Généralisation d'un théorème de Janiszewski.

Par

C. Kuratowski (Lwów) et S. Straszewicz (Varsovie).

D'après un théorème de Janiszewski[1]), *si le produit de deux continus bornés n'est pas un continu, leur somme coupe le plan.*

La généralisation que nous allons donner concerne le cas où l'un ou l'autre des deux continus coupe le plan lui-même, cas où le théorème précité est peu susceptible aux applications.

1. Un continu A est dit *irréductible entre les ensembles fermés M et N*, lorsque 1°: $AM \neq 0 \neq AN$, 2°: il n'existe aucun vrai sous-continu X de A tel que $XM \neq 0 \neq XN$.

On voit facilement que la condition 2° équivaut à l'hypothèse que A est un continu irréductible entre tout couple de points extraits respectivement de AM et AN[2]).

La même notion peut être définie à l'aide des ensembles $\mathfrak{K}(M, N)$ de M. Mazurkiewicz[3]): on appelle ainsi tout ensemble fermé qui n'est pas somme de deux ensembles fermés P et Q tels que

$$0 = PQ = PM = QN.$$

A est dit un $\mathfrak{K}_i(M, N)$, ou un $\mathfrak{K}(M, N)$ „irréductible", lorsque A est un $\mathfrak{K}(M, N)$ sans qu'aucun vrai sous-ensemble fermé de A en soit un.

[1]) *Sur les coupures du plan faites par les continus*, Prace Matem.-Fiz. 26 (1913). Un ensemble E *coupe le plan* entre p et q lorsque tout continu qui unit ces points passe par E (et p et q sont en dehors de E).

[2]) Un continu A est dit *irréductible entre deux de ses points* si aucun vrai sous-continu de A ne les contient simultanément.

[3]) *Comptes Rendus*, v. CLI. Cf. L. Vietoris, Monatsh. Math. Phys. 31 et P. Szymański, Fund. Math. XI, pp. 6 et 15.

Or, *il y a l'équivalence, pour les ensembles bornés, entre la notion d'ensemble $\mathfrak{K}_i(M, N)$ et celle de continu irréductible entre M et N.*

En effet, si A est un $\mathfrak{K}_i(M, N)$, A est un continu[1]); on voit aussitôt que A est irréductible entre tout couple de points extraits de AM et AN resp., donc — la condition 1° étant réalisée — que A est irréductible entre M et N.

Inversement, si A est un continu irréductible entre M et N, A est évidemment un $\mathfrak{K}(M, N)$. Or, aucun vrai sous-continu de A (comme disjoint de M ou de N) n'étant un $\mathfrak{K}(M, N)$, on en conclut qu'il n'existe aucun vrai sous-ensemble de A qui soit un $\mathfrak{K}_i(M, N)$; tout $\mathfrak{K}(M, N)$ borné contenant un $\mathfrak{K}_i(M, N)$[2]), il en résulte que A est un $\mathfrak{K}_i(M, N)$, c. q. f. d.

Théorème auxiliaire. *A étant un continu borné irréductible entre M et N (et contenant plus d'un point), l'ensemble $A-(M+N)$ est connexe et dense dans A.*

Démonstration. Supposons, par contre, que $A-(M+N)$ ne soit pas connexe. Il existe, par conséquent, deux ensembles U et V tels que:

$$A-(M+N) = U+V, \tag{1}$$

$$U \neq 0 \neq V, \tag{2}$$

$$\overline{U}V = 0 = \overline{V}U. \tag{3}$$

On a donc

$$\overline{U} \neq A \neq \overline{V}, \tag{4}$$

car l'égalité $\overline{U} = A$ entraîne selon (1): $V \subset \overline{U}$, d'où en raison de (3): $V = 0$, contrairement à (2).

Or, A étant un $\mathfrak{K}_i(M, N)$, on a en vertu de (4) les décompositions:

$$\overline{U} = P+Q, \quad 0 = PQ = MP = NQ, \tag{5}$$

$$\overline{V} = W+Z, \quad 0 = WZ = MW = NZ. \tag{6}$$

On en déduit, en tenant compte de (1), la formule:

$$A = \overline{U}+\overline{V}+AM+AN = (P+W+AN)+(Q+Z+AM). \tag{7}$$

D'autre part, les formules (5) et (1) donnent:

$$P \subset \overline{U} \subset U+V+M+N$$

[1]) Ibid.

[2]) Ibid.

et comme, selon (3) et (5), $\overline{U}V = 0 = MP$, il vient $P \subset U + N$ et de même, $Z \subset V + M$. Donc, selon (1) et (3):

$$PZ \subset A(U+N)(V+M) \subset AMN,$$

mais $AMN = 0$, car en cas contraire le continu A, en vertu de l'irréductibilité, ne contiendrait qu'un seul point. On a donc: $PZ = 0$.

On arrive ainsi, en tenant compte de (5) et (6) à la conclusion que

$$(P + W + AN).(Q + Z + AM) = 0,$$

conclusion qui contredit l'hypothèse que A est un continu.

La connexité de l'ensemble $A-(M+N)$ est ainsi établie.

Il en résulte que l'ensemble $\overline{A-(M+N)}$ est un continu.

De plus

(8) $$M.\overline{A-(M+N)} \neq 0 \neq N.\overline{A-(M+N)},$$

car l'égalité $M.\overline{A-(M+N)} = 0$ implique que la décomposition

$$A = AM + [\overline{A-(M+N)} + AN]$$

est une décomposition du continu A en deux ensembles fermés, disjoints et non-vides.

La double inégalité (8), entraîne en vertu de l'irréductibilité de A, l'identité $A = \overline{A-(M+N)}$, qui prouve que l'ensemble $A-(M+N)$ est dense dans A, c. q. f. d.

Remarque. Le théorème serait en défaut, si l'on omettait l'hypothèse que A est *borné*. Pour s'en convaincre, on considère comme continu A la fig. II de la note de MM. Knaster et Kuratowski de Fund. Math. V (p. 43), comme M l'axe des y et comme N la droite $x = \frac{1}{2}$. L'ensemble $A-(M+N)$ n'est pas connexe. On voit, en même temps, que A n'est pas un $\mathfrak{K}_i(M, N)$.

2. Théorème de Janiszewski généralisé. *Etant donnés deux continus A et B dont un au moins est borné et dont le produit n'est pas un continu, il existe deux points p et q entre lesquels B ne coupe pas le plan tandisque $A+B$ le coupe entre ces points.*

Démonstration. Il existe, par hypothèse, deux ensembles fermés M et N tels que

(1) $$AB = M + N, \quad M \neq 0 \neq N, \quad MN = 0.$$

Considérons deux cas:

1. A est borné. La propriété d'etre un continu borné ayant

des points communs avec M et N étant inductive [1]), il existe un sous-continu I de A irréductible entre M et N.

On a donc

(2) $$MI \neq 0 \neq NI$$

et conformément au théor. auxiliaire, l'ensemble $I - B$, comme identique à $I - AB = I - (M+N)$, est connexe et l'on a

(3) $$\overline{I-B} = I.$$

L'ensemble $I - B$ est donc situé dans une seule région-composante R de $C(B)$ [le symbole $C(X)$ désignant d'une façon générale l'ensemble-complémentaire de X]. Evidemment:

(4) $$C(R).\overline{R} \subset B \subset C(R) \quad \text{et} \quad I - B \subset AR.$$

Soit S la composante [2]) de l'ensemble AR qui contient $I - B$. Par conséquent:

(5) $$S = \overline{S}AR,$$

(6) $$\overline{I-B} \subset \overline{S} \subset A\overline{R},$$

d'où, en vertu de (3):

(7) $$I \subset \overline{S}$$

et il vient, en raison de (2):

(8) $$M\overline{S} \neq 0 \neq N\overline{S}.$$

Or, selon (6): $\overline{S}.C(R) = \overline{S}.C(R).A\overline{R}$ et, selon (4), $C(R).\overline{R} = C(R)\overline{R}B = \overline{R}B$; on a donc $\overline{S}.C(R) = \overline{S}\overline{R}AB$, ce qui donne, en vertu de (6) et (1):

$$\overline{S}.C(R) = \overline{S}AB = M\overline{S} + N\overline{S}.$$

Cette dernière formule montre que le produit des deux continus $\overline{S}$ et $C(R)$ [3]) n'est pas un continu. Le continu $\overline{S}$, comme sous-en-

[1]) c'est-à-dire qu'elle appartient au produit de toute suite d'ensembles décroissants et jouissants de cette propriété; d'après un théorème de M. Brouwer, tout ensemble borné jouissant d'une propriété inductive qui implique que l'ensemble est fermé contient un ensemble irréductible par rapport à cette propriété (Proc. Akad. Wet. Amsterdam 14).

[2]) S est dit *composante* de X, lorsque S est un sous-ensemble connexe de X et n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de X.

[3]) $C(R)$ est un continu, puisque R est une région-composante du complémentaire d'un continu(théor. de Brouwer).

semble de A, étant borné, on peut appliquer le théorème de Janiszewski cité dans l'introduction [1]). On en conclut que l'ensemble $C[\overline{S}+C(R)]$, qui est évidemment égal à $R-\overline{S}$, n'est pas connexe.

Or, $\overline{S}=\overline{S}A$ (selon (5)), donc

$$R-\overline{S}=R-\overline{S}A=R-\overline{S}AR$$

d'où, en vertu de (5): $R-\overline{S}=R-S$.

Il est ainsi établi que l'ensemble $R-S$ n'est pas connexe. On en conclut [2]) que $R-A$ ne l'est nonplus.

Soient p et q deux points extraits de deux composantes différentes de l'ensemble $R-A$; il n'existe donc aucun continu qui unisse ces points dans R sans passer par A. D'autre part, tout continu unissant ces deux points et ayant des points communs avec $C(R)$ passe nécessairement par la frontière de R, donc, en vertu de (4), par B. On en conclut que $A+B$ coupe le plan entre p et q. Cependant B ne coupe pas le plan entre ces points, puisqu'ils appartiennent à la même région-composante R de l'ensemble $C(B)$.

2. A est non-borné. Donc B est borné.

Transformons le plan par inversion ayant pour pôle un point v qui n'appartient pas à $A+B$ [3]). Soit X^* l'image de l'ensemble X ainsi transformé.

Les ensembles A^*+v et B^* sont des continus bornés, tandisque l'ensemble $(AB)^*$, comme image homéomorphe de AB, n'est pas un continu Or,

$$(AB)^*=A^*.B^*=(A^*+v).B^*.$$

Il existe donc, comme nous venons de prouver, deux points p^* et q^* entre lesquels B^* ne coupe pas le plan, tandisque A^*+v+B^* le coupe. Il en résulte [4]) que B ne coupe pas le plan entre p et q, tandisque $A+B$ le coupe, c. q. f. d.

[1]) Dans l'énoncé de Janiszewski *les deux* continus sont supposés bornés; mais il suffit de supposer que *l'un des deux* est borné. Voir Knaster et Kuratowski, Fund. Math. V, p. 35.

[2]) en vertu du théorème général suivant: *T étant un sous-ensemble connexe d'un ensemble connexe R et S étant une composante de l'ensemble $R-T$, l'ensemble $R-S$ est connexe* (on pose $T=R-A$, donc $R-T=AR$). Voir Knaster et Kuratowski, Fund. Math. II, p. 214, théor. X.

[3]) Cf. C. Kuratowski: *Sur la méthode d'inversion dans l'Analysis situs*, Fund. Math. IV.

[4]) Cf. Fund. Math. V, p. 32.

Remarque. Il n'est pas toujours possible de choisir les points p et q de façon que *ni* A *ni* B ne coupe le plan entre ces points (tandisque $A+B$ le coupe). Pour s'en convaincre, on considère comme A et B deux circonférences (de cercles) ayant deux points communs.

Dans le corollaire suivant nous énonçons une condition supplémentaire qui permet de choisir les points p et q de la façon considérée.

Corollaire. *Etant donnés deux continus bornés A et B tels que AB n'est pas un continu et que $A\subset\overline{R}$, où R est une région-composante de $C(B)$, il existe deux points entre lesquels ni A ni B ne coupe le plan, tandisque $A+B$ le coupe entre ces points.*

Démonstration. On a:

$$A.C(R)=A\overline{R}-R=A(\overline{R}-R)B=AB,$$

car $\overline{R}-R\subset B$, $A\subset\overline{R}$ et $B\subset C(R)$ (form. 4)).

Par conséquent, le produit des deux continus A et $C(R)$, comme égal à AB, n'est pas un continu. Selon le théorème précédent, il existe un couple de points p et q entre lesquels $A+C(R)$ coupe le plan, sans que A le coupe. B ne coupe nonplus le plan entre ces points, puisqu'ils sont situés en dehors de $A+C(R)$ donc dans R, qui est une région du complémentaire de B.

Enfin, $A+B$ coupe le plan entre p et q, car $A+C(R)$ étant une coupure entre p et q, tout continu qui unit p à q et qui est disjoint de A passe par $C(R)$. Mais alors ce continu passe par la frontière de R, donc par B (form. (4)).