Sur l'accessibilité des points.

Par

Nicolas Lusin (Moscou).

(Extrait d'une lettre adressée à M. W. Sierpiński).

„... Quant à la question sur la nature de l'ensemble des points accessibles [1]), voici un raisonnement assez simple, à mon avis.

Soit F un ensemble fermé de points situé à l'intérieur du carré XOY. Prenons l'espace euclidien à quatre dimensions $X_1 Y_1 X_2 Y_2$ et une courbe péanienne remplissant le cube fondamental ayant les arêtes sur les axes de coordonnées et pour côté 1:

$$x_1 = \varphi_1(t); \quad y_1 = \psi_1(t); \quad x_2 = \varphi_2(t); \quad y_2 = \psi_2(t),$$

φ et ψ étant continues dans $[0 \leqslant t \leqslant 1]$. Les formules

$$\xi = \varphi_1(t) + u\,[\varphi_2(t) - \varphi_1(t)]; \quad \eta = \psi_1(t) + u\,[\psi_2(t) - \psi_1(t)],$$

où l'on a $0 \leqslant u \leqslant 1$, représentent ξ et η en fonctions continues de t et u:

$$\xi = \Phi(t, u); \quad \eta = \Psi(t, u).$$

Soit f l'ensemble de tous les points $M(t, u)$ tels que les points correspondants $\mu(\xi, \eta)$ du plan XOY appartiennent à F. Il est évident que l'ensemble f est fermé. Il est clair qu'une partie de cet ensemble est sûrement située sur la droite $u = 1$, c'est-à-dire sur le côté supérieur du carré du plan TOU: ce sont les points $(t, 1)$ tels que la courbe

$$x = \varphi_2(t), \quad y = \psi_2(t)$$

définit les points de l'ensemble F du plan XOY. Il est évident que

[1]) Cf. O. Nikodym, *Fund. Math.* t. VII, p. 250 ss. (*Remarque de la Rédaction*).

ces points $(t, 1)$ forment un ensemble fermé linéaire, soit f_2, situé sur la droite $u = 1$.

Il est clair que *nous obtiendrons tous les points linéairement accessibles de l'ensemble F et ces points seulement* en menant à l'intérieur du carré TOU les droites parallèles à l'axe OU, aboutissant par leurs extrémités supérieures à l'ensemble f_2 et d'ailleurs évitant l'ensemble f. Il est manifeste que l'ensemble de ces t est du type G_δ. En faisant t parcourir cet ensemble G_δ nous obtenons évidemment au moyen de la courbe

$$x = \varphi_2(t); \quad y = \psi_2(t)$$

un ensemble *analytique* formé de tous les points accessibles de l'ensemble F du plan XOY. (C. Q. F. D.).

Il est évident que cette méthode est encore applicable si F est un ensemble projectif et s'il s'agit de l'accessibilité au moyen des chemins algébriques ou chemins jordaniens rectifiables. *Il faut toujours utiliser des „ensembles universels" (c'est-à-dire des applications sur le continu).* Mais c'est extrêmement facile. D'ailleurs notre considération ne déborde jamais la famille des ensembles *projectifs*".

Nicolas Lusin.

Paris, 19 Novembre 1925.