Beweis des Satzes, dass ein metrisierbarer Raum dann und nur dann kompakt ist, wenn er in jeder Metrik vollständig ist [1]).

Von

V. Niemytzki und A. Tychonoff (Moskau).

Fréchet [2]) nennt einen *metrisierbaren* Raum R vollständig, wenn er in wenigstens einer Metrik dem Cauchyschen Konvergenzkriterium genügt. Hausdorff [3]) hat bewiesen, daß R, in dieser Metrik betrachtet, *metrisch* unerweitbar ist. Die Frage liegt nahe, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein metrisierbarer Raum in *jeder* mit seinen topologischen Eigenschaften verträglichen Metrik dem genannten Vollständigkeitskriterium genügt. Im Folgenden soll die in der Ueberschrift der vorliegenden Arbeit gegebene Antwort auf diese Frage aus dem allgemeinen Metrisationskriterium [4]) mit Hilfe einer leichten Ueberlegung abgeleitet werden.

Zunächst ist es klar, daß jeder kompakte metrisierbare Raum in jeder Metrik vollständig ist. In der Tat, ein kompakter metrisierbarer Raum ist bekanntlich bikompakt [5]), deshalb nicht nur metrisch, sondern sogar topologisch keiner Erweiterung fähig [6]). Es handelt sich also nur um den Beweis der umgekehrten Behauptung.

[1]) Diese Arbeit beantwortet eine von Herrn Alexandroff gestellte Frage; wir verdanken auch Herrn Alexandroff manche Vereinfachung unseres ursprünglichen Beweises.

[2]) Siehe z. B. Fréchet, *Sur les ensembles abstraits*, Ann. Ec. Norm. 38, (1921), S. 341.

[3]) Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914), S. 315. Hausdorff, *Mengenlehre* (Göschens Lehrbucherei, 1927), SS. 102 u. 107.

[4]) Alexandroff et Urysohn, *Une condition nécessaire et suffisante* etc., Comptes Rendus Paris, 177 (1923), S. 1274.

[5]) Alexandroff et Urysohn, *Zur Theorie der topologischen Räume*, Math. Ann., 92, S. 260.

[6]) a. a. O. [5]), S. 261—263.

Es sei R ein (in irgendeiner, fest zu denkenden Metrik) vollständiger Raum, der jedoch nicht kompakt ist; unser Satz wird bewiesen sein, wenn wir zeigen, daß R sich immer so ummetrisieren läßt, daß die metrische Vollständigkeit dabei verloren geht.

Tatsächlich, da R nicht kompakt ist, so enthält er eine abzählbare divergente Teilmenge A, die aus den Punkten

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots \tag{1}$$

bestehe. Da andererseits R in der a priori gegebenen Metrik vollständig ist, so kann man (wie man leicht zeigt) voraussetzen, daß es eine feste positive Zahl $2d$ gibt so daß

$$\varrho(a_i, a_k) \geqslant d$$

ist, sobald i und k verschieden sind.

Man führe nun in den Raum R (als topologischen Raum gedacht) einen neuen Punkt ξ ein, indem man ihn durch das abzählbare Umgebungssystem

$$U_m(\xi) = \sum_{i=m}^{\infty} S\left(a_i, \frac{d}{4^m}\right) + \xi \quad (m = 1, 2, \dots, \text{ in inf.})$$

definiert [1]); man überzeugt sich leicht davon, daß der soeben gewonnene Raum $R + \xi$ ein topologischer Raum ist; überdies ist der Punkt ξ in R offenbar ein nicht isolierter Punkt. Um zu zeigen, daß R metrisierbar ist, genügt es somit eine im Sinne des Alexandroff-Urysohnschen Metrisationssatzes vollständige reguläre Ueberdeckungskette anzugeben [2]). Zu diesem Zwecke betrachten wir für jedes m die aus $U_m(\xi)$ und allen Sphären $S\left(x, \frac{d}{4^m}\right)$ (wo x die Gesamtheit aller Punkte von R durchläuft und die zugrunde gelegte Metrik die des Raumes R ist) gebildete Ueberdeckung Π_m des Raumes $R + \xi$.

1) *Die Folge aller Π_m ist eine vollständige Ueberdeckungskette.*

Es sei in der Tat V_m irgendein Element des Mengensystems Π_m und $V_1, V_2, \dots, V_m, \dots$ eine abnehmende Folge solcher Elemente mit nicht leerem Durchschnitt. Wenn unter den V_m unendlich viele $U_m(\xi)$ vorkommen, so kann ihr Durchschnitt nur aus dem Punkte ξ bestehen, dann ist aber die gegebene Folge mit dem System aller

[1]) a. a. O. [5]), S. 261.

[2]) a. a. O. [4]), S. 1275.

$U_m(\xi)$ identisch. Wenn aber unter den V_m nur endlich viele $U_m(\xi)$ vorkommen, so hat unsere Folge (nach Beseitigung endlich vieler Glieder) die Gestalt

$$S\left(x_1, \frac{d}{4^n}\right), \quad S\left(x_2, \frac{d}{4^{n+1}}\right), \ldots, \quad S\left(x_m, \frac{d}{4^{n+m}}\right), \ldots$$

und da es nach Voraussetzung einen zu allen diesen Sphären gehörenden Punkt x gibt, so bilden die $S\left(x, \frac{d}{4^{n+m}}\right)$, $(m=0,1,2,\ldots$, in inf.) ein volles Umgebungssystem von x in R, also auch in $R+\xi$.

2) *Die Folge aller Π_m ist regulär.*

Es folgt in der Tat aus

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \cdot S\left(y, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \supset z,$$

daß

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) + S\left(y, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \subset S\left(z, \frac{d}{4^m}\right)$$

ist, und aus

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \cdot U_{m+1}(\xi) \neq 0,$$

daß für mindestens ein $k \geqslant m+1$

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \cdot S\left(a_k, \frac{d}{4^{m+1}}\right),$$

also

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) + S\left(a_k, \frac{d}{4^{m+1}}\right) \subset S\left(a_k, \frac{3d}{4^{m+1}}\right) \subset U_m(\xi),$$

Da aber ohnehin $U_{m+1}(\xi) \subset U_m(\xi)$ ist, so ist auch

$$S\left(x, \frac{d}{4^{m+1}}\right) + U_{m+1}(\xi) \subset U_m(\xi),$$

womit die Regularität der Ueberdeckungskette $\{\Pi_m\}$ bewiesen ist.

Der Raum $R+\xi$ kann also metrisiert werden; die Metrik des Raumes $R+\xi$ induziert aber auch eine neue Metrik im Raume R, in welcher die Punktfolge

$$a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$$

eine divergente Fundamentalfolge ist. In der neuen Metrik ist somit R kein vollständiger Raum, w. z. b. w.

Über die Zerschneidungspunkte[1]) der zusammenhängenden Mengen.

Von

Casimir Zarankiewicz (Warszawa).

Wie bekannt[2]), hat eine zusammenhängende Menge S nur abzählbar viele fremde Teilkontinua, die ausschliesslich aus S zerschneidenden Punkten gebaut sind; vermittels derselben Beweismethode kann gezeigt werden, dass es nur abzählbar viele fremde zusammenhängende, in S abgeschlossene Mengen gibt, die unabzählbar viele Zerschneidungspunkte von S enthalten. Diese Methode lässt sich aber nicht weiter verallgemeinern. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist der Beweis des folgenden, noch allgemeineren, für metrische separable Räume gültigen, Satzes:

Satz. *Es gibt höchstens abzählbar viele, fremde, zusammenhängende Teilmengen einer zusammenhängenden Menge S, deren jede mindestens einen S zerschneidenden Punkt enthält.*

Wir beweisen zuerst den

Hilfssatz. *Ist M eine unabzählbare geordnete Punktmenge, so ist jeder Punkt derselben (eine höchstens abzählbare Menge ihrer ausgenommen) gleichzeitig ein Häufungspunkt vorangehender, wie auch nachstehender Punkte.*

Beweis. Es sei

(1) $$K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n, \ldots$$

die Folge aller Kugeln, deren Radien und Mittelpunktkoordinaten rationale Zahlen sind. Ist ein Punkt p der Menge M kein Häufungs-

[1]) Ein Punkt p heisst Zerschneidungspunkt der zusammenhängenden Menge S, falls $S-p$ nicht zusammenhängend ist.

[2]) C. Zarankiewicz, *Sur les points de division*... Fund. Math. IX, S. 170, théorème 20.