".

Voici maintenant le théorème dont la démonstration est le but principal du présent travail.

1. Théorème. Pour qu'un sous-continu C d'un continu jordanien plan J soit lui-même un continu jordanien, il faut et il suffit que tout point de la frontière relative de C:

$$C.\overline{J-C}$$

soit dans C localement accessible au sens large du côté de $J-C$.

Comme on verra dans la suite, le théorème n'est pas nécessairement vrai pour les continus J situés dans l'espace à 3 dimensions.

La condition du théorème exprime une propriété locale des points de la frontière relative de $J-C$, et consiste en une relation entre les points de $J-C$ et des points de C.

Nous démontrerons à la fin du présent travail qu'il n'existe aucune condition générale à la fois nécessaire et suffisante, pour qu'un sous-continu C du continu jordanien plan J soit lui-même jordanien, condition qui n'exprimerait qu'une propriété de l'ensemble $J-C$ seul; il n'existe non plus aucune condition exprimant une rélation entre les points de $J-C$ et de la frontière relative $C.J-C$.

On démontre aussi dans la suite que la condition donnée dans notre théorème est un invariant d'homéomorphie.

Pour démontrer notre théorème, nous avons besoin d'un théorème auxiliaire que j'ai retrouvé contenu implicitement (sous une forme un peu différente) dans la méthode employé, d'après M. R. L. Moore [1]), par des topologues américains.

Démontrons d'abord quelques lemmes.

Lemme I. Etant donné dans le plan une suite infinie de continus K_n dont la somme

(1) $$\Sigma K_n$$

est bornée et les diamètres surpassent un nombre positif fixe, il existe une suite partielle

(2) $$K_{\nu_n} \quad (n=1,2,\ldots)$$

et deux droites parallèles l et m telles que:

$$l.K_{\nu_n} \neq 0, \quad m.K_{\nu_n} \neq 0 \qquad \text{pour } n=1,2,\ldots$$

Démonstration. Supposons que

(3) $$\delta(K_n) > \delta > 0.$$

Formons dans le plan donné un réseau dont les mailles sont constituées par des carrés, de côté $\delta/4$. Le réseau est formé par deux systèmes de droites dont l'un soit composé de droites parallèles à l'axe x et l'autre de droites parallèles à l'axe y d'un système des coordonnées rectangulaires.

[1]) P. ex. R. L. Wilder. *Concerning continuous curves. Fund. Math.* t. VII p. 371.

L'ensemble (1) étant borné, on peut déterminer une suite finie

(4) $$l_1, l_2, \ldots, l_s \quad (s \geqslant 2)$$

de droites consécutives appartenant au premier système de droites et une suite finie

(5) $$l'_1, l'_2, \ldots, l'_t \quad (t \geqslant 2)$$

de droites consécutives appartenant au second système, de sorte que l'ensemble (1) se trouve inclus dans la bande (ouverte) l_1, l_s et à la fois dans la bande (ouverte) $l'_1\, l'_t$.

Pour tout n on peut trouver deux droites consécutives, soit dans (4), soit dans (5), de manière que ces deux droites coupent K_n. En effet, supposons que cela ne soit pas vrai. Dans ce cas le continu K_n n'a des points communs qu'avec une au plus des droites (4) de chacun des systèmes (4) et (5), parce que si K_n était coupé par $l_{v'}$ et $l_{v''}$, où $v''-v'>1$, ce continu serait coupé aussi par $l_{v'+1}$, étant donné que cette droite couperait le plan entre deux point du continu K_n. Donc K_n serait coupé par deux droites consécutives $l_{v'}, l_{v'+1}$, ce qui est contradictoire. On peut raisonner d'une manière analogue sur les droites (5). K_n n'ayant des points communs qu'avec une des droites (4) et une des droites (5) au plus, il s'ensuit que K_n est contenu dans un carré de côté $=\dfrac{\delta}{2}$ et par conséquent $\delta(K_n) \leqslant \dfrac{\delta}{2}\sqrt{2} < \delta$, ce qui est impossible à cause de la relation (3): $\delta(K_n) > \delta$.

Supposons donc que K_n soit coupé par deux droites $k^{(n)}, l^{(n)}$ qui forment une paire de droites consécutives soit de (4), soit de (5).

L'ensemble de toutes les différentes paires de droites consécutives dans (4) et (5) étant fini et l'ensemble de K_n étant infini, il en résulte qu'il existe une paire $k=k^{(i)}$, $l=l^{(i)}$ de droites et une suite infinie

(6) $$K_{\nu_1}, K_{\nu_2}, \ldots$$

partielle tirée de la suite $\{K_n\}$, de sorte que chaque continu (6) soit coupé par les droites $k^{(i)}$ et $l^{(i)}$.

Lemme II. Soit dans le plan un continu borné K ayant des points communs avec chacune de deux droites parallèles l et k. Dans ces conditions il existe un sous-continu K_1 de K tel que

1) $K_1 . l \neq 0 \qquad K_1 . k \neq 0$,
2) K_1 soit contenu dans la bande fermée (l, k).

Démonstration. Désignons par B la bande ouverte et par $\overline{B}$ la bande fermée dont la frontière et $l+k$.

Pour démontrer ce lemme il suffit évidemment de supposer que

$$K - \overline{B} \neq 0. \tag{1}$$

L'ensemble K et par conséquent $K.\overline{B}$ étant borné, il existe deux segments de droites EF et GH fermés et perpendiculaires à k tels que $E \epsilon l$, $G \epsilon l$, $F \epsilon k$, $H \epsilon k$ et qu'en outre $K.B$ soit contenu dans le rectangle fermé $\overline{R}$ ainsi produit et que $K.EF = 0$, $K.GH = 0$. On a donc $K.\overline{B} = K.\overline{R}$. Parmi les points du rectangle ouvert R il y a des points de $K.\overline{B}$. Cela résulte du fait que toute droite m illimitée et contenue dans la bande ouverte B coupe le plan entre deux points de K dont l'un se trouve sur l et l'autre sur k.

Déterminons pour chaque point $a \epsilon K.R$ le continu (ou point) saturé contenant a et contenu dans $\overline{R}.K$.

Désignons[1] ce continu par $\mathfrak{L}_s(a, \overline{R}.K)$. Remarquons que a, qui appartient au continu K, est en même temps un point intérieur de l'ensemble fermé et borné $\overline{R}$. Par suite, en tenant compte de la relation: $K - \overline{R} \neq 0$, déduite de (1), on obtient d'un lemme[2] de M. Mazurkiewicz la relation suivante

$$\mathfrak{L}_s(a, \overline{R}.K) . \mathcal{F}(\overline{R}) \neq 0 \text{ [3]}.$$

Les côtés EF et GH n'ayant pas de points communs avec K on tire de cette dernière relation:

$$\mathfrak{L}_s(a, \overline{R}.K).(l+k) \neq 0.$$

L'ensemble $\overline{R}.K$ peut être considéré comme la somme de deux classes λ et μ dont la première λ se compose de tous les points a pour lesquels

$$\lambda) \qquad \mathfrak{L}_s(a, \overline{R}.K).l \neq 0,$$

[1]) Janiszewski. *Thèse* p. 20 et E. Mazurkiewicz *Fund. Math. Sur les lignes de Jordan*. p. 175.

[2]) ibid. lemme II.

[3]) $\mathcal{F}(E)$ désigne la frontière de E.

et dont la seconde μ est définie comme l'ensemble de tous les points a pour lesquels:

$$\mu) \qquad \mathfrak{L}_s(a, \overline{R}.K).k \neq 0$$

Nous prouverons que $\lambda.\mu \neq 0$. Démontrons d'abord que les ensembles λ et μ sont fermés.

Soit donc $\lim a_m = a_0$, $\quad a_m \epsilon \lambda \quad$ pour $\quad m = 1, 2, \ldots$

Posons:

$$M_m = \mathfrak{L}_s(a_m, \overline{R}.K), \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Choisissons une suite de points $\{p_m\}$, où

$$p_m \epsilon l . M_m.$$

L'ensemble des p_m $(m = 1, 2, \ldots)$ étant borné, on en peut extraire une suite convergente

$$p_{\mu_1}, p_{\mu_2}, \ldots$$

Désignons sa limite par p_0.

En vertu d'un théorème de M. Zarankiewicz, la suite infinie

$$M_{\mu_1}, M_{\mu_2}, \ldots$$

contient une suite convergente d'ensembles[1]), dont la limite M contient évidemment les points a_0 et p_0. D'ailleurs M est, en vertu d'un théorème connu de Janiszewski[2]), un continu ou un point. Mais on voit que, si $q \epsilon M$, on a $q \epsilon K$, parce que, d'après la définition de la limite d'une suite convergente d'ensembles, tout cercle centré en q contient des points de M_{μ_m} à partir d'un certain indice m. Le point q est donc la limite d'une suite de points appartenant à l'ensemble fermé K, d'où $q \epsilon K$.

[1]) *Fund. Math.* IX. *Sur les points de division dans les ensembles connexes* p. 4. Théor. 1.

On dit que A est *limite d'une suite infinie d'ensembles* A_n, si A est à la fois ensemble limite et ensemble d'accumulation pour A_n (selon la terminologie de Janiszewski. *Thèse*).

Dans ce cas on dit que A_n est une *suite convergente*, et on écrit $\mathrm{Lim}\, A_n = A$. Le théorème en question dit que de toute suite infinie d'ensembles on peut extraire une suite partielle convergente.

[2]) *Thèse* p. 20. Théor. I. M est l'ensemble d'accumulation pour la suite des continus.

D'autre part $M \subset \overline{R}$.

Il s'ensuit que M est un point ou un sous-continu de $\overline{R}.K$ et contient a_0 ainsi qu'un point $p \epsilon l$.

Comme

$$M \subset \mathfrak{L}_s(a_0, \overline{R}.K),$$

on obtient enfin que $a_0 \epsilon \lambda$.

D'une manière analogue on démontre que l'ensemble μ est fermé.

Cela posé, supposons que $\lambda . \mu = 0$.

Dans ce cas on a $\lambda . k = 0$ et $\mu . l = 0$, parce que, dans le cas contraire, tout point de $\lambda . k$ appartiendrait nécessairement a μ, d'où il résulterait

$$\lambda . \mu \neq 0.$$

On peut dire la même chose au sujet de μl.

Posons

$$K = K . \overline{B}_l + K . \overline{B} + K \overline{B}_k,$$

où B_l et B_k désignent les demi-plans ouverts déterminés par les droites l et k et ne contenant pas respectivement k et l.

On en déduit:

$$K = (K . \overline{B}_l + \lambda) + (\mu + K . \overline{B}_k). \tag{2}$$

Les ensembles spécifiés dans les parenthèses sont fermés et non vides, puisque $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Donc:

$$(K . \overline{B}_l + \lambda)(\mu + K . \overline{B}_k) = \lambda . \mu + \lambda . K . \overline{B}_k +$$
$$+ \mu . K . \overline{B}_l + K . \overline{B}_l . \overline{B}_k.$$

Le premier terme de la somme est nul en vertu de l'hypothèse, le dernier l'est aussi évidemment. Quant au second terme on a:

$$\lambda . K \subset \overline{B},$$

d'où

$$\lambda . K . \overline{B}_k \subset \overline{B} . \overline{B}_k = k$$

$$\lambda . K . \overline{B}_k \subset \lambda . k = 0$$

et d'une manière analogue on démontre que

$$\mu . K . \overline{B}_l = 0.$$

La formule (2) nous donne ainsi une décomposition du continu K en deux ensembles fermés, non vides et sans points communs, ce qui est impossible. La supposition que $\lambda . \mu = 0$ étant donc fausse, il s'ensuit qu'il existe un point $a \epsilon \overline{R}$ tel que:

$$\mathfrak{L}_s(a; \overline{R} . K) . l \neq 0$$

et

$$\mathfrak{L}_s(a; \overline{R} . K) . k \neq 0.$$

L'ensemble $\mathfrak{L}_s(a; \overline{R}, K)$ représente donc le sous-continu cherché K' de K.

Lemme III. Soient l et h deux droites parallèles (dans le plan) et $\overline{ab}$ et $\overline{cd}$ deux vecteurs de directions opposées dont le premier est situé sur l et le second sur h. Soient K et L deux continus bornés tels que:

1) $a \epsilon K$, $c \epsilon K$, 2) $b \epsilon L$, $d \epsilon L$,
3) K et L soient contenus dans la bande fermée (l, h).

Dans ces conditions on a:

$$K . L \neq 0.$$

Démonstration. Pour démontrer cela il suffit évidemment de supposer que

$$L . K . l = 0 \quad \text{et} \quad L . K . h = 0.$$

L'ensemble $K + L$ étant borné on peut trouver quatre m, n, p, q jouissant des propriétés suivantes:

1) $m, n \epsilon l$, $p, q \epsilon h$,
2) les segments (m, p) et (n, q) sont perpendiculaires à l et h,
3) $L + K$ est contenu dans les rectangle fermé $\overline{R} = mnqp$.
4) $L + K$ n'a pas de points communs ni avec le segment fermé (m, p) ni avec (n, q).

On peut démontrer le lemme proposé p. ex. en approchant les continus en question par des arcs simples situés (leurs extrémités excluses) dans le rectangle ouvert R et en leurs appliquant le théorème de Jordan sur la courbe simple fermée.

Néanmoins nous préférons de présenter ici le raisonnement suivant due à M. Kuratowski.

Désignons par α l'arc simple (fermé) $bampd$, par β l'arc simple (fermé) $bnqcd$ et par γ la frontière du rectangle R.

En vertu des hypothèses on a

$$\alpha . K \neq 0 \neq \beta . K \quad \text{et} \quad (\alpha . K) . (\beta . K) = 0.$$

Il existe donc un continu K_1 contenu dans K et irréductible[1] entre $\alpha . K$ et $\beta . K$. Alors l'ensemble $S = K_1 - \gamma$ est connexe et on a en outre

$$\bar{S} . \alpha \neq 0 \neq \bar{S} . \beta.$$

Supposons que

$$L \subset \bar{R} - K. \tag{1}$$

Soit $a_1 \epsilon \bar{S} . \alpha$ et $c_1 \epsilon \bar{S} . \beta$. Joignons les points a_1 et c_1 par une ligne simple brisée M se trouvant, ses extrémités excluses, en dehors du rectangle R. Soit $r \epsilon M$ et $s \epsilon S$. Or, l'ensemble $\alpha + L$ ne découpe pas le plan entre s et r, l'ensemble $S + (c_1) + M - (a_1)$ étant connexe. De même $\beta + L$ ne découpe pas le plan entre s et r, puisque $S + (a_1) + M - (c_1)$ est connexe. D'ailleurs on a

$$(\alpha + L) . (\beta + L) = \alpha . \beta + L = L.$$

d'où on déduit que l'ensemble $\alpha + \beta + L$ ne découpe pas le plan entre s et r ce qui est impossible, étant donné que le point s se trouve dans l'intérieur tandisque r se trouve à l'extérieure de la courbe fermée γ.

Le supposition (1) étant fausse, il s'ensuit que le lemme est vrai.

2. **Definition.** Nous dirons que le point p est *un point de convergence monotone pour la suite infinie de continus*

$$K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$$

s'il existe une suite infinie partielle $\{K_{\lambda_n}\}$, une suite infinie $\{L_n\}$ de sous-continus respectifs de K_{λ_n} et un nombre $\varepsilon > 0$ de sorte que, quel que soit le nombre δ, satisfaisant à l'inégalité $0 < \delta < \varepsilon$,

1) il existe un indice n, tel que

$$L_n . \mathcal{S}(p, \delta) \neq 0;$$

2) si $q \epsilon L_n . \mathcal{S}(p, \delta)$, tout sous-continu de $\mathcal{S}(p, \varepsilon)$ qui relie q avec p, coupe L_{n+1}.

[1] C. Kuratowski et S. Straszewicz. *Généralisation d'un théorème de Janiszewski. Fund. Math.* T. XII. p. 152. f. f.

Théorème auxiliaire. Si K est le continu de convergence[1]) de la suite de continus $\{K_n\}$ et si $K + \sum_{n=1}^{\infty} K_n$ est borné, il existe sur K au moins un point de convergence monotone pour $\{K_n\}$.

Démonstration.

1. La somme

$$K + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \tag{1}$$

étant bornée, on peut considérer les diamètres $\delta(K)$, $\delta(K_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$ de ces continus.

Je dis que les diamètres $\delta(K_n)$ surpassent un nombre positif, fixe.

Il suffit évidemment de démontrer qu'il existe un indice n_0 à partir duquel les diamètres $\delta(K_n)$ sont $\geqslant \frac{\delta'}{2}$, où on a posé $\delta' = \delta(K)$.

Soient a, b deux points de K tels que leur distance $\varrho(a, b)$ soit égale à δ'. Il existe nécessairement de tels points. Les points a et b appartenant au continu de convergence K, les relations

$$\mathcal{S}\left(a, \frac{\delta'}{8}\right) . K_n \neq 0 \qquad \mathcal{S}\left(b, \frac{\delta'}{8}\right) . K_n \neq 0 \tag{2}$$

sont vérifiées pour tous les indices n à partir d'un certain indice n_0. Choisissons les suites infinies de points:

$$\{a_n\} \quad \text{et} \quad \{b_n\}, \quad (n \geqslant n_0),$$

de sorte que

$$a_n \epsilon \mathcal{S}\left(a, \frac{\delta'}{8}\right) . K_n$$

$$b_n \epsilon \mathcal{S}\left(b, \frac{\delta'}{8}\right) . K_n.$$

[1]) „*Sur les points de division dans les ensembles connexes*" par C. Zarankiewicz, *Fund. Math.* IX. p. 1927.

En modifiant légèrement la définition donnée par M. Zarankiewicz nous dirons dans la suite que K est *un continu de convergence pour la suite infinie $\{K_n\}$ de continus*, si

1°. $K_n . K_m = 0$. (pour $n \neq m$).

2°. $K . \sum_{n=1}^{\infty} K_n = 0$.

3°. $L = \operatorname{Lim} K_n$.

On a:

$$\varrho(a_n, a) < \frac{\delta'}{8}, \quad \varrho(b_n, b) < \frac{\delta'}{8},$$

d'où

$$\begin{aligned}\varrho(a_n, b_n) &\geqslant \varrho(a, b_n) - \varrho(a, a_n)\\ &\geqslant \varrho(a, b) - \varrho(b, b_n) - \varrho(a, a_n)\\ &\geqslant \delta' - \delta'/4 > \delta'/2.\end{aligned}$$

Le diamètre $\delta(K_n)$ étant $\geqslant \varrho(a_n, b_n)$, il en résulte que pour $n \geqslant n_0$:

$$\delta(K_n) \geqslant \frac{\delta'}{2}.$$

On a $\delta(K_n) > \delta$, où δ est un nombre positif inférieur à $\frac{\delta'}{2}$ et à $\delta(K_n)$ pour $n < n_0$:

2. Les diamètres des K_n étant $> \delta > 0$ et leur somme $\sum_{n=1}^{\infty} K_n$ étant bornée, on peut leur appliquer le lemme I.

Soient donc l, k deux droites parallèles et K_{ν_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie (tirée de K_n) telle que

$$K_{\nu_n} . l \neq 0 \quad \text{et} \quad K_{\nu_n} . k \neq 0 \quad \text{pour } n = 1, 2, \ldots$$

En vertu du Lemme II il existe pour chaque K_{ν_n} un sous continu K'_{ν_n} tel que

1. $K'_{\nu_n} \subset \overline{B}$ (B désignant la bande ouverte déterminée par k et l).
2. $K'_{\nu_n} . l \neq 0$, $K'_{\nu_n} . k \neq 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Nous avons ainsi construit une suite infinie de continus:

$$K'_{\nu_1}, K'_{\nu_2}, K_{\nu_n}, \ldots \tag{10}$$

jouissant des propriétés suivantes:

$$K'_{\nu_n} \subset K_{\nu_n}$$

$$K'_{\nu_n} . l \neq 0 \qquad K'_{\nu_n} . k \neq 0 \tag{11}$$

$$K'_{\nu_n} \subset B, \tag{12}$$

$$K'_{\nu_n} . K'_{\nu_m} = 0, \quad \text{si } n \neq m, \tag{13}$$

(puisque $K_{\nu_n} . K_{\nu_m} = 0$),

$$\sum_{n=1}^{\infty} K'_{\nu_n} \text{ est bornée.} \tag{14}$$

3. Envisageons maintenant la suite infinie d'ensembles situés sur la droite l:

$$K'_{\nu_1} . l, \; K'_{\nu_2} . l, \ldots, \; K'_{\nu_n} . l, \ldots \tag{15}$$

et tirons en une suite de points

$$p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \ldots, p_{\nu_n}, \ldots \tag{16}$$

où

$$p_{\nu_n} \in K'_{\nu_n} . l \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Les ensembles K'_{ν_n} n'ayant pas, d'après (13), de points communs deux à deux, il s'ensuit que les points (16) sont différents deux à deux et, par conséquent, la suite (16) contient une suite infinie partielle monotone [1])

$$p_{\sigma_1}, p_{\sigma_2}, \ldots, p_{\sigma_n}, \ldots \tag{17}$$

La suite (17) est bornée; elle possède donc un point limite — soit p.

L'ordre des points (17) détermine une direction Φ de la droite l.

Choisissons une suite de points

$$q_{\sigma_1}, q_{\sigma_2}, \ldots, q_{\sigma_n}, \ldots, \tag{18}$$

où

$$q_{\sigma_n} \in K'_{\sigma_n} . k.$$

Je dis que les points (18) représentent une suite monotone qui détermine sur la droite k une direction s'accordant avec la direction Φ de la droite l.

Supposons que cela ne soit pas vrai, c'est-à-dire qu'il existe deux indices n' et n'', tels que les vecteurs $\overrightarrow{q_{\sigma_{n'}} q_{\sigma_{n''}}}$ et $\overrightarrow{p_{\sigma_{n'}} p_{\sigma_{n''}}}$ aient les directions opposées.

Si l'on applique le lemme III, on en déduit que

$$K'_{\sigma_{n'}} . K'_{\sigma_{n''}} \neq 0,$$

ce qui est impossible.

Il s'ensuit que (18) est une suite monotone et les points des deux suites (17) et (18) procèdent respectivement sur l et k dans la même direction Φ.

[1]) c'est-à-dire telle que tous les vecteurs $\overline{p_{\sigma_n} p_{\sigma_{n+1}}}$ aient la même direction sur la droite l.

Cela posé, envisageons la suite infinie de continus disjoints

(19) $$K'_{\sigma_1},\ K'_{\sigma_2},\ldots$$

et appliquons lui le théorème cité de M. Zarankiewicz[1]). On peut de (19) extraire une suite infinie

(20) $$K'_{\lambda_1},\ K'_{\lambda_2},\ldots,\quad (\text{où}\quad \lambda_1<\lambda_2<\ldots)$$

convergente.

Soit

(21) $$K_0=\operatorname{Lim} K_{\lambda_n}$$

K_0 est un continu ou un point, en vertu du théorème cité de Janiszewski. En outre $K_0\subset\overline{B}$, ce qui se démontre facilement en s'appuyant sur (12).

Si l'on envisage des points de $K'_{\lambda_n}.l$ et de $K'_{\lambda_n}.k$, on démontre aisément que $K.l\neq 0$ et $K.k\neq 0$, d'où il résulte que K est un continu.

Je dis que $K_0\subset K$, où K est le continu de convergence de la suite primitive $\{K_n\}$ de continus dont il est question dans l'énoncé du Théorème auxiliaire.

En effet, soit $a\in K_0$. D'après (21), tout cercle centré en a contient des points de tous les K'_{λ_n} à partir d'un certain n. Comme les K'_{λ_n} sont des sous-continus des K_{λ_n} et, de plus si $n'\neq n''$, on a toujours $\lambda_{n'}\neq\lambda_{n''}$, il s'ensuit que tout cercle centré en a contient des points d'une infinité des K_n; par conséquent a appartient à l'ensemble d'accumulation pour $\{K_n\}$.

Puisque nous avons supposé que K est le continu de convergence pour $\{K_n\}$, le dit ensemble d'accumulation est identique avec K. On a donc prouvé que $a\in K$. Comme $K_0\subset K$, on en déduit que:

$$K_0.\sum_{n=1}^{\infty}K'_{\lambda_n}=0,$$

ce qui nous montre que K_0 est le continu de convergence pour la suite $\{K_{\lambda_n}\}$.

5. Posons

$$L_n\underset{df}{=}K'_{\lambda_n}.$$

[1]) l. c. p. 4. théor. 1.

Je dis que, si C est un sous-continu de la bande fermée $\overline{B}$, borné et tel que $K_0.C\neq 0$ et $L_n.C\neq 0$, on a nécessairement $L_{n+1}.C\neq 0$ $(n=1,2,\ldots)$.

Pour démontrer cela, envisageons les points:

$$p_{\lambda_1},\ p_{\lambda_2},\ldots,\ p_{\lambda_n},\ldots$$

dont nous avons déjà parlé [voir (17), (16)] et qui appartiennent respectivement aux $L_n.l$. Envisageons aussi les $\{q_{\lambda_n}\}$, où $q_{\lambda_n}\in L_n.k$. La suite $\{K'_{\lambda_n}\}$ étant une suite partielle de $\{K'_{\sigma_n}\}$, les points

$$p_{\lambda_1}\lesssim p_{\lambda_2},\ldots\lesssim p_{\lambda_n}\lesssim\ldots$$

et les points

$$q_{\lambda_1}\lesssim q_{\lambda_2}\ldots\lesssim q_{\lambda_n}\lesssim\ldots$$

forment des suites monotones et leurs ordres correspondent aux mêmes directions des droites l et k respectivement. Le point

$$q_0=\lim_{n\to\infty}q_{\lambda_n}$$

se trouve évidemment sur $K_0.k$ et l'on a:

$$q_{\lambda_n}\lesssim q_0$$

pour tout indice.

Les vecteurs $\overrightarrow{q_0\,q_{\lambda_n+1}}$ et $\overrightarrow{p_{\lambda_n+1}\,p_{\lambda_n}}$ sont donc de directions opposées et, par conséquent, le contiuu L_{n+1} joignant dans $\overline{B}$ le point p_{λ_n+1} avec q_{λ_n+1} et le continu (K_0+C+L_n) joignant dans $\overline{B}$ le point q_0 avec p_{λ_n}, ont necessairement au moins un point commun. Cela resulte du lemme III.

On a donc

$$L_{n+1}.(K_0+C+L_n)\neq 0,$$

d'où, comme

$$L_{n+1}.K_0=0\quad\text{et}\quad L_{n+1}.L_n=0,$$

on obtient:

$$C.L_{n+1}\neq 0.$$

Soit maintenant un point $p\in K_0$, se trouvant dans l'intérieur de la bande. Il existe certainement de tels points. Soit $2\varepsilon>0$ la distance de p à la frontière de la bande. Traçons le cercle $\mathcal{S}(p,\varepsilon)$ et envisageons un nombre $\delta<0$ tel que $\delta<\varepsilon$, arbitraire d'ailleurs. Supposons que $q\in L_n.\mathcal{S}(p,\delta)$ et joignons q avec p par un continu M arbitraire ne sortant pas du cercle $\mathcal{S}(p,\varepsilon)$. Je dis que $M.L_{n+1}\neq 0$.

En effet on a $M \subset \overline{B}$, donc, en vertu de ce que nous venons d'établir

$$M \cdot L_{n+1} \neq 0.$$

Remarquons que, quel que soit $\delta > 0$ et $< \varepsilon$, il existe un indice n, tel que $L_n \cdot \mathcal{S}(p, \delta) \neq 0$. Nous avons ainsi trouvé une suite partielle $\{K_{\lambda_n}\}$ extraite de $\{K_n\}$, une suite de sous-continus $\{L_n\}$ des continus $\{K_n\}$, un point p situé sur le continu K de convergence de la suite $\{K_n\}$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tels que, quelque soit δ, satisfaisant à la condition $0 < \delta < \varepsilon$, tout sous-continu de $\mathcal{S}(p, \varepsilon)$ joignant p avec un point quelconque de $L_n \cdot \mathcal{S}(p, \delta)$, coupe nécessairement L_{n+1}. C'est-à-dire, nous avons démontré l'existence d'un point de convergence monotone pour la suite $\{K_n\}$.

Le théorème auxiliaire étant établi, passons à la démonstration du théorème 1.

La condition est nécessaire.

En effet, supposons que C soit un sous-continu jordanien du continu J jordanien et plan. Soit $\varepsilon > 0$ et

$$p \in C \cdot \overline{(J - C)}.$$

Le continu C étant jordanien, on peut trouver un $\delta_1 > 0$ et $< \varepsilon$ tel que tout point de $C \cdot \mathcal{S}(p, \delta_1)$ puisse être relié avec p par un continu faisant partie de $C \cdot \mathcal{S}(p, \varepsilon)$.

D'autre part, p est un point du continu jordanien J. On peut donc trouver un $\delta > 0$ et $< \delta_1$ tel que tout point de $J \cdot \mathcal{S}(p, \delta)$ puisse être relié avec p par un sous-continu de $J \cdot \mathcal{S}(p, \delta_1)$.

Soit $q \in (J - C) \cdot \mathcal{S}(p, \delta)$ et L un sous-continu joignant p avec q et tel que

$$L \subset \mathcal{S}(p, \delta_1) \cdot J.$$

On a:

$$L \subset (J - C) \cdot \mathcal{S}(p, \delta_1) + C \cdot \mathcal{S}(p, \delta_1).$$

Je dis que

$$C \cdot \mathcal{S}(p, \delta_1) \subset T,$$

où on a posé $T = \mathfrak{L}_s[p, C \cdot \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}]$.

En effet, tout point a de $C \cdot \mathcal{S}(p, \delta_1)$ peut être relié avec p par un sous-continu K_a de $C \cdot \mathcal{S}(p, \varepsilon)$. Il s'ensuit que $(K_a + T)$ est un continu contenant p et contenu dans $C \cdot \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}$, donc

$$(K_a + T) \subset T,$$

d'où l'on déduit

$$a \in T$$

et par conséquent

$$C \cdot \mathcal{S}(p, \delta_1) \subset T.$$

Il s'ensuit que

$$L \subset (J - C) + \mathfrak{L}_s[p, C \cdot \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}]$$

et

$$L \subset \mathcal{S}(p, \varepsilon).$$

Par suite, tout point $q \in (J - C) \cdot \mathcal{S}(p, \delta)$ peut être relié avec p par un continu situé dans $\mathcal{S}(p, \varepsilon)$, les points de ce continu appartenant soit à $J - C$ soit à la constituante de $C \cdot \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}$ contenant p.

La condition est suffisante.

Pour rendre la démonstration plus intuitive, nous allons donner d'abord son idée générale. La démonstration sera indirecte. On suppose que pour un sous-continu C non-jordanien du continu jordanien J la condition du théorème a lieu. Dans ce cas nous démontrons l'existence d'une suite infinie de sous-continus disjoints D_n de ce continu telle que le continu de convergence K de cette suite ne soit composé que de points dans lesquels C n'est pas localement connexe. En vertu du théorème auxiliaire on trouvera sur K un point p de convergence monotone pour $\{D'_n\}$. Ce point p, comme on le verra, appartient nécessairement à $C \cdot \overline{J - C}$. Par conséquent, il est localement accessible au sens large sur C du côté de $J - C$. Comme p est, d'autre part, un point de connexité locale par rapport à J, on en deduira une contradiction qui achèvera la démonstration.

Passons à la démonstration rigoureuse.

Démonstration.

1. Supposons que la condition soit remplie et que C ne soit pas jordanien. Il existe donc sur C un point p_0 dans lequel C n'est pas localement connexe.

Considérons le point p_0 et appliquons lui le raisonnement suivant du à M. Kuratowski [1]).

Il existe un nombre $\lambda > 0$ et une suite infinie $\{p_n\}$ de points, tels que

(1)
1) $\lim p_n = p_0$,
2) $p_n \epsilon C . \mathcal{S}\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right)$,
3) si un sous-continu de $C . \overline{\mathcal{S}(p_0, \lambda)}$ contient p_0, il ne contient aucun point de la suite $\{p_n\}$.

Posons

(2) $$B_n = \mathfrak{L}_s[p_n, C . \overline{\mathcal{S}(p_0, \lambda)}], \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

et déterminons l'ensemble d'accumulation A pour la suite $\{B_n\}$. On a $A \subset C$. De plus A est un continu auquel appartient p_0. M. Kuratowski démontre que tout sous-continu de $A . \mathcal{S}(p_0, \lambda)$ contenant p_0 ne contient que des points dans lesquels C n'est pas localement connexe.

On a

(2a) $$B_n . A = 0,$$

parce que dans le cas contraire, le point p_n pourrait être relié avec p par $B_n + A$, donc par un sous-continu de $C . \overline{\mathcal{S}(p_0, \lambda)}$ ce qui est impossible.

2. Cela posé, reprenons le raisonnement se trouvant chez M. Zarankiewicz dans son travail cité plus haut [2]).

On démontre que pour chaque indice n_0 il existe au plus un nombre fini d'indices différents n tels que

$$B_{n_0} . B_n \neq 0.$$

Cela permet de définir la suite infinie de continus $\{D_n\}$ que voici: On pose $D_1 = B_1$ et on désigne par D_{n+1} le continu B_t, où $t = t(n)$ est le premier indice $> n$ et tel que B_t n'ait pas de points communs avec

$$\sum_{k=1}^{n} D_k.$$

[1]) *Quelques propriétés topologiques de la demi-droite.* *Fund. Math.* III. p. 60, 61.
[2]) *Sur les points de division.* *Fund. Math.* IX. Lemme 3. p. 132.

On a donc:

(3) $$D_n = B_{t(n)},$$

où $t(n) \to \infty$ quand $n \to \infty$.

De la définition ci-dessus on tire les relations suivantes

(4) $$D_n \subset C . \overline{\mathcal{S}(p_0, \lambda)},$$

(5) $$D_n . D_m = 0 \text{ toujours, si } n \neq m$$

(6) $$D_n = \mathfrak{L}_s[D_n, C . \overline{\mathcal{S}(p_0, \lambda)}].$$

Répétons maintenant une partie du même raisonnement pour le cercle $\mathcal{S}\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right)$.

On a d'après (1): $p_{t(n)} \epsilon \mathcal{S}\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right)$.

D'ailleurs, en vertu de (2) et (3),

(7) $$p_{t(n)} \epsilon D_n.$$

Posons

(8) $$D'_n = \mathfrak{L}_s\left[p_{t(n)}, C . \overline{\mathcal{S}\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right)}\right].$$

On a

(9) $$D'_n \subset D_n . \overline{\mathcal{S}\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Donc

(10) $$D'_n . D'_m = 0$$

toujours pour $n \neq m$.

M. Zarankiewicz a démontré que de toute suite infinie d'ensembles on peut extraire une autre pour laquelle l'ensemble d'accumulation et l'ensemble limite (selon la terminologie de Janiszewski) coïncident.

Soit

$$D'_{r_1}, D'_{r_2}, \ldots, D'_{r_n}, \ldots$$

une telle suite.

Posons

(11) $$K = \operatorname{Lim} D'_{r_n}.$$

K est un continu puisque les diamètres des D'_n surpassent assurément un nombre positif fixe.

Je dis que

(12) $$K \subset A,$$

où A est l'ensemble d'accumulation de B_n.

En effet, soit $x \in K$. Il existe une suite infinie de points $\{x_n\}$ tendant vers x, cette suite satisfaisant à la condition

$$x_n \in D'_{r_n} \subset B_{t(r_n)}.$$

D'autre part, d'après la définition des D_{r_n}, on a $t(r_n) \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Il s'ensuit que dans tout entourage de x il existe des points appartenant à une infinité de continus B_n ce qui démontre que $x \in A$.

Mais d'après (2a), nous savons que

$$B_{t(r_n)} \,.\, A = 0. \tag{13}$$

Donc:

$$K . \sum_{n=1}^{\infty} D'_{r_n} = 0. \tag{14}$$

Comme d'après (10) les D'_{r_n} sont disjoints, on peut dire que K est „le continu de convergence"[1]) pour la suite:

$$D'_{r_1}, D'_{r_2}, \ldots, D'_{r_n}, \ldots$$

3. Cela étant, appliquons le théorème auxiliaire en vertu duquel il existe sur K un point p de convergence monotone pour $\{D'_{r_n}\}$.

D'après (12) on a

$$p \in K . A. \tag{15}$$

Je dis que p est un point de 2e genre (de M. Mazurkiewicz) pour le continu C.

En effet on a, en vertu de (9), (11),

$$K \subset \overline{\mathcal{S}\left(p_0, \frac{\lambda}{2}\right)}.$$

Donc, d'après (12)

$$K \subset A \,.\, \mathcal{S}(p_0, \lambda).$$

On a $p_0 \in K$, car $p_0 = \lim p_{t(n)}$, $p_{t(n)} \in D'_n$ (d'après (8)), $\lim D'_{\nu_n} = K$. En tenant compte de ce que K contient p_0 et est un sous-continu de $A \,.\, \mathcal{S}(p_0, \lambda)$, on voit, en vertu de No 1, que dans tout point de K le continu C n'est pas localement connexe.

Par conséquent p, comme point de K, est un point dans lequel C n'est pas localement connexe.

[1]) voir p. 169 du présent travail (Note [1])).

Démontrons maintenant que:

$$p \in C . \overline{J - C}. \tag{16}$$

Cela résulte du fait que, si un point appartenant à un sous-continu C du continu de Jordan J, est un point relativement intérieur de C, il est nécessairement de 1° genre pour J. Donc comme dans le point p le continu C n'est pas localement connexe, il appartient nécéssairement à la frontière relative de C.

4. Le point p étant un point de convergence monotone pour $\{D'_{r_n}\}$ il existe:

1°. une suite partielle $\{D'_{s_n}\}$ de la suite $\{D'_{r_n}\}$,

2°. une suite de sous-continus $\{L_n\}$ de $\{D'_{s_n}\}$:

$$L_n \subset D'_{s_n}, \tag{17}$$

3°. un nombre $\varepsilon > 0$, tel que, si $0 < \delta < \varepsilon$,

α) il existe un nombre n pour lequel

$$\mathcal{S}(p, \delta) \,.\, L_n \neq 0,$$

β) si

$$x \in L_n \,.\, \mathcal{S}(p, \delta),$$

tout continu joignant x avec p et se trouvant dans $\mathcal{S}(p, \varepsilon)$ coupe nécessairement L_{n+1}.

Comme $p \in \mathcal{S}(p_0, \lambda)$, on peut trouver un $\varepsilon_1 > 0$ tel que

$$\varepsilon_1 < \varepsilon, \quad \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)} \subset \mathcal{S}(p_0, \lambda). \tag{18}$$

Le point p, comme appartenant à la frontière relative de C est, par hypothèse, sur C localement accessible dans le sens large du coté de $J - C$. On peut donc trouver un nombre ε_2 tel que

$$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

et que tout point de $(J - C) \,.\, \mathcal{S}(p, \varepsilon_2)$ puisse être relié avec p par un sous-continu de $\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)$ dont tous les points appartiennent soit à

$$(J - C) \,.\, \mathcal{S}(p, \varepsilon_1), \quad \text{soit à} \quad \mathcal{L}_s[p, C \,.\, \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)}].$$

D'autre part, p étant un point de 1e genre pour le continu J on peut trouver un nombre $\varepsilon_3 > 0$ tel que $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$ et, quel que soit le point

$$x \in J \,.\, \mathcal{S}(p, \varepsilon_3),$$

il existe un arc simple joignant p avec x et contenu dans $J \,.\, \mathcal{S}(p, \varepsilon_2)$.

On a

(19) $$\mathcal{S}(p, \varepsilon) \subset \mathcal{S}(p_0, \lambda).$$

5. Il existe un indice n_0 tel que:

$$L_{n_0} . \mathcal{S}(p, \varepsilon_3) \neq 0.$$

Soit

(19′) $$a \in L_{n_0} . \mathcal{S}(p, \varepsilon_3)$$

et soit L un arc simple issu de a, aboutissant en p et tel que

(20) $$L \subset J . \mathcal{S}(p, \varepsilon_2).$$

Rangeons les points de L dans la direction de a à p. On a nécessairement

(21) $$L . L_{n_0+1} \neq 0.$$

Soit b le premier point de l'arc L appartenant à L_{n_0+1}. Je dis que $L(a, b)$ [1]) contient au moins un point de $J - C$. Si cela n'était pas vrai, on aurait

(22) $$L(a, b) \subset C,$$

d'où, en tenant compte de ce que, d'après (19) et (20):

$$L \subset \mathcal{S}(p, \varepsilon_2) \subset \mathcal{S}(p_0, \lambda),$$

et que, d'après (9) et (17):

$$L_{n_0} + L(a, b) + L_{n_0+1} \subset C . \mathcal{S}(p_0, \lambda),$$

on déduirait, en vertu de (17), que

$$D_{s_{n_0}} + L(a, b) + D_{s_{n_0+1}}$$

est un continu situé dans $C . \overline{\mathcal{S}(p_0, \lambda)}$ ce qui n'est pas d'accord avec les relations:

$$D_{s_{n_0}} . D_{s_{n_0+1}} = 0$$

$$D_{s_{n_0}} = \mathfrak{L}_s[D_{s_{n_0}}, C . \overline{\mathcal{S}(p_0, \lambda)}]$$

qui résultent de (10) et (6).

Soit donc

(23) $$c \in L(a, b) . (J - C).$$

Alors

(24) $$L(a, c) . L_{n_0+1} = 0.$$

[1]) $L(a, b)$ désigne l'arc simple fermé joignant a et b et contenu dans L.

Comme $c \in (J - C)\, \mathcal{S}(p, \varepsilon_2)$, il existe un continu M joignant c avec p et tel que

(25) $$M \subset J - C + \mathfrak{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)}]$$

et

(26) $$M \subset \mathcal{S}(p, \varepsilon_1).$$

Je dis que

(27) $$\mathfrak{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)}] . L_n = 0 \quad (\text{pour } n = 1, 2, \ldots).$$

En effet, si l'on avait pour un indice n:

$$\mathfrak{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)}) . L_n \neq 0,$$

on aurait, d'après (17):

$$\mathfrak{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)}] . D'_{s_n} \neq 0,$$

d'où, comme d'après (15): $p \in K$, et comme d'après (12): $K \subset A$, on obtiendrait que

$$A + \mathfrak{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)}] + D'_{s_n}$$

serait un continu joignant le point $p_{\iota(s_n)}$ avec p_0 ce qui est impossible (voir N° 1).

La relation (27) est donc démontrée. On a ensuite:

$$L_n . (J - C) = 0.$$

On en déduit, en vertu de (25) que

(28) $$M . L_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

d'où, d'après (24):

(29) $$[M + L(a, c)] . L_{n_0+1} = 0.$$

D'autre part, le continu $M + L(a, c)$ qui joint p avec $a \in L_n$ et se trouve situé (d'après (20)) dans $\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)$, coupe nécessairement L_{n_0+1}.

On obtient ainsi la relation:

$$[M + L(a, c)] . L_{n_0+1} \neq 0,$$

qui est en contradiction avec (29).

La supposition que C ne soit pas jordanien, est donc fausse.

Le théorème 1er est ainsi démontré.

Remarques. La condition exprimée dans l'énoncé du théorème que nous venons de démontrer est nécessaire pour les sous-continus C

des continus jordaniens J situés dans l'espace euclidien à n-dimensions ($n \geqslant 2$), puisque dans la démonstration de la nécessité de la condition, comme on le voit, la supposition que J soit plan n'intervient pas. On pourrait même démontrer que la condition est nécessaire pour les continus J situés dans des espaces plus généraux convenablement axiomatisés. Cela ne peut pas se dire en ce qui concerne la suffisance de la condition et, en effet, dans sa démonstration on s'appuie essentiellement sur des théorèmes par excellence plans, comme p. ex. le théorème de Jordan. On peut même démontrer que le dite condition n'est pas suffisante pour qu'un sous-continu C d'un continu jordanien J situé dans l'espace à 3-dimensions, soit lui-même jordanien.

En effet, envisageons le continu C construit pas M. Hahn [1]) et situé dans le plan x, y pourvu d'un système des coordonnées rectangulaires. Ce continu est défini comme la somme des segments rectilignes et fermés suivants:

$$\left.\begin{array}{c}\left(x=\frac{1}{n}, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1\right) \\ \left(\frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n-1}, \quad y=0\right) \\ \left(\frac{1}{2n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n}, \quad y=1\right) \\ (x=0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1).\end{array}\right\} (n=1,2,\ldots).$$

C est un continu non-jordanien. Envisageons maintenant sur le segment: $(x=0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$ les ensembles E_n dont E_1 se compose du point $y=\frac{1}{2^1}$, E_2 des points $\left(y=\frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}\right), \ldots$, E_n des points dont les ordonnées sont

$$\frac{1}{2^n}, \quad \frac{3}{2^n}, \quad \frac{5}{2^n}, \ldots, \quad \frac{2^n-1}{2^n}.$$

Pour tout point $\left(x=0,\ y=\frac{2k-1}{2^n}\right)$ de E_n $(n=1,2,\ldots)$ construisons dans le plan parallèle au plan xz et passant par ce point un cercle coupant le segment $\left(x=\frac{1}{n},\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right)$, passant par le point envisagé et centré en un point situé dans le plan xy. Si l'on

[1]) *Über die Komponenten. Fund. Math.* II. p. 190.

fait la somme des circonférences de tous les cercles ainsi construits et qu'on les ajoute au continu C, on obtient un nouveau continu J qui est évidemment jordanien. Le sous-continu C possède néanmoins propriété que tout point de $C . \overline{J-C}$ est sur C localement accessible dans le sens large du côté de $J-C$.

Faisons encore une remarque. Nous n'avons pas supposé que C ou J soient bornée. Il s'ensuit qu'on peut, en prenant pour J le plan entier, considérer C comme un continu arbitraire du plan. Notre théorème nous fournit ainsi une nouvelle condition nécessaire et suffisante pour qu'un continu plan soit jordanien, cette condition n'exprimant qu'une propriété locale des points de la frontière du continu.

2. Théorème. Si 1°. C est un vrai sous-continu du continu K plongé dans un espace euclidien,

2°. $p \in \overline{K-C} . C$

3°. p est sur C localement accessible au sens large du côté de $K-C$,

4°. K_1 étant plongé dans un espace euclidien, est une image homéomorphe de K.

5°. p_1 et C_1 correspondent dans cette homéomorphie respectivement à p et C,

alors p_1 est sur C_1 localement accessible au sens large du côté de $K_1 - C_1$.

Démonstration. Soit $\varepsilon_1 > 0$. Il existe un $\varepsilon > 0$, tel que les relations

$$x \in K, \quad \varrho(x, p) \leqslant \varepsilon$$

entraînent pour l'image x_1 de x:

$$\varrho(x_1, p_1) \leqslant \varepsilon_1.$$

Le point p étant sur C localement accessible au sens large du côté de $K-C$, il existe un $\delta > 0$, tel que pour tout point $x \in (K-C) . \mathcal{S}(p, \delta)$, il existe un continu M jouissant des propriétés suivantes: $x \in M$, $p \in M$, $M - \mathfrak{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}] \subset K - C$.

L'homéomorphie étant une correspondance bi-univoque et bi-continue, on peut trouver un $\delta_1 > 0$ de sorte que les relations

$$y_1 \in K_1, \quad \varrho(p, y_1) < \delta_1$$

entraînent pour l'image y de y_1:

$$\mathcal{S}(p, y) < \delta.$$

Soit donc $y_1 \epsilon (K_1 - C_1) . \mathcal{S}(p_1, \delta_1)$ et soit y l'image de y_1. On a alors

$$y \epsilon (K - C) . \mathcal{S}(p, \delta).$$

A cause de ce que nous avons dit plus haut au sujet de l'accessibilité locale au sens large du point p, il existe un continu M, tel que

$$p \epsilon M \quad y \epsilon M$$

(1) $$M - \mathcal{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}] < K - C.$$

Soit M_1 l'image de M et T_1 l'image de $\mathcal{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}]$; M_1 est un continu et l'ensemble T_1, en vertu de ce que nous avons remarqué au commencement du raisonnement, jouit des propriétés suivantes

$$p_1 \epsilon T_1, \quad T_1 \subset C_1 \quad \text{et en outre} \quad T_1 \subset \mathcal{S}(p_1, \varepsilon_1);$$

On en tire:

$$T_1 \subset \mathcal{L}_s[p_1, C_1 . \overline{\mathcal{S}(p_1, \varepsilon_1)}];$$

d'où

(2) $$M_1 - \mathcal{L}_s[p_1, C_1 . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon_1)}] \subset M_1 - T_1.$$

Mais $M_1 - T$ étant l'image de $M - \mathcal{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}]$ il est contenu, d'après (1), dans $K_1 - C_1$.

Par conséquent, d'après (2):

$$M_1 - \mathcal{L}_s[p_1, C_1 . \overline{\mathcal{S}(p_1, \varepsilon_1)}] \subset K_1 - C_1.$$

Le point y_1, étant pris arbitrairement dans $(K_1 - C_1) . \mathcal{S}(p_1, \delta_1)$ le théorème est démontré.

La condition du théorème 1, étant un invariant de l'homéomorphie, on en déduit le théorème suivant.

3. Théorème. Pour qu'un continu jordanien J situé dans un espace euclidien ne soit pas l'image homéomorphe d'aucun continu plan, il suffit que J possède un sous-continu vrai non-jordanien C pour lequel tout point de sa frontière relative soit sur C localement accessible dans le sens large du côté de $J - C$.

La condition ci-dessus n'est pas nécessaire, comme le prouvent des exemples simples et connus.

Montrons maintenant qu'on ne peut trouver aucune condition générale à la fois nécessaire et suffisante, pour qu'un sous-continu C d'un continu jordanien J plan soit aussi jordanien, si l'on veut que cette condition ne concerne que les points de $(J - C)$. Il n'existe non plus dans le cas plan aucune condition générale de ce genre ne concernant que des points de $J - C$ et de la frontière de $J - C$, sans toucher aux points restants de C.

Pour démontrer cela, envisageons le continu jordanien et plan de M. Knaster [1]) se trouvant dans le travail cité de M. Zarankiewicz [1]).

On définit le continu I comme la somme des segments droits et fermés:

(1) $$\begin{cases} (x = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1) \\ \left(x = \frac{1}{2^n}, \ -1 \leqslant y \leqslant 1\right) \quad (n = 1, 2 \ldots) \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad y = \frac{p}{2^{n-1}}\right) \\ \qquad (n = 1, 2, \ldots) \\ (p = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \ \pm 2^{n-1}). \end{cases}$$

Définissons son sous-continu vrai C non jordanien comme la somme des deux segments fermés

$$(0 \leqslant x \leqslant 1, \quad y = \pm 1)$$

et des segments (1).

$J - C$ est la somme des segments ouverts

$$\left(\frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n}, \quad y = \frac{p}{2^{n-1}}\right)$$

$$(n = 1, 2, \ldots) \quad (p = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \ \pm 2^{n-1} \mp 1).$$

D'autre part définissons le continu jordanien M, comme la somme des segments fermés:

$$(x = 0, \quad -2 \leqslant y \leqslant +2)$$

$$\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2^n}, \quad y = \frac{p}{2^{n-1}}\right)$$

$$(n = 1, 2, \ldots .) \quad (p = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \ \pm 2^n)$$

et formons un autre continu M_1 que l'on obtient de M par une

[1]) l. c. *Fund. Math.* IX. p. 157.

simple translation définie par un vecteur parallèle à l'axe y, la de grandeur irrationnelle plus petite que 1.

La somme $J_1 = J + M_1$ est évidemment un continu jordanien et $C_1 = C + M_1$ est un de ses sous-continus qui est aussi jordanien.

Mais on a:

$$J_1 - C_1 = J - C, \tag{3}$$

puisque

$$J_1 - C_1 = (J - C) - M_1$$

et

$$M_1 . (J - C) = 0,$$

les ordonnés des segments dont $J - C$ se compose étant irrationnelles et la droite $x = 0$ n'ayant pas de points communs avec $J - C$.

Cela étant posé, supposons qu'on ait une condition (A) générale necessaire et suffisante, pour qu'un sous-continu d'un continu jordanien plan soit jordanien lui même, cette condition n'exprimant qu'une propriété des points du complémentaire relatif du sous-continu. La condition (A), comme nécessaire, serait satisfaite pour $J_1 - C_1$, puisque C_1 est jordanien. En vertu de (3), la condition (A) subsisterait pour $J - C$, d'où l'on déduirait que C serait aussi jordanien, puisque (A) doit être une condition suffisante. Cela est en contradiction avec le fait que C est non-jordanien.

Si l'on observe que dans notre cas

$$\overline{J - C} . C = \overline{J_1 - C_1} . C,$$

on s'assure, par un raisonnement analogue, que la deuxième partie du théorème est aussi vraie.

Il est vrai que le théorème de M. Moore[1]) exprime une condition du type (A) pour les sous-continus jordaniens C plans, mais ce n'est pas un théorème général, étant donné que J est, dans le cas qu'il considère, un continu jordanien spécial, à savoir le plan entier.

On peut à cet égard poser le problème suivant: Trouver tous les continus jordaniens J, pour lesquels il existe une condition du type (A), nécessaire et suffisante, pour qu'un sous-continu C de J soit jordanien lui-même.

Remarquons enfin que l'énoncé du théorème 1[er] peut être modifiée un peu de sorte que l'on obtient le théorème suivant:

[1]) (voir p. 160 [1])).

4. Théorème. Pour qu'un sous-continu C du continu jordanien et plan soit lui même jordanien, il faut et il suffit que tout point de $C . \overline{J - C}$ soit accessible au sens large par des arcs simples dans C du coté de $J - C$. Cela veut dire que, étant donné le point $p \varepsilon C . \overline{J - C}$, quel que soit $\varepsilon < 0$ on peut trouver un $\delta < 0$, tel que tout point de $(J - C) . \mathcal{S}(p, \delta)$ puisse être relié avec p par un arc simple M, satisfaisant à la relation suivante:

$$M - \mathfrak{L}_s[p, C . \overline{\mathcal{S}(p, \varepsilon)}] \subset J - C.$$

Pour démontrer cela, observons d'abord que la condition ci-dessus est suffisante, comme étant plus restrictive que celle qui est donnée dans le théorème 1.

Pour en démontrer la nécessité, il faut répeter presque sans changement la démonstration de la nécessité de la condition du théorème 1[er]. Il n'y a qu'à remplacer les mots: „un sous-continu de $J . \mathcal{S}(p, \delta_1)$" par „un arc simple, contenu dans $J . \mathcal{S}(p, \delta_1)$". Cela peut se faire en vertu d'une remarque, faite au commencement de ce travail en ce qui concerne la notion de connexité locale de M. Mazurkiewicz.

Cracovie, février 1928.