Sur le phénomène de Gibbs dans la théorie des séries de Fourier des fonctions continues.

Par

Zygmunt Zalcwasser (Varsovie).

Introduction.

§ 1.

Quand on étudie le caractère de convergence des séries de Fourier, on rencontre trois espèces de singularités:

I. les sérier de Fourier peuvent être divergentes.
II. elles peuvent être convergentes mais pas uniformément.
III. elles peuvent présenter un phénomène dit „phénomène de Gibbs".

A chacune de ces singularités s'attache le problème suivant: „Quel est l'ensemble E le plus général de ces points x où se présente la singularité en question"?

Ici nous ne considérons que les sérier de Fourier des fonctions continues. On sait, que dans ce cas le premier des problèmes signalés est difficile à résoudre (il n'est pas résolu jusqu'ici); la résolution du second problème est connue et s'énonce comme il suit:

„L'ensemble de points de convergence non uniforme de la série de Fourier d'une fonction continue peut être un ensemble fermé quelconque".

Dans ce petit mémoire je m'occuppe du troisième problème:

„Quel est l'ensemble E le plus général de ces points x où la série partout convergente de Fourier d'une fonction continue peut présenter le phénomène de Gibbs"?

§ 2.

La définition du phénomène de Gibbs.

L'exemple le plus ancien où l'on a observé pour la première fois le phénomène de Gibbs — c'est la série élémentaire [1])

$$\varphi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin mx}{m}. \tag{1}$$

Cette série est partout convergente et dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ elle représente la fonction

$$\varphi(x)=\frac{\pi-x}{2} \quad \text{pour} \quad 0<x\leqq\pi;\ \varphi(-x)=-\varphi(x)$$
$$\text{pour} \quad -\pi\leqq x<0;\ \varphi(0)=0.$$

Au point $x=0$ cette fonction est discontinue; l'oscillation [2]) est égale à π.

Les sommes partielles

$$s_n(x)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\sin mx}{m} \tag{2}$$

de la série (1) se comportent d'une manière singulière.

Maximum absolu de la fonction $s_n(x)$ dans l'intervalle $(0, \pi)$ a lieu pour $x=\frac{\pi}{n+1}$ [3]). Quand n croît les ordonnées correspondantes $s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ ne tendent pas cependant vers $\frac{\pi}{2}$ (comme on pourrait l'attendre) mais vers une limite $c=\frac{\pi}{2}\cdot 1{\cdot}089\ldots>\frac{\pi}{2}$ [4]). Les

[1]) W. Gibbs. Nature, vol. LVIII (1898) pp. 544, 569; vol. LIX (1899) pp. 200, 271, 319, 606.

[2]) R. Baire. Leçons sur les fonctions discontinues" p. 84.

[3]) Il est aisé de s'en persuader à l'aide de la formule

$$\frac{ds_n}{dx}=\sum_{m=1}^{n}\cos mx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\cdot\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}. \tag{T}$$

[4]) En partant de la formule (T) de la note précédente on obtient successivement:

$$s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2}t}\cdot dt-\frac{\pi}{2(n+1)}=I_n-\frac{\pi}{2(n+1)}$$

sommes partielles $s_n(x)$ font au voisinage du point $x=0$ des oscillations plus grandes que la fonction $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

Il est aisé de préciser le phénomène observé.

Considérons d'une manière générale une suite de fonctions

(3) $$\{f_n(x)\} \quad n=1,2,\ldots; \quad a \leqq x \leqq b$$

et désignons

(4) $$L_n(h, x_0) = \text{borne supérieure de nombres } f_m(x) \text{ pour } m \geqq n \text{ et } |x-x_0| < h.$$

Quand n croît ou h diminue les nombres $L_n(h, x_0)$ ne vont jamais en croissant; il existe donc la limite (finie ou infinie)

(5) $$L(x_0) = \lim_{h\to 0}[\lim_{n\to\infty} L_n(h, x_0)].$$

Nous appellerons ce nombre le „maximum de la suite (3) au point $x=x_0$".

D'une manière analogue on définit $l(x_0) =$ „minimum de la suite (3) au point $x=x_0$". La différence $L(x_0) - l(x_0) = \omega(x_0)$ sera dite „l'oscillation de la suite (3) au point $x=x_0$" [1]).

Supposons maintenant, que la suite (3) est partout convergente et désignons par $M(f, x_0)$, $m(f, x_0)$, $\omega(f, x_0)$ le maximum, le minimum et l'oscillation au sens ordinaire [2]) de la fonction

(6) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x); \quad a \leqq x \leqq b.$$

au point $x=x_0$. On vérifie sans peine, que:

(7) $$\begin{cases} l(x_0) \leqq m(f, x_0) \leqq M(f, x_0) \leqq L(x_0) \\ \omega(x_0) \geqq \omega(f, x_0). \end{cases}$$

$$c = \lim_{n\to\infty} s_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \lim I_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt =$$
$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin v}{v}\,dv > \int_0^{\infty} \frac{\sin v}{v}.dv = \frac{\pi}{2}; \quad v = (n+\tfrac{1}{2})t.$$

[1]) Nous convenons de poser $\omega(x) = +\infty$ si l'une au moins des égalités $L(x) = +\infty$, $l(x) = -\infty$ est remplie. Comparer: Hahn. „*Theorie der reellen Funktionen*" 1921. Band I. S. 261.

[2]) Voir l. c. dans la note 2⁰ page 127.

Nous dirons que la suite (3) présente au point x_0 le phénomène de Gibbs, si pour $x=x_0$ a lieu l'une au moins des inégalités:

(8) $$L(x_0) > M(f, x_0); \quad l(x_0) < m(f, x_0)\ ^{1)}.$$

Le nombre

(9) $$\vartheta(x_0) = [L(x_0) - M(f, x_0)] + [m(f, x_0) - l(x_0)]$$

peut être regardé comme „la mesure du phénomène de Gibbs au point $x=x_0$".

Appliquons ces définitions à l'exemple cité au commencement du §.

On y a pour $x=0$, en posant $f_n = s_n(x)$; $f=\varphi$:

$$L(o) = c, \quad M(f, o) = \frac{\pi}{2}; \quad l(o) = -c, \quad m(f, o) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\vartheta(o) = \omega(o) - \omega(f, o) = 2c - \pi > o.$$

La série (1) présente donc le phénomène de Gibbs au point $x=0$.

§ 3.

La convergence non uniforme et le phénomène de Gibbs.

On vérifie sans peine, que:

„Si au point $x=x_0$ se présente le phénomène de Gibbs la convergence au voisinage de $x=x_0$ est certainement non uniforme". Mais la reciproque n'est pas toujours vraie [2]).

(Nous convenons d'appeller x_0 un point de convergence uniforme, si la suite f_n converge uniformément dans un intervalle $(x_0-\delta, x_0+\delta)$).

[1]) On peut dire encore du phénomène de Gibbs dans le cas où la suite $\{f_n\}$ n'est pas convergente, si les fonctions f_n sont des approximations d'une fonction donnée ψ déterminées par un algoritme quelconque; p. ex., quand f_n sont les sommes partielles de la série de Fourier de ψ. Dans ce cas il faut remplacer dans les inégalités (8) f par ψ. Ici nous ne considérons que les suites partout convergentes et les deux définitions du phénomène sont alors équivalentes.

[2]) Prenons, p. ex. $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$ $(k=1,2,\ldots)$; $f(x)=0$ pour $x \neq \frac{1}{k}$; $f_n(x) = 0$ dans les intervalles $\left(0, \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{k-1} - \frac{1}{2n^2}\right)$ pour $k = 2, 3, \ldots n$. Puis $f_n\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et f_n varie linéairement dans chacun des intervalles $\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}+\frac{1}{2n^2}\right)$, $\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{2n^2}, \frac{1}{k-1}\right)$. On a ici $\vartheta(o) = 0$ et cependant la convergence au point $x=0$ est non uniforme.

En désignant par D et E l'ensemble de points de convergence non uniforme et l'ensemble de ces points x où la suite (3) présente le phénomène de Gibbs, on a donc

$$E \subset D, \quad \text{mais en géneral} \quad E \neq D.$$

Supposons maintenant que toutes les fonctons f_n et la fonction $f = \lim f_n$ sont continues dans un intervalle $I = (a, b)$. On a alors le théorème:

„Pour que la suite (3) soit uniformément convergente dans $I = (a, b)$ il faut et il suffit que

$$\vartheta(x) = \omega(x) = 0 \quad \text{pour chaque} \quad a \leqq x \leqq b\text{“}. \tag{10}$$

Ce théorème prouve, que l'ensemble E est alors dense dans D. Dans tous les cas D est un ensemble fermé, E est un ensemble F_σ (nous le verrons au § suivant).

§ 4.

Théorème. L'ensemble E de tous les points x où la suite partout convergente (3) présente le phénomène de Gibbs est un ensemble F_σ; si l'on suppose en outre que les fonctions f_n sont continues dans $I = (a, b)$, E est un ensemble de première catégorie (sur I).

Démonstration. Les fonctions $L(x)$, $l(x)$, $M(f, x)$, $m(f, x)$ sont des fonctions de première classe [1]). Donc les ensembles

$$E_1 = \underset{x}{\mathrm{E}}[L(x) > M(f, x)] \quad \text{et} \quad E_2 = \underset{x}{\mathrm{E}}[l(x) < m(f, x)]\ ^{2)}$$

sont F_σ et $E = \underset{x}{\mathrm{E}}[\vartheta(x) > o] = E_1 + E_2$ l'est aussi.

La première partie de notre énoncé est ainsi démontrée.

En passant à la démonstration de la seconde partie, supposons que toutes les fonctions $f_n(x)$ sont continues dans l'intervalle $I = (a, b)$. Nous allons montrer, que non seulement E, mais même l'ensemble

$$\underset{x}{\mathrm{E}}[\omega(x) > o] = A \supset E$$

est de première catégorie sur I.

[1]) L et M sont semicontinues supérieurement, l et m — inférieurement.

[2]) D'une manière générale on désigne par $\underset{x}{\mathrm{E}}[\Phi(x)]$ l'ensemble de tous les points x jouissant de la propriété $\Phi(x)$.

Dans l'hypothèse contraire l'ensemble fermé $A_\alpha = \underset{x}{\mathrm{E}}[\omega(x) \geqq \alpha]$ contiendrait pour $\alpha > o$ suffisamment petit un intervalle $I' = (a', b') \subset I$ [1]). Or cela conduit à une contrâdiction avec notre hypothèse, que la suite (3) est partout convergente dans $I \supset I'$. Soit, en effet, $a' < x_0 < b'$ un point où la fonction $f = \lim f_n$ est continue (l'ensemble de tels points est dense dans I', car f est une fonction de première classe). Prenons arbitrairement deux nombres:

$$\delta > 0 \quad \text{et} \quad p \text{ — naturel.}$$

Nous pouvons choisir $\delta' < \delta$ de la manière, que pour $|x - x_0| < \delta'$ on ait

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\alpha}{12}. \tag{11}$$

De l'inégalité $\omega(x_0) \geqq \alpha > o$ résulte immédiatement l'existence de deux nombres x' et n tels, que

$$|x' - x_0| < \delta'; \quad n \geqq p \quad \text{et} \tag{12}$$

$$|f_n(x') - f(x_0)| > \frac{\alpha}{3}. \tag{13}$$

La suite $f_k(x')$ convergeant pour $k \to \infty$ vers $f(x')$, il existe un $m > n$ tel, que

$$|f_m(x') - f(x')| < \frac{\alpha}{12} \tag{14}$$

(12) et (11) entraînent

$$|f(x') - f(x_0)| < \frac{\alpha}{12} \tag{15}$$

(13), (14) et (15) donnent

$$|f_m(x') - f_n(x')| > \frac{\alpha}{3} - 2 \cdot \frac{\alpha}{12} = \frac{\alpha}{6}; \ (m \geqq n \geqq p). \tag{16}$$

Ayant donnés 2 nombres $\delta > o$ et p naturel, on peut donc trouver x' tel que $|x' - x_0| > \delta$ et deux indices $m > n \geqq p$ de la manière que l'inégalité (16) soit remplie.

Considérons maintenant l'ensemble

$$B_p = \sum_{m > n \geqq p} \left\{ \underset{x}{\mathrm{E}}\left[|f_m(x) - f_n(x)| > \frac{\alpha}{6} \right] \right\}. \tag{17}$$

[1]) Car on a évidemment: $A = A_1 + A_{\frac{1}{2}} + A_{\frac{1}{3}} + \dots$

C'est un ensemble ouvert, cas tous les termes de cette somme sont des ensembles ouverts. De plus B_p est dense dans $I'=(a',b')$ car l'ensemble de points de continuité de f est dense dans I' et dans chaque voisinage d'un point de continuité se trouve un point x' remplissant (16) qui appartient donc à B_p.

Le complémentaire $C(B_p)=I'-B_p$ est un ensemble fermé non dense (sur I') et par suite l'ensemble

$$B=B_1 . B_2 . B_3 \dots$$

est non vide. ξ étant un point de B, l'inégalité $|f_m(\xi)-f_n(\xi)|>\frac{\alpha}{6}$ est remplie pour des couples de deux indices m, n arbitrairement grands; or ce fait contredit à notre hypothèse de l'existence d'une limite finie $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(\xi)=f(\xi)$.

§ 5.

En appliquant le théorème du § 4 aux sommes partielles d'une série de Fourier on obtient deux propriétés nécessaires de l'ensemble E de ces points x où une série de Fourier partout convergente peut présenter le phénomène de Gibbs:

„E doit être un ensemble F_σ de première categorie"

Nous allons démontrer que ces propriétés sont en même temps suffisantes, c'est-à-dire, qu'on peut énoncer le suivant

Théorème. „Ayant donné arbitrairement un ensemble périodique E[1]) (de période 2π) du type F_σ et de première catégorie, on peut trouver une fonction *partout continue* dont la série de Fourier:

1) est partout convergente.
2) présente le phénomène de Gibbs dans tous les points x de E.
3) ne présente le phénomène de Gibbs dans aucun point n'appartenant à E".

L'ensemble E peut être mis sous la forme

$$E=W+\sum_{n=1}^{\infty} P_n \tag{18}$$

[1]) Un ensemble sera dit périodique, si sa fonction caractéristique est une fonction périodique.

où $P_1, P_2, \dots$ sont des ensembles parfaits non denses et W — un ensemble dénombrable. Nous considérons donc succéssivement les cas particuliers:

$$E=W,\ E=P_n$$

et enfin le cas général.

§ 6.

J'énonce d'abord quelques théorèmes auxiliaires bien connus dont je ferai usage dans la suite

I. f étant une fonction intégrable, je désigne par

$$s_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,K_n(x-t)\,dt \quad \text{où} \quad K_n(s)=\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})\,s}{\sin\frac{1}{2}s} \tag{19}$$

respectivement

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,I_n(x-t)\,dt \quad \text{où} \quad I_n(s)=\frac{\cos\frac{1}{2}s-\cos\,(n+\frac{1}{2})\,s}{\sin\frac{1}{2}s} \tag{20}$$

la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de f, resp. celle de la série conjuguée. La somme de la série conjuguée (supposée convergente) sera désignée par

$$f^*(x)=\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f,x). \tag{21}$$

On sait, qu'en supposant la fonction $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ absolument intégrable dans l'intervalle $0\leqq t\leqq 2\pi$, on a

$$f^*(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)-f(x)]\cot\frac{t-x}{2}.\,dt. \tag{22}$$

II. Les sommes partielles de la série (1) du § 2 sont uniformément bornées:

$$|s_n(\varphi,x)|=\left|\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin rx}{r}\right|\leqq M \text{ pour tous les } x \text{ et n.} \tag{23}$$

III. *Polynomes de Féjer* [1]). Ce sont les polynomes trigonométriques

$$Q(x,n,m)=2\sin mx.\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin rx}{r} \tag{24$_1$}$$

[1]) Voir, p. ex. Ch. de la Vallée-Poussin. Cours d'Analyse Vol. II. IV$^{\text{ième}}$ édition pp. 115—119.

$$(24)_2 \qquad R(x, n, m) = -2\cos mx.\sum_{r=1}^{n}\frac{\sin rx}{r}$$

En vertu de (23) ces polynomes sont uniformément bornés. Cependant, en les mettant sous la forme

$$(25)_1 \qquad Q(x, n, m) = \sum_{r=n}^{1}\frac{\cos(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n}\frac{\cos(m+r)x}{r}$$

$$(25)_2 \qquad R(x, n, m) = \sum_{r=n}^{1}\frac{\sin(m-r)x}{r} - \sum_{r=1}^{n}\frac{\sin(m+r)x}{r}$$

on voit, que certains segments de ces polynomes peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes, à savoir

$$(26)_1 \qquad s_m(Q, o) = \sum_{r=n}^{1}\frac{1}{r} \sim \log n.$$

$$(26)_2 \qquad s_m\left(R, \frac{\pi}{2m}\right) = \sum_{r=n}^{1}\frac{\sin(m-r)\dfrac{\pi}{2m}}{r} \geqq \sin\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{n}{m}\right).\sum_{r=n}^{1}\frac{1}{r}.$$

Le polynome R est conjugué au polynome Q et l'on a

$$(27) \qquad |Q(x, n, m)| \leqq 2M; \quad |R(x, m, m)| = |Q^*| \leqq 2M$$

quels que soient x, n, m, en vertu de (23).

IV. f étant une fonction 1° absolument intégrable dans $(0, 2\pi)$.
2° identiquement nulle pour $a \leqq x \leqq b$
la série de Fourier de f et la série conjuguée f^* sont uniformément convergentes dans l'intervalle $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ quel que soit $\varepsilon > 0$.

§ 7.

En abordant la démonstration du théorème du § 5, je considère le cas particulier: $E = W$, W étant un ensemble dénombrable quelconque de période 2π. Je m'appuie sur l'existence d'une fonction $h(x)$ jouissant de propriétés suivantes [1]):

1° h est une fonction continue de période 2π.
2° la série de Fourier de h est partout convergente, mais la convergence en est non uniforme dans le voisinage des points $x = 2k\pi$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
3° la convergence est uniforme dans chaque intervalle $(2\pi k + \varepsilon, 2\pi(k+1) - \varepsilon)$
4° les sommes partielles de la série de Fourier de h sont uniformément bornées:

$$(28) \qquad |s_n(h, x)| \leqq 1 \quad \text{quels que soient } n \text{ et } x.$$

Il en résulte, qu'aux points $x = 2k\pi$ la suite $\{s_n(h, x)\}$ présente le phénomène de Gibbs:

$$\vartheta(x) = \tau > 0 \quad \text{pour} \quad x = 2k\pi$$

et que le phénomène ne se présente pas si $x \neq k\pi$.

Soit

$$W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}.$$

Je choisis les nombres $e_s > 0$ de la manière que $\sum_{s=1}^{\infty} e_s$ soit convergente et je pose

$$(29) \qquad H(x) = \sum_{s=1}^{\infty} e_s . h(x - w_s)$$

(28) entraîne $|h(x)| \leqq 1$ pour tous les x, de sorte que la série (29) est uniformément convergente et $H(x)$ — une fonction partout continue.

---

[1]) On peut obtenir une fonction h satisfaisant à toutes les conditions démandées, en modifiant légèrement l'exemple analogue de M. Fejer (Voir l. c. dans la note 1° p. 133). Dans cet exemple les conditions 1°, 2°, 3°, sont remplies, mais 4° ne l'est pas. M. Féjer définit sa fonction h comme il suit. Il pose

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k . R(x, n_k, m_k) \qquad \text{(Voir III § 6)}$$

les nombres $a_k > 0$ y sont choisis de la manière, que la série $\sum a_k = A$ soit convergente; puis les nombres naturels n_k de façon, que:

$$(\dagger) \qquad \lim_{k\to\infty} a_k . \log n_k = +\infty.$$

et enfin m_k de la manière, que deux polynomes voisins n'empétiaient l'un sur l'autre: $m_{k+1} - n_{k+1} > m_k + n_k$. Si l'on remplace la condition (†) par

$$(\dagger\dagger) \qquad \lim a_k . \log n_k = L \geqq 2MA + 1$$

(mais $L < \infty$; M c'est la constante qui figure dans (27)) on obtient une fonction h jouissant de mêmes propriétés 1°, 2°, 3°, mais le phénomène de Gibbs est maintenant fini et les sommes partielles $s_n(h, x)$ sont uniformément bornées.

On vérifie aisément, que la série de Fourier de H est partout convergente, qu'elle présente le phénomène de Gibbs aux points $x \epsilon W$ et seulement aux ces points là. La démonstration s'appuie sur la formule

$$s_n(H, x) = \sum_{s=1}^{\infty} e_s . s_n[h(x - w_s), x]$$

et l'hypothèse (28) y joue un rôle essentiel. Cette démonstration est si évidente, que nous l'omettrons ici.

Remarque I. Si l'ensemble W est dense dans $(0, 2\pi)$ la formule (29) nous donne l'exemple d'une fonction continue H dont la série de Fourier est partout convergente mais pas uniformément dans tout intervalle [1]), si petit qu'il soit.

Remarque II. Si W est un sous-ensemble dense d'un ensemble fermé F donné d'avance, la formule (29) définit une fonction continue H dont la série de Fourier admet tous les points $x \epsilon F$ comme des points de convergence non uniforme et seulement ces points là. Nous avons ainsi résolu, en passant, le second des problèmes signalés au § 1.

§ 8.

Je considère maintenant le cas $E = P$, P étant un ensemble parfait non dense, de période 2π, donné d'avance. On peut supposer que le point $x = 0$ appartient à P et ne considérer que la partie de P située dans l'intervalle $(0, 2\pi) = I$. Le complémentaire $C_I(P) = I - P$ de l'ensemble P se compose d'une infinité dénombrable de segments ouverts

$$\delta_k = (a_k, b_k); \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

n'empiétant l'un sur l'autre.

A chaque intervalle δ_k je fais correspondre un polynome de Fejer (§ 6 III)

$$Q_{n_k}(x) = Q(x, n_k, n_{n+1}) = 2 \sin(n_k + 1) x . \sum_{r=1}^{n_k} \frac{\sin r x}{r}. \tag{30}$$

[1]) Le premier exemple de ce genre a été obtenu par M. Steinhaus „Sur la convergence non uniforme des séries de Fourier" *Bull. de l'Acad. d Sc. de Cracovie* 7. IV. 1913. L'exemple du texte est plus simple; il est rapproché de l'exemple de M. L. Neder „Konvergenzdeffekte der Potenzreihen stetiger Funktionen auf dem Rande des Konvergenzkreises" Math. Zeitschr. Band 6, Heft 3/4. 1920.

Les nombres naturels n_k y sont choisis comme il suit. Soit

$$e_k = \mu . \frac{\bar{\delta}_k}{k^2}; \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{31}$$

où $\mu > 0$ est une constante absolue, que je définirai plus tard, et $\bar{\delta}_k = b_k - a_k$ est la longueur du segment δ_k. n_k c'est le plus petit nombre naturel satisfaisant à la condition

$$2 < e_k . \log n_k < 3. \tag{32}$$

Posons

$$e_k . Q_{n_k}(x - c_k) = \varphi_k(x) \quad \text{où} \quad c_k = \tfrac{1}{2}(a_k + b_k). \tag{33}$$

En écrivant Q_{n_k} sous la forme (25), § 6 nous voyons, que:

$$|s_m(\varphi_k, x)| \leqq 2 e_k . \sum_{r=1}^{n_k} \frac{1}{r} < 8\ ^{1)} \tag{34}$$

quels que soient m, k et x.

Et cependant

$$s_{n_k}(\varphi_k, c_k) = e_k . \sum_{r=1}^{n_k} \frac{1}{r} > e_k . \log n_k > 2 \tag{35}$$

en vertu de (32).

La fonction φ_k va être maintenant multipliée par une „fonction localisante" λ_k. C'est une fonction de période 2π satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $\lambda_k(x) = 0$ pour $0 \leqq x \leqq a_k + \frac{1}{4} . \bar{\delta}_k$ et $b_k - \frac{1}{4} . \bar{\delta}_k \leqq x \leqq 2\pi$.

2° $\lambda_k(x) = 1$ pour $|x - c_k| \leqq \frac{1}{8} . \bar{\delta}_k$.

3° $\lambda_k(x) = \left[\sin \frac{4\pi}{\bar{\delta}_k} . (x - c_k)\right]^2$ pour $\frac{1}{8} . \bar{\delta}_k \leqq |x - c_k| \leqq \frac{1}{4} \bar{\delta}_k$.

Cette fonction λ_k est partout continue et dérivable; λ'_k est une fonction continue à variation bornée et on a

$$|\lambda'_k(x)| \leqq \frac{4\pi}{\bar{\delta}_k} \tag{36}$$

quels que soient x et k.

[1]) Si $\mu < \frac{1}{2\pi}$, on a $e_k < 1$ et $2 e_k . \sum_{r=1}^{n_k} \frac{1}{r} < 2 e_k [1 + \log n_k] < 8$ d'après (32).

Posons enfin

$$\varphi_k(x) \,.\, \lambda_k(x) = \psi_k(x). \tag{37}$$

La définition de la fonction cherchée $f(x)$. Je pose

I. $f(x) = \psi_k(x)$ si $x \,\epsilon\, \delta_k$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$; $k = 1, 2, 3, \ldots$

II. $f(x) = 0$ si $x \,\epsilon\, P$.

III. $f(x + 2\pi) = f(x)$ quel que soit x

(37), (33), (31), (27) et l'inégalité $0 \leqq \lambda_k(x) \leqq 1$ entraînent

$$|f(x)| \leqq \mu \,.\, \frac{\overline{\delta}_k}{k^2} \,.\, 2M \tag{38}$$

pour tous les $x \,\epsilon\, \delta_k$.

Cette inégalité nous permet de vérifier, que f est une fonction continue et partout dérivable. En effet. 1° si $x \,\epsilon\, \delta_k$, on a; $f' = \psi'_k = \varphi'_k \,.\, \lambda_k + \varphi_k \,.\, \lambda'_k$, 2° si $x \,\epsilon\, P$, on a: $f'(x) = 0$. Nous démontrerons, p. ex., que la dérivée droite $f'_d(x) = 0$. Pour $x = a_k$ cela résulte immédiatement de la condition 1° imposée à la fonction λ_k. Supposons donc $x \neq a_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ et envisageons le quotient

$$\varrho(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x+h)}{h} \quad \text{(d'après II).}$$

Si $f(x+h) = 0$, on a: $\varrho(x, h) = 0$; si $f(x+h) \neq 0$, le point $(x+h)$ appartient à un segment δ_l, on a certainement $x + h > a_l + \frac{1}{4}\,\overline{\delta}_l$ [1]) et (38) nous donne

$$|\varrho(x, h)] \leqq \mu \,.\, \frac{\overline{\delta}_l}{l^2} \,.\, \frac{2M}{h} \leqq \frac{2M\mu}{l^2} \,.\, \frac{\overline{\delta}_l}{x + h - a_l} \leqq \frac{2M\mu}{l^2} \,.\, \frac{\overline{\delta}_l}{\frac{1}{4}\,\overline{\delta}_l} = \frac{8M\mu}{l^2} \tag{39}$$

h tendant vers 0, on a $l \to \infty$ et $\lim\limits_{h \to \infty} \varrho(x, h) = 0$. D'une manière analogue on établie l'égalité $f'_g(x) = 0$ si $x \,\epsilon\, P$.

La fonction $f(x)$ étant dérivable, sa série de Fourier

$$\tfrac{1}{2} \,.\, A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mx + B_m \sin mx \tag{40}$$

converge partout vers $f(x)$.

Nous allons montrer que les sommes partielles $s_n(f, x)$ de la série (40).

(†) présentent le phénomène de Gibbs en tous les points de l'ensemble P; (††) ne le présentent pas en aucun point n'appartenant à P.

[1]) D'après la condition 1° imposée à λ_k.

Pour démontrer (††) il suffit de remarquer que la série (40) est uniformément convergente dans chaque intervalle $(a_k + \epsilon,\ b_k - \epsilon)$; $k = 1, 2, \ldots$. En effet. Dans l'intervalle δ_k on a $f = \psi_k$. La série de Fourier de ψ_k est absolument et uniformément convergente (en vertu des conditions 1°, 2°. 3° imposées à λ_k) et nous pouvons appliquer le théorème IV § 6 [le rôle de la fonction f joue maintenant la différence $f - \psi_k$].

Il reste à vérifier (†). Pour s'en persuader il faut comparer les sommes partielles $s_n(f, x)$, $s_n(\psi_k, x)$ et $s_n(\varphi_k, x)$.

x étant un point de l'intervalle δ_k, envisageons d'abord la différence

$$s_n(f, x) - s_n(\psi_k, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} [f(t) - \psi_k(t)]\, K_n(t - x)\, dt = \tag{41}$$

$$= \int_{x-\pi}^{a_k} f(t) \,.\, K_n(t - x)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{b_k}^{x+\pi} f(t)\, K_n(t - x)\, dt = R_1 + R_2 \text{ [1])}.$$

Considérons, p. ex. R_2. Si $f(t) \neq 0$, on a:

$$t \,\epsilon\, \delta_l; \quad t > a_l + \tfrac{1}{4}\,\overline{\delta}_l; \quad \frac{\pi}{2} > \frac{t - x}{2} > \tfrac{1}{8}\,\overline{\delta}_l$$

donc

$$|f(t)\, K_n(x - t)| \leqq \left|\frac{f(t)}{\sin \frac{1}{2}(t - x)}\right| \leqq \frac{2M\mu}{l^2} \,.\, \frac{\overline{\delta}_l}{\sin \frac{1}{8}\,\overline{\delta}_l} \leqq 32 \,.\, \frac{M\mu}{l^2} \leqq 32\, M\mu \text{ [2])}. \tag{42}$$

Il s'ensuit

$$|R_2| \leqq \frac{1}{2\pi} \,.\, 32\, M\mu\, (x + \pi - b_k).$$

Tout pareillement

$$|R_1| \leqq \frac{1}{2\pi} \,.\, 32\, M\mu\, (a_k - x + \pi)$$

donc

$$|s_n(f, x) - s_n(\psi_k, x)| \leqq |R_1| + |R_2| \lesseqgtr 32\, M\mu = 1 \tag{43}$$

[1]) Car $\psi_k(t) = f(t)$ pour $t \,\epsilon\, \delta_k$ et $\psi_k = 0$ en dehors de δ_k.

[2]) Dans cette chaîne des inégalités on s'appuie succéssivement sur (19), (38) et sur la remarque suivante: pour $0 < x < \frac{\pi}{4}$; on a: $\sin x < \frac{1}{2}\, x$.

pour tous les n, k et $x \epsilon \delta_k$ en supposant, qu'on a pris précédemment

$$\mu = \frac{1}{32 M}. \tag{44}$$

En particulier

$$|s_{n_k}(f, c_k) - s_{n_k}(\psi_k, c_k)| \leqq 1 \tag{45}$$

quel que soit k.

D'autre part

$$s_n(\psi_k, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} \lambda_k(t)\, \varphi_k(t)\, K_n(t-x)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x-\pi}^{x+\pi} [\lambda_k(t) - \lambda_k(x)]\, \varphi_k(t)\, K_n(t-x)\, dt + \frac{\lambda_k(x)}{2\pi} \cdot \int_{x-\pi}^{x+\pi} \varphi_k(t)\, K_n(t-x)\, dt$$

c'est-à-dire

$$s_n(\psi_k, x) = \lambda_k(x) \,.\, s_n(\varphi_k, x) + \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} [\lambda_k(t) - \lambda_k(x)]\, \varphi_k(t)\, K_n(x-t)\, dt \tag{46}$$

quels que soient x, n, k.

D'après (36) on a toujours:

$$\left| \frac{\lambda_k(t) - \lambda_k(x)}{t-x} \right| \leqq \frac{4\pi}{\delta_k}$$

donc

$$|[\lambda_k(t) - \lambda_k(x)]\, K_n(t-x)| \leqq \left| \frac{\lambda_k(t) - \lambda_k(x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} \right| \leqq \tag{47}$$

$$\leqq 2 \,.\, \left| \frac{\lambda_k(t) - \lambda_k(x)}{t-x} \right| \cdot \left| \frac{\frac{1}{2}(t-x)}{\sin \frac{1}{2}(t-x)} \right| \leqq 2 \,.\, \frac{4\pi}{\delta_k} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi^2}{\delta_k} \text{ [1]}.$$

et la formule (46) nous donne

$$|s_n(\psi_k, x) - \lambda_k(x) \,.\, s_n(\varphi_k, x| \leqq \frac{4\pi^2}{\delta_k} \,.\, 2M \,.\, e_k = \frac{8\pi^2 \,.\, M \,.\, \mu}{k^2} = \frac{\pi^2}{4k^2} \tag{48}$$

en vertu de (33), (31), (27) et (44).

En particulier, en posant $n = n_k$, $x = c_k$, on obtient

$$|s_{n_k}(\psi_k, c_k) - s_{n_k}(\varphi_k, c_k)| \leqq \frac{\pi^2}{4k^2} \tag{49}$$

quel que soit k.

[1]) Pour $0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{2}$ on a: $1 \leqq \frac{s}{\sin s} \leqq \frac{\pi}{2}$.

En rapprochant (35), (45) et (49), on obtient

$$s_{n_k}(f, c_k) \geqq 1 - \frac{\pi^2}{4k^2}. \tag{50}$$

A l'aide de cette inégalité il est aisé maintenant de démontrer (†). Soit x un point de l'ensemble P; x est un point limite d'une suite extraite de la suite $c_1, c_2, c_3, \ldots$, donc, en vertu de (50), le maximum de la suite $s_n(f, x)$, au point x est $\geqq 1$:

$$L(x) \geqq 1 \quad \text{si } x \epsilon P \qquad \text{[Voir § 2]}.$$

D'autre côté

$$\lim_{n \to \infty} s_n(f, x) = f(x) = 0$$

donc

$$l(x) \leqq 0 \quad \text{si } x \epsilon P$$

et

$$\vartheta(x) = \omega(x) = L(x) - l(x) \geqq 1. \tag{51}$$

Le phénomène de Gibbs se présente donc aux tous les points de l'ensemble P.

§ 9.

La condensation de la singularité obtenue au § 8 sera toute facile, grace à la circonstance suivante: les sommes partielles $s_n(f, x)$ de la série (40) sont uniformément bornées.

En effet. De l'inégalité (48) on déduit

$$|s_n(\psi_k, x)| \leqq \lambda_k(x) \,.\, |s_n(\varphi_k, x)| + \frac{\pi^2}{4k^2} \leqq 8 + \frac{\pi^2}{4k^2} \leqq 8 + \frac{\pi^2}{4} \tag{52}$$

quels que soient n, k, x d'après (34) et l'inégalité $0 \leqq \lambda_k(x) \leqq 1$.

En rapprochant (52) et (43), on obtient

$$|s_n(f, x)| \leqq 9 + \frac{\pi^2}{4}$$

pour tout n naturel et $x \epsilon C(P)$ [1]).

L'ensemble P étant non dense, on en conclut

$$|s_n(f, x)| \leqq 9 + \frac{\pi^2}{4} \tag{53}$$

quels que soient n et x.

[1]) Rappellons que $C(P)$ c'est le complémentaire du P.

La fonction $f(x)$ construite au § 8 jouit donc de propriétés suivantes

1° f est une fonction continue de période 2π

2° la série de Fourier de f est partout convergente

3° la suite $s_n(f, x)$ présente le phénomène de Gibbs en chaque point $x \epsilon P$ et on a

$$\vartheta(x) = \omega(x) \geqq 1 \quad \text{pour tout } x \epsilon P \tag{51}$$

4° aux points $x \epsilon C(P)$ le phénomène de Gibbs ne se présente pas:

$$\vartheta(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \epsilon C(P)$$

5°

$$|s_n(f, x)| \leqq V \tag{54}$$

quels que soient n et x, $V = 9 + \frac{\pi^2}{4}$ étant une constante absolue, qui ne dépend pas de l'ensemble P.

Soit maintenant

$$E_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \dots \tag{55}$$

une somme des ensembles parfaits non denses donnés d'avance. On peut supposer, que

$$P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots \tag{55}$$

A chaque ensemble P_m le raisonnement du § 8 fait correspondre une fonction $f_m(x)$ satisfaisant aux conditions 1°—5°.

Posons

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \cdot f_m(x). \tag{56}$$

Les nombres $\varepsilon_m > 0$ y sont choisis de la manière que

$$\varepsilon_m \geqq 4V\sigma_m \quad \text{où} \quad \sigma_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} \varepsilon_i \quad \left(\text{p. ex. } \varepsilon_m = \frac{1}{(4V+1)^m}\right). \tag{57}$$

De la condition 5° on déduit

$$|f_m(x)| \leqq V \tag{58}$$

quels que soient m et x.

La série (56) est donc uniformément convergente et sa somme $F(x)$ est une fonction continue. En profitant de la formule

$$s_n(F, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \cdot s_n(f_m, x) \tag{59}$$

et en s'appuyant sur les conditions 2° et 5°, on vérifie sans peine que la série de Fourier de F est partout convergente.

Cela posé, considérons un point $x \epsilon E_0$. On a $x \epsilon P_p - P_{p-1}$ pour un p naturel, bien déterminé. Décomposons la somme (56) en trois parties:

$$F(x) = \sum_{m=1}^{p-1} \varepsilon_m f_m + \varepsilon_p f_p + \sum_{m=p+1}^{\infty} \varepsilon_m f_m = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) \tag{60}$$

et respectivement

$$s_n(F, x) = s_n(g_1, x) + s_n(g_2, x) + s_n(g_3, x). \tag{61}$$

L'oscillation de la suite $s_n(g_1, x)$ au point x est nulle en vertu de 4°:

$$\omega_{g_1}(x) = 0. \tag{62$_1$}$$

Puis

$$\omega_{g_2}(x) \geqq \varepsilon_p \tag{62$_2$}$$

en vertu de (51).

Enfin

$$\omega_{g_3}(x) \leqq 2V \cdot \sigma_p \tag{62$_3$}$$

en vertu de 5° et (57); (61), $(62)_{1,2,3}$ et (57) entraînent

$$\omega_F(x) = \vartheta_F(x) \geqq 2V \cdot \sigma_p > 0. \tag{63}$$

En tout point $x \epsilon E_0$ la suite $s_n(F, x)$ présente donc le phénomène de Gibbs. D'une manière analogue on prouve, qu'elle ne le présente pas si $x \epsilon C(E_0)$.

Soit enfin

$$E = W + (P_1 + P_2 + \dots) = W + E_0 \tag{18}$$

un ensemble quelconque F_σ de première catégorie donné d'avance.

On peut supposer, que les ensembles W et E_0 sont sans points communs.

Posons

$$G(x) = H(x) + F(x) \tag{64}$$

où $H(x)$ et $F(x)$ sont les deux fonctions définies respectivement aux §§ 7 et 9 par les formules (29), (56).

$G(x)$ est une fonction continue; sa série de Fourier est partout convergente, présente le phénomène de Gibbs aux points $x \epsilon E$ et seulement aux ces points là.

Nous avons résolu de cette manière le problème III posé au § 1: „L'ensemble E de ces points x où une série partout convergente de Fourier d'une fonction continue présente le phénomène de Gibbs — cet ensemble E est un F_σ de première catégorie le plus général".

§ 10.

Un théorème analogue peut être énoncé, nous allons le montrer, sur le phénomène de Gibbs présenté par les séries de puissances convergentes sur le cercle de convergence. Pour obtenir ce théorème il faut étudier de plus près les séries conjuguées aux séries de Fourier construites aux §§ 7, 8, 9.

Nous commençons par l'étude de la série f^* conjugué à la série de Fourier de la fonction f du § 8. Nous démontrerons, que:

(a) la série f^* est partout convergente.
(b) ne présente pas le phénomène de Gibbs en aucun point n'appartenant à P.
(c) a ses sommes partielles $\sigma_n(f,x)$ uniformément bornées [Voir (20) § 6].
(d) la fonction f^* est partout continue.

La proposition (a) résulte immédiatement de la dérivabilité de la fonction f; (b) est un corollaire du théorème IV § 6; la démonstration de (c) est toute analogue à celle de la propriété correspondante des sommes partielles $s_n(f,x)$. Il faut seulement remplacer partout le noyau $K_n(x-t)$ par le noyau $I_n(x-t)$ [Voir (19) et (20) § 6]. Ainsi on obtient d'abord

$$(43^*)\qquad |\sigma_n(f,x)-\sigma_n(\psi_k,x)|\leqq 2\,^{1)}$$

quels que soient n, k, et $x\in\delta_k$.

Puis

$$(46^*)\quad \sigma_n(\psi_k,x)=\lambda_k(x)\,.\,\sigma_n(\varphi_k,x)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\lambda_k(t)-\lambda_k(x)]\,\varphi_k(t)\,I_n(x-t)\,dt$$

[1]) Pour $s\neq 2k\pi$: $|K_n(s)|\leqq\left|\operatorname{cosec}\frac{s}{2}\right|$; $|I_n(s)|\leqq 2\left|\operatorname{cosec}\frac{s}{2}\right|$ c'est pourquoi on obtient une borne supérieure 2 fois plus grande que dans l'inégalité (43).

d'où

$$(48^*)\quad |\sigma_n(\psi_k,x)-\lambda_k(x)\,\sigma_n(\varphi_k,x)|\leqq\frac{8\pi^2}{\bar\delta_k}\cdot\frac{2M.\mu.\bar\delta_k}{k^2}=16M\mu.\frac{\pi^2}{k^2}=\frac{\pi^2}{2k^2}$$

quel que soient n, k, x; (43*), et (48*) et l'inégalité $|\sigma_n(\varphi_k,x)|\leqq 8$ [1]) entraînent

$$(53^*)\qquad |\sigma_n(f,x)|\leqq 10+\frac{\pi^2}{2}$$

quels que soient n et x.

Passons à la démonstration de (d). Cette démonstration est un peu longue et nous la partagerons en troits parties. Nous démontrerons notamment:

I. $f^*(a_k+o)=f^*(a_k)$; $f^*(b_k-o)=f^*(b_k)$; $k=1,2,3,\dots$

II. en désignant

$$(65)\qquad \varrho_k=\text{Maxim}\,|f^*(x)-f^*(a_k)|\quad\text{pour } x\in\delta_k$$

on a: $\lim\varrho_k=0$

III. f^* est continue sur P.

Ces propriétés sont suffisantes pour pouvoir affirmer la continuité de f^* (rappellons que f^* est continue à l'intérieur de δ_k d'après (b)).

Je pars de la formule

$$(22)\qquad f^*(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)-f(x)]\,.\cot\frac{t-x}{2}\,.dt$$

et de la formule analogue

$$(66)\qquad \psi_k^*(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\psi_k(t)-\psi_k(x)]\,.\cot\frac{t-x}{2}\,.dt.$$

Soit $x\in\delta_k$; en rêtranchant (66) de (22) et en tenant compte du fait, que $\psi_k=f_k$ dans l'intervalle δ_k et $\psi_k=0$ en dehors de δ_k, on obtient

$$(67)\quad f^*(x)-\psi_k^*(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(t)-\psi_k(t)]\cot\frac{t-x}{2}dt=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{C(\delta_k)}f(t)\,.\cot\frac{t-x}{2}\,.dt$$

où $C(\delta_k)=(o,a_k)+(b_k,2\pi)$ est le complémentaire de l'intervalle δ_k

[1]) Car $\psi_k^*=-2e_k.\cos(n_k+1)x.\sum_{r=1}^{n_k}\frac{\sin rx}{r}$ Comparer: (34).

En particulier pour $x = a_k$:

$$f^*(a_k) - \psi_k^*(a_k) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C(\delta_k)} f(t)\,.\cot\frac{t-a_k}{2}\,.\,dt \tag{68}$$

(67) et (68) donnent

$$f^*(x) - f^*(a_k) = [\psi_k^*(x) - \psi_k^*(a_k)] - \tag{69}$$
$$-\frac{1}{2\pi}\,.\sin\frac{x-a_k}{2}\,.\int\limits_{C(\delta_k)} \frac{f(t)\,.\,dt}{\sin\frac12(t-x)\,.\,\sin\frac12(t-a_k)}.$$

A l'aide de cette formule il est aisé maintenant de démontrer I et II.

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{C(\delta_k)} \frac{f(t)\,dt}{\sin\frac12(t-x)\,.\,\sin\frac12(t-a_k)} = \tag{70}$$
$$= \sum_{\substack{l=1\\(l\neq k)}}^{\infty}{}' \frac{1}{2\pi}\int\limits_{a_l}^{b_l} \frac{f(t)\,dt}{\sin\frac12(t-x)\,.\,\sin\frac12(t-a_k)}.$$

Pour $a_l \leqq t \leqq b_l$ et $f(t) \neq 0$ on a

$$\left|\frac{f(t)}{\sin\frac12(t-x)\,.\,\sin\frac12(t-a_k)}\right| \leqq \frac{|f(t)|}{\sin^2.\frac18\bar\delta_l} \leqq \frac{2M\mu\,.\,\bar\delta_l}{l^2\,.\,\frac{1}{16^2}\,.\,\bar\delta_l^2} = \frac{512\,M\mu}{l^2\,.\,\bar\delta_l} = \frac{16}{l^2\,.\,\bar\delta_l}\ [1]).$$

donc

$$\left|\int\limits_{a_l}^{b_l} \frac{f(t)\,dt}{\sin\frac12(t-x)\,.\,\sin\frac12(t-a_k)}\right| \leqq \bar\delta_l\,.\,\frac{16}{l^2\,.\,\bar\delta_l} = \frac{16}{l^2}$$

et (70) nous donne

$$|\Omega| \leqq \frac{1}{2\pi}\,.\sum_{l=1}^{\infty}{}' \frac{16}{l^2} < \frac{1}{2\pi}\,.16\,.\frac{\pi^2}{6} = \tfrac43\pi. \tag{71}$$

En portant cette valeur dans (69), on obtient

$$|f^*(x) - f^*(a_k)| \leqq |\psi_k^*(x) - \psi_k^*(a_k)| + \tfrac43\,.\,\pi\,.\sin\tfrac12(x-a_k); \tag{72}$$
$$[\text{quel que soit } x \in \delta_k].$$

Il en résulte immédiatement $f^*(a_k+0) = f^*(a_k)$. D'une manière analogue $f^*(b_k - o) = f^*(b_k)$ et I est ainsi démontré.

[1]) Comparer avec (42).

Pour obtenir II faisons croître n indéfiniment dans l'inégalité (48*); il vient à la limite:

$$|\psi_k^*(x) - \lambda_k(x)\,\varphi_k^*(x)| \leqq \frac{\pi^2}{2k^2}. \tag{73}$$

Or

$$\varphi_k^*(x) = -e_k\,.\,2\cos(n_k+1)x\,.\sum_{r=1}^{n_k}\frac{\sin rx}{r}$$

[Voir (30), (33) et III § 6] donc $|\varphi_k^*(x)| \leqq 2M\,.\,e_k$ et (73) entraîne

$$|\psi_k^*(x)| \leqq 2M\,.\,e_k + \frac{\pi^2}{2k^2} \tag{74}$$

quels que soient x et k.

Maintenant (72) donne

$$|f^*(x) - f^*(a_k)| \leqq 4M\,.\,e_k + \frac{\pi^2}{k^2} + \tfrac43\,.\,\pi\,.\sin\tfrac12(x-a_k) \tag{75}$$

quel que soit $x \in \delta_k$.

Cette inégalité justifie II.

Pour établir III nous ferons usage d'une propriété de la fonction f, qui n'était pas utilisée jusqu'ici, à savoir:

„La dérivée $f'(x)$ de la fonction f est uniformément nulle sur P, c'est-à-dire

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)}{h} = 0 \tag{76}$$

uniformément pour tous les $x \in P^u$.

En effet. Reprenons le raisonnement dont nous nous avons servi pour obtenir (39). N étant un nombre naturel quelconque, désignons

$$U_N = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_N;\quad T_N = C(U_N) = (0, 2\pi) - U_N$$
$$\gamma_N = \text{minim.}\,\bar\delta_s \quad \text{pour} \quad 1 \leqq s \leqq N.$$

Pour $x \in P$ et $|h| \leqq \frac14\gamma_N$ l'inégalité (39) donne

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqq \frac{8M\mu}{N^2} \tag{77}$$

quel que soit $x \in P$ car, si $f(x+h) \neq 0$, le point $(x+h)$ appartient à T_N donc à un δ_l tel, que $l > N$. (77) justifie (76).

Cela posé, revenons à la démonstration de III.

Soient x' et x'' deux points voisins appartenant à P. On a

$$f^*(x') = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,.\cot\frac{t-x'}{2}\,dt = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x'+s)\cot\frac{s}{2}\,.\,ds$$

$$f^*(x'') = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x''+s)\cot\frac{s}{2}\,.\,ds$$

d'où

(78) $$f^*(x'') - f^*(x') = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(x''+s) - f(x'+s].\cot\frac{s}{2}\,.\,ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{\gamma} + \int_{\gamma}^{2\pi-\gamma} + \int_{2\pi-\gamma}^{2\pi}\right\} = D_1 + D_2 + D_3.$$

Le nombre $\gamma < 0$ y est choisi de façon, que

(79) $$\left|\frac{f(x+s)}{s}\right| < \varepsilon$$

quel que soit $x \,\varepsilon\, P$ et $0 < |s| < \gamma$.

Déterminons encore $\eta > 0$ de la manière, que

(80) $$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \varepsilon\,.\,\gamma \quad \text{quand} \quad |x_2 - x_1| \leqq \eta.$$

On a maintenant pour $|s| < \gamma$

$$\left|f(x''+s)\,.\cot\frac{s}{2}\right| \leqq 2\,.\left|\frac{f(x''+s)}{s}\right| \leqq 2\varepsilon$$

en vertu de (79). D'une manière analogue:

$$\left|f(x'+s)\,.\,\cot\frac{s}{2}\right| \leqq 2\varepsilon$$

de sorte que

$(81)_1$ $$|D_1| \leqq \frac{1}{2\pi}\,.\,\gamma\,.\,4\varepsilon.$$

Pareillement

$(81)_3$ $$|D_3| \leqq \frac{1}{2\pi}\,.\,\gamma\,.\,4\varepsilon.$$

Enfin

$(81)_2$ $$|D_2| \leqq \frac{1}{2\pi}\,.\,\varepsilon\,.\,\gamma\,.\,\frac{2}{\gamma}\,.\,(2\pi - 2\gamma) < \frac{1}{2\pi}\,.\,4\varepsilon\,(2\pi - 2\gamma)$$

en supposant, que x' et x'' vérifient la condition

$$|x' - x''| < \eta$$

(78) et $(81)_{1,2,3}$ donnent

(82) $|f^*(x'') - f^*(x')| < 4\varepsilon$ si $x' \,\varepsilon\, P$, $x'' \,\varepsilon\, P$ et $|x' - x''| < \eta$.

Cette inégalité justifie III.

Les propriétés (a), (b), (c), (d) de la fonction f^* sont ainsi complètement démontrées.

§ 11.

La série F^* conjuguée à la série de Fourier de la fonction F du § 9 jouit de propriétés analogues aux propriétés (a), (b), (c), (d) de la série f^* établies au § 10.

En effet. De la formule

(59*) $$\sigma_n(F, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m\,.\,\sigma_n(f_m, x)$$

et des inégalités:

$(53^*)_m$ $$|\sigma_n(f_m, x)| \leqq 10 + \frac{\pi^2}{2} = V^*$$

quels que soient n, m, x et

(58*) $$|f_m^*(x)| \leqq V^*$$

quels que soient m et x on déduit tout de suite

(56*) $$F^*(x) = \lim_{n\to\infty}\sigma_n(F, x) = \sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_m\,.\,f_m^*(x).$$

Cette formule prouve, que

(A) la série $F^*(x)$ est partout convergente.

En tenant compte de (58*), on a aussi

(D) F^* est une fonction continue.

En tenant compte de $(53^*)_m$ et de la propriété (b) du § 10, on vérifie sans peine:

(B) la série F^* ne présente pas le phénomène de Gibbs en aucun point n'appartenant à $E_0 = P_1 + P_2 + \ldots$

Il reste encore à étudier la série H^* conjuguée à la série de Fourier de la fonction H du § 7. Malheureusement, cette série est divergente en tous les points de l'ensemble W du § 7. La cause en est le fait, que la série $h^*(x)$ conjuguée à la série $h(x)$ dont nous nous avons servi pour obtenir $H(x)$ — cette série $h^*(x)$ est divergente pour $x = 0$. Mais on peut tourner cette difficulté, en prenant comme base de la condensation une autre fonction $h(x)$ satisfaisant sauf aux conditions $1^0 - 4^0$ du § 7 aux quatres conditions nouvelles

(5⁰) la série $h^*(x)$ est partout convergente

(6⁰) la convergence de h^* est uniforme dans l'intervalle $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ quel que soit $\varepsilon > 0$

(7⁰) les sommes partielles $\sigma_n(h, x)$ sont uniformément bornées

(8⁰) la fonction h^* est partout continue.

Pour obtenir une telle tonction h, on pose dans l'intervalle $0 < x \leqq \pi$:

$$h(x) = \overline{\psi}_k(x) \quad \text{si} \quad x \in \overline{\delta}_k = \left(\frac{\pi}{k+1}, \frac{\pi}{k}\right); \quad k = 1, 2, \dots$$

où $\overline{\psi}_k$ et $\overline{\delta}_k$ se correspondent précisément de la même manière que ψ_k et δ_k au § 8. Dans l'intervalle $-\pi \leqq x < 0$ on pose, p. ex. $h(x) = -h(-x)$ et $h(o) = 0$.

La fonction h ainsi déterminée jouit de toutes les propriétés $1^0 - 8^0$. La marche à suivre pour s'en persuader est évidente: il faut répéter (avec des simplifications convenables) les raisonnements faits aux §§ 8 et (10) pour établir les propriétés analogues de la fonction f.

Si, en partant de cette fonction $h(x)$, on définie $H(x)$ par la formule (29), on obtient une fonction dont la série correspondante H^* est partout convergente, a une somme partout continue et ne présente pas le phénomène de Gibbs en aucun point n'appartenant a W.

Des propriétés des séries F^* et H^* énoncées plus haut, il résulte immédiatement, que la série

$$G^* = F^* + H^*$$

conjuguée à la série de Fourier de la fonction G du § 9 [(64)] est

1⁰ partout convergente.

2⁰ a une somme continue

3⁰ ne présente pas le phénomène de Gibbs en aucun point n'appartenant à $E = E_0 + W$.

Considérons maintenant la série de puissances

$$\mathfrak{P}(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - i b_n) z^n; \quad z = x + iy$$

où a_n, b_n sont les coëfficients de Fourier de la fonction $G(x)$.

Sur le cercle $|z| = 1$ $(z = e^{i\theta})$ on a

$$\mathfrak{P}(e^{i\theta}) = G(\theta) + i\, G^*(\theta). \tag{84}$$

Cette série est convergente et a une somme continue pour tous les θ.

Il est aisé de définir le phénomène de Gibbs pour une série de la forme (84). Comme mesure du phénomène on peut prendre, p. ex., le nombre

$$\vartheta_{\mathfrak{P}}(\theta) = \vartheta_G(\theta) + \vartheta_{G^*}(\theta)$$

$\vartheta_G(\theta)$ et $\vartheta_{G^*}(\theta)$ étant les mesures du phénomène de Gibbs relatives aux séries G et G^*. Ayant adopté cette définition, on démontre tout de suite, que la série (84) présente le phénomène de Gibbs aux tous les points de l'ensemble E et seulement aux ces points là. Nous avons donc le théorème

Théoréme. 1⁰ L'ensemble E de ces points $z = e^{i\theta}$ du cercle $|z| = 1$ où une série de puissances, partout convergente sur le cercle de convergence $|z| = 1$, présente le phénomème de Gibbs — cet ensemble E est un F_σ de première catégorie.

2⁰ Ayant donné sur le cercle $|z| = 1$ un ensemble quelconque E du type F_σ et de première catégorie, on peut définir une série de puissances convergete et *coutinue* pour $|z| \leqq 1$, qui présente le phénomène de Gibbs aux tous les points de l'ensemble E et seulement aux ces points là.