$U_m(\xi)$ identisch. Wenn aber unter den V_m nur endlich viele $U_m(\xi)$ vorkommen, so hat unsere Folge (nach Beseitigung endlich vieler Glieder) die Gestalt

$$S\left(x_1, \frac{d}{4^n}\right), \quad S\left(x_2, \frac{d}{4^{n+1}}\right), \ldots, \quad S\left(x_m, \frac{d}{4^{n+m}}\right), \ldots$$

und da es nach Voraussetzung einen zu allen diesen Sphären gehörenden Punkt x gibt, so bilden die $S\left(x, \frac{d}{4^{n+m}}\right)$, $(m=0,1,2,\ldots, \text{in inf.})$ ein volles Umgebungssystem von x in R, also auch in $R+\xi$.

2) *Die Folge aller Π_m ist regulär.*

Es folgt in der Tat aus

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \cdot S\left(y, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \supset z,$$

daß

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) + S\left(y, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \subset S\left(z, \frac{d}{4^m}\right)$$

ist, und aus

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \cdot U_{m+1}(\xi) \neq 0,$$

daß für mindestens ein $k \geqslant m+1$

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \cdot S\left(a_k, \frac{d}{4^{m+1}}\right),$$

also

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) + S\left(a_k, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \subset S\left(a_k, \frac{3d}{4^{m+1}}\right) \subset U_m(\xi),$$

Da aber ohnehin $U_{m+1}(\xi) \subset U_m(\xi)$ ist, so ist auch

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) + U_{m+1}(\xi) \subset U_m(\xi),$$

womit die Regularität der Ueberdeckungskette $\{\Pi_m\}$ bewiesen ist.

Der Raum $R+\xi$ kann also metrisiert werden; die Metrik des Raumes $R+\xi$ induziert aber auch eine neue Metrik im Raume R, in welcher die Punktfolge

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

eine divergente Fundamentalfolge ist. In der neuen Metrik ist somit R kein vollständiger Raum, w. z. b. w.

Über die Zerschneidungspunkte[1]) der zusammenhängenden Mengen.

Von

Casimir Zarankiewicz (Warszawa).

Wie bekannt [2]), hat eine zusammenhängende Menge S nur abzählbar viele fremde Teilkontinua, die ausschliesslich aus S zerschneidenden Punkten gebaut sind; vermittels derselben Beweismethode kann gezeigt werden, dass es nur abzählbar viele fremde zusammenhängende, in S abgeschlossene Mengen gibt, die unabzählbar viele Zerschneidungspunkte von S enthalten. Diese Methode lässt sich aber nicht weiter verallgemeinern. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des folgenden, noch allgemeineren, für metrische separable Räume gültigen, Satzes:

Satz. *Es gibt höchstens abzählbar viele, fremde, zusammenhängende Teilmengen einer zusammenhängenden Menge S, deren jede mindestens einen S zerschneidenden Punkt enthält.*

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz. *Ist M eine unabzählbare geordnete Punktmenge, so ist jeder Punkt derselben (eine höchstens abzählbare Menge ihrer ausgenommen) gleichzeitig ein Häufungspunkt vorangehender, wie auch nachstehender Punkte.*

Beweis. Es sei

(1) $$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n, \ldots$$

die Folge aller Kugeln, deren Radien und Mittelpunktkoordinaten rationale Zahlen sind. Ist ein Punkt p der Menge M kein Häufungs-

1) Ein Punkt p heisst Zerschneidungspunkt der zusammenhängenden Menge S, falls $S-p$ nicht zusammenhängend ist.

2) C. Zarankiewicz, *Sur les points de division*... Fund. Math. IX, S. 170, théorème 20.

punkt der nachstehenden Punkte, so existiert eine Umgebung U_p von p, die von p nachstehenden Punkten frei ist. Es sei K_{n_p} die erste Kugel der Folge (1) von dieser Eigenschaft.

(2) *Ist* $p \neq q$, *so ist auch* $K_{n_p} \neq K_{n_q}$.

In der Tat, es gehe z. B. p dem Punkte q voran. Die Kugel K_{n_p}, laut ihrer Definition, enthält q nicht, während doch K_{n_q} den Punkt q offenbar enthalten muss. Damit ist die Behauptung (2) erwiesen. Wir haben also die Menge der Punkte, die keine Häufungspunkte nachstehender Punkte sind, eindeutig auf eine Teilmenge der Folge (1) abgebildet, diese Menge ist also höchstens abzählbar. Offenbar dasselbe können wir, wegen der Symmetrie, von der Menge der Punkte, die keine Häufungspunkte vorangehender Punkte sind, behaupten. Entfernen wir also aus M diese beiden Punktkategorien, so besitzen die übrigbleibenden Punkte die verlangte Eigenschaft.

Beweis des Satzes. Ist p ein Zerschneidungspunkt der zusammenhängenden Menge S, so existiert [1]) eine Zerlegung:

(3) $$S = A_p + B_p,$$
wo

(4) $$A_p \cdot B_p \equiv p,$$

(5) $$A_p = \overline{A}_p \cdot S \neq p \neq \overline{B}_p \cdot S = B_p,$$

(6) A_p *und* B_p *sind zusammenhängend.*

Es sei a ein beliebiger aber festgehaltener Punkt von S. Wir bezeichnen den a enthaltenden Summanden in der Formel (3) stets mit A_p, den anderen mit B_p (wir schliessen den Fall $p = a$ aus); also ist

(7) $$a \subset A_p.$$

Ist

(8) $$p \neq q,$$

so gilt entweder

(9) $$B_p \cdot B_q = 0,$$

oder

(10) $$B_p \subset B_q \quad \textit{oder} \quad B_p \supset B_q.$$

[1]) C. **Zarankiewicz**, *Sur les points de division...*, Fund. Math. IX, S. 136, th. 6.

In der Tat, es kommen folgende Fälle in Betracht:

(11) $$p \subset A_q \quad \textit{und} \quad q \subset A_p$$

(12) $$p \subset A_q \quad \textit{und} \quad q \textit{ non-}\subset A_p$$

(13) $$p \textit{ non-}\subset A_q \quad \textit{und} \quad q \subset A_p$$

(14) $$p \textit{ non-}\subset A_q \quad \textit{und} \quad q \textit{ non-}\subset A_p.$$

Der Fall (14) ist aber ausgeschlossen, denn wegen q *non-*$\subset A_p$ und (3) ist $q \subset B_p$; die Menge A_q würde also einen A_q angehörenden Punkt, nämlich a (wegen (7)), und einen Punkt von B_p, nämlich q, enthalten. Da aber p die Menge S zwischen $A_p - p$ und $B_p - p$ zerschneidet, so ist, da A_q zusammenhängend ist, $p \subset A_q$ was eben der Formel (14) widerspricht.

Die Fälle (12) und (13) sind symmetrisch, es genügt also nur einen von ihnen zu untersuchen. Im Falle (12) enthält die zusammenhängende Menge A_p den $A_q - q$ angehörenden Punkt p, aber nicht den Punkt q, der S zwischen $A_q - q$ und $B_q - q$ zerschneidet; also ist $A_p \subset A_q$, woraus wegen (3) $B_q \subset B_p$. Im Falle (11) gilt, wegen der ersten Formel,

(15) $$p \textit{ non-}\subset B_q;$$

die zusammenhängende Menge B_q hat dabei, wegen der zweiten Formel einen Punkt, nämlich q, mit A_p gemein, aber enthält, auf Grund von (15), den Punkt p, der S zwischen $A_p - p$ und $B_p - p$ zerschneidet, nicht. Also gilt $B_q \subset A_p$ woraus wegen (3) (4) und (8) $B_q \cdot B_p = 0$ ist. Die Formeln (9) und (10) bei Voraussetzung (8) sind also bewiesen.

Wir machen nun folgende Voraussetzung:

(α) Es gibt unabzählbar viele fremde zusammenhängende Teilmengen T_p von S, von denen jede irgendeinen S zerschneidenden Punkt p enthält.

Die Mengen $B_p - p$ sind Relativgebiete auf S; sie können also nicht in unabzählbarer Anzahl einander fremd existieren. Also, wie leicht zu ersehen, muss es, wegen der Formeln (9) und (10), eine unabzählbare Familie $\mathscr{F}$ der B_p geben von der jedes Paar der B_p der Formel (10) genügt. Im weiteren befassen wir uns ausschliesslich mit diesen ausgewählten B_p. Sie lassen sich o r d n e n: wir setzen

(16) $$B_p \prec B_q,$$

wenn
$$B_{p} \subset B_{p}.$$

Damit sind aber auch die Zerschneidungspunkte p geordnet, indem wir $p \prec q$ setzen, wenn (16) stattfindet. Da, wie von der Familie $\mathcal{F}$ vorausgesetzt, die Menge der entsprechenden T_p unabzählbar ist, so existieren unabzählbar viele T_p die der Formel:

(17) $$\delta(T_p) > 4\varepsilon$$ [1]

wo $\varepsilon > 0$ ist, genügen. Es sei r ein Kondensationspunkt [2]) derjenigen p, für welche (17) stattfindet, und es sei U_r eine Umgebung von r derart, dass

(18) $$\delta(U_r) < \varepsilon.$$

Wir befassen uns von nun an, nur mit solchen Punkten p die S zerschneiden, fremden zusammenhängenden Teilmengen T_p angehören und in U_r liegen; wir bezeichnen die Menge dieser Punkte mit P. Wegen (17) und (18) existiert in jedem T_p für $p \subset P$ ein Punkt x_p derart, dass
$$\varrho(x_p, U_r) > \varepsilon;$$
also gilt, wegen $P \subset U_r$:

(19) $$\varrho(x_p, P) > \varepsilon$$

für unabzählbar viele p, nämlich für alle $p \subset P$. Die Menge $\{x_p\}$ lässt sich offenbar durch die Festsetzung $x_p \prec x_q$, wenn $p \prec q$, ordnen.

Wegen des Hilfsatzes, existiert ein Punkt x_{p_0} derart, dass

(20) $$x_{p_0} = \lim_{n \to \infty} x_{p_n}$$

(21) $$x_{p_0} = \lim_{k \to \infty} x_{p_k}$$

wo für jedes ganze n und k, gilt:

(22) $$x_{p_n} \prec x_{p_0} \prec x_{p_k}$$

Des weiteren gilt, wegen (19), (20) und (21)
$$\varrho(x_{p_0}, P) \geqslant \varepsilon$$

[1]) Das Symbol $\varrho(x, y)$ bedeutet die Entfernung der Punkte x und y; $\delta(K)$ den Durchmesser der Menge K, d. h. die obere Schranke von $\varrho(x, y)$, wo $x + y \subset K$.

[2]) Der Punkt r heisst Kondensationspunkt der Menge P wenn in jeder Umgebung U_r unabzählbar viele Punkte von P liegen.

woher

(23) $$x_{p_0} \text{ non} \subset P.$$

Betrachten wir die dem Punkte p_0 entsprechende Zerlegung (3) von S. Wegen (22) und (16) haben wir

(24) $$B_{p_n} \subset B_{p_0} \subset B_{p_k},$$

woher

(25) $$p_n \subset B_{p_0}.$$

Die zusammenhängenden Mengen T_{p_n}, da sie einander fremd sind, enthalten p_0 nicht, haben aber wegen (25) einen Punkt mit B_{p_0} gemein, also $T_{p_n} \subset B_{p_0}$, woher

(26) $$x_{p_n} \subset B_{p_0} \quad \textit{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Wegen (24) und (3), haben wir
$$A_{p_k} \subset A_{p_0} \subset A_{p_n},$$
woher
$$p_k \subset A_{p_0};$$
also, wie oben,
$$T_{p_k} \subset A_{p_0},$$
also

(27) $$x_{p_k} \subset A_{p_0}.$$

Wegen (26), (20) und (5), folgern wir

(28) $$x_{p_0} \subset B_{p_0}$$

und aus (27), (21) und (5) folgt

(29) $$x_{p_0} \subset A_{p_0}.$$

Da $p_0 \subset P$, so schliessen wir aus (23) dass $x_{p_0} \neq p_0$. Somit geben die Formel (28) und (29): $A_{p_0} . B_{p_0} \neq p_0$, was der Formel (4) widerspricht. Die voraussetzung (α) ist also unmöglich, womit unser Satz bewiesen ist.