Les ensembles projectifs et le crible de M. Lusin.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

E étant un ensemble de points donné quelconque, situé dans le demi-plan $y > 0$, nous désignerons par $K(E)$ et nous appellerons *ensemble criblé au moyen du crible* E [1]) l'ensemble de tous les nombres réels x, tels que la perpendiculaire élevée en x à l'axe OX coupe l'ensemble E en un ensemble de points (non vide) qui *n'est pas bien ordonné* à l'aide de cette convention que le rang des points soit conforme à la direction positive de l'axe OY.

Appelons *ensembles* P_n, resp. C_n, ceux des ensembles projectifs de classe $\leqslant n$ dans la classification de M. Lusin [2]) qui sont de la forme $PC\ldots PE$, resp. $CPC\ldots PE$, où E est un ensemble mesurable B.

Le but de cette Note est de démontrer (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) les théorèmes suivants:

Théorème I [3]). *Si E est un ensemble P_n plan, $K(E)$ est un ensemble P_n linéaire.*

Théorème II [3]). *Les ensembles P_n linéaires coïncident avec les ensembles $K(E)$, où E sont des ensembles C_{n-1} plans* [4]).

Pour fixer les idées, nous démontrerons le théorème I pour $n = 1$: la démonstration pour n naturel quelconque serait tout à fait analogue.

[1]) Cf. N. Lusin: *Fund. Math.* t. X, p. 10.

[2]) l. c., p. 90.

[3]) Ces théorèmes ont été signalés dans ma Note des *C. R.*, t. 185, p. 835, séance du 24 octobre 1927.

[4]) Par C_0 nous comprenons les ensembles mesurables B.

Soit donc E un ensemble P_1 plan, donc un ensemble (A) plan. n étant un nombre naturel, désignons par Q_n l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, pour lesquels il existe au moins un point (x_0, y_0) de E, tel que $x = x_0$ et $0 < y_0 - y \leqslant 1/n$.

Posons

$$Q = Q_1 Q_2 Q_3 \dots : \tag{1}$$

on voit sans peine que l'ensemble $K(E)$ est la projection orthogonale de l'ensemble Q sur l'axe d'abscisses.

Or, je dis que Q_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ sont des ensembles (A). En effet, désignons par T_n l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tel que $(x, y) \epsilon E$ et $0 \leqslant z \leqslant 1/n$. L'ensemble E étant un ensemble (A) plan, T_n sera évidemment un ensemble (A) dans l'espace à 3 dimensions. Désignons par U_n l'ensemble de tous les points (x, y, z) de l'espace, tels que $(x, y) \epsilon E$ et $0 < z \leqslant 1/n$: l'ensemble U_n est évidemment le produit de l'ensemble T_n par un ensemble ouvert (formé de tous les points (x, y, z) de l'espace, pour lesquels $z > 0$): c'est donc encore un ensemble (A).

Or, on voit sans peine que l'ensemble Q_n est une image univoque et continue de l'ensemble U_n: en effet, on obtient une transformation continue de U_n en Q_n en faisant correspondre au point (x, y, z) de U_n le point $(x, y - z)$ de Q_n. Donc, Q_n, comme image continue d'un ensemble (A), est un ensemble (A) (pour $n = 1, 2, 3, \dots$), c. q. f. d. Il en résulte, d'après (1), que Q est un ensemble (A) [1]. L'ensemble $K(E)$, comme projection de l'ensemble Q, est donc un ensemble (A), et le théorème I est démontré (pour $n = 1$).

Du théorème I résulte tout de suite que si E est un ensemble C_{n-1}, $K(E)$ est un ensemble P_n, puisque tout ensemble C_{n-1} est en même temps un ensemble P_n (ce qui résulte sans peine de la définition des ensembles P_n). Donc, pour déduire du théorème I le théorème II, il suffira de démontrer que tout ensemble P_n linéaire est un ensemble $K(E)$, où E un ensemble C_{n-1} (convenablement choisi).

Soit donc H un ensemble P_n linéaire. Les ensembles P_n linéaires sont, comme on sait, des projections orthogonales des ensembles C_{n-1} plans: il existe donc un ensemble plan M qui est un C_{n-1} et dont la projection sur l'axe d'abscisses est l'ensemble H, et, comme

[1] Dans le cas général, où E est un ensemble P_n, il faudrait utiliser ici le théorème qu'un produit d'une suite infinie d'ensembles P_n est un ensemble P_n; v. *Fund. Math.* t. XI, p. 126.

on voit sans peine, on peut encore supposer que l'ensemble M est situé dans le demi-plan $y > 0$. Désignons par M_k l'ensemble de tous les points $(x, y + 1/k)$, où $(x, y) \epsilon M$: l'ensemble M_k, comme superposable avec M, est un C_{n-1} (pour $k = 1, 2, 3, \dots$). Posons:

$$E = M_1 + M_2 + M_3 + \dots$$

— ce sera un ensemble C_{n-1}, comme somme d'une infinité dénombrable d'ensembles C_{n-1} [1]. Or, on voit sans peine que $H = K(E)$. Le théorème II est ainsi démontré.

Remarquons qu'on peut démontrer sans peine encore le théorème suivant:

Théorème III. *Les ensembles (A) linéaires coïncident avec les ensembles $K(E)$, où E sont des ensembles plans fermés.*

[1] ce qui résulte tout de suite du théorème cité sur les produits des ensembles P_n et de la remarque que les enssembles C_n coïncident avec les complémentaires des ensembles P_n.