Периферическая когомологическая локальная связность

Д. Роте (Москва)

Abstract. In the paper the definition of the peripherically cohomologically locally connected space and the study of its properties are given. It is shown that if the space is locally homologically connected and peripherically cohomologically locally connected, then for the local groups of homologies and cohomologies all the universal coefficient formulas and Künneth formulas take place.

Space X is supposed to be metric and locally compact. Aleksandrov–Čech-cohomology and canonical homology (Skljarenko-homology) are used.

Пусть X — локально компактное метризуемое пространство, R — кольцо главных идеалов, и G — любой модуль над R. Через $H_n^x(G)$ обозначим $H_n(X, X\setminus x;\ G) = \varprojlim_{U \ni x} H_n(X,\ X\setminus U; G)$. Аналогично $H_x^n(G) = \varinjlim_{U \ni x} H^n(X, X\setminus U; G)$, $I_n^x(G) = \varprojlim_{U \ni x} \tilde{H}_n^c(U\setminus x; G)$; $I_x^n(G) = \varinjlim_{U \ni x} \tilde{H}^n(U\setminus x; G) = H^{n+1}(X, X\setminus x; G)$. Локальные группы гомологий и когомологий $H_n^x(G)$, $H_x^n(G)$, $I_n^x(G)$ и $I_x^n(G)$ и их естественные преобразования $\delta_n^x\colon H_n^x(G) \to I_{n-1}^x(G)$ и $\delta_x^n\colon I_x^n(G) \to H_x^{n+1}(G)$ изучены в [1], [3], [5].

Всюду в работе H^n — когомологии Александрова-Чеха, H_n — точные гомологии, описание которых дано в [3] (альтернативное описание — в [8]) Символ c используется для обозначения компактных носителей, а символ $\tilde{H}$ для приведённых гомологий и когомологий.

Как известно, пространство X называется *гомологически локально связным в точке x над модулем коэффициентов* $G(\mathrm{hlc}_G(x))$ если для любой окрестности U точки x и любого n найдётся такая окрестность $V \subset U$ точки x, что образ гомоморфизма $\tilde{H}_n^c(V; G) \to \tilde{H}_n^c(U; G)$ равен нулю. Пространство называется *гомологически локально связным над* $G(\mathrm{hlc}_G)$ если оно гомологически локально связно во всех точках $x \in X$.

Аналогичным образом в терминах когомологий H^* определяется когомологическая локальная связность. При $G = R$ эти требования эквивалентны [6].

Как показал А. Э. Харлап [5], из свойства $\mathrm{hlc}_G(x)$ вытекает, что δ_n^x: $H_n^x(G) \to I_{n-1}^x(G)$ — изоморфизмы. Оказывается, однако, что δ_x^n могут не быть изоморфизмами даже в случае локально стягиваемых компактов [4]. Изоморфизм δ_x^n (см. теорему 1) обеспечивается условием, содержащимся в следующем определении.

Определение 1. Будем говорить, что пространство X *периферически когомологически локально связно в точке $x \in X$ над модулем коэффициентов* $G(\mathrm{pclc}_G(x))$, если для любой окрестности U точки x и любого $n \geqslant 0$ можно подобрать такую окрестность $V \subset U$ точки x, что образ гомоморфизма $H^n(X \setminus x, X \setminus V; G) \to$ $\to H^n(X \setminus x, X \setminus U; G)$, индуцированного вложением $(X \setminus x, X \setminus U) \subset (X \setminus x, X \setminus V)$, равен нулю. Пространство называется *периферически когомологически локально связным над* $G(\mathrm{pclc}_G)$, если оно периферически когомологически локально связно над G во всех точках $x \in X$.

Приведённое определение оправдывается тем, что $\varprojlim_{U \ni x} H^n(X \setminus x, X \setminus U; G) =$ $= 0$, см. лемму ([1]) в [1] (см. также лемму 1 ниже).

Аналогичное определение естественно рассматривать и в терминах гомологий H_*^c (см. ниже).

Эти свойства изучаются в первой части работы. Оказывается, что они не зависят от свойства гомологической локальной связности (примеры 1 и 2) и эквивалентны друг другу в случае hlc — пространств (теорема 3). Во второй части работы рассматривается класс пространств, удовлетворяющих требованиям hlc_R и pclc_R одновременно. В этом классе для локальных групп гомологий и когомологий имеют место все формулы универсальных коэффициентов и формулы Кюннета (теоремы 4 и 5).

Говорят, что обратный спектр $\{(A_i)_{i \in I} \pi_i^j\}$ удовлетворяет условию стабилизации Миттаг-Леффлера (ML), если для любого $i \in I$ найдётся $j \geqslant i$ такое, что $\operatorname{Im} \pi_i^j = \operatorname{Im} \pi_i^k$ для всех $k \geqslant j$. Аналогично, прямой спектр $\{(A_i)_{i \in I} \pi_i^j\}$ удовлетворяет условию стабилизации (ML), если для любого $i \in I$ найдётся $j \geqslant i$ такое, что $\operatorname{Ker} \pi_j^i = \operatorname{Ker} \pi_k^i$ для всех $k \geqslant j$.

Теорема 1. *Если пространство X периферически когомологически локально связно над G в точке $x \in X$, то преобразования $\delta_x^n \colon I_x^n(G) \to H_x^{n+1}(G)$ являются изоморфизмами.*

Доказательство. По следствию 5 в [5] для всех $n \geqslant -1$ имеют место точные последовательности

$$0 \to \varprojlim_{U \ni x}{}^{(1)} H^n(X, X \setminus U; G) \to I_x^n(G) \to H_x^{n+1}(G) \to 0\,,$$

причём δ_x^n — изоморфизм, если обратный спектр $\{H^n(X, X \setminus U; G)\}_{U \ni x}$ удовлетворяет условию (ML).

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & I^{n-1}(G) \arrow[r, "\delta_W^{n-1}"] \arrow[d, equal] & H^n(X, X \setminus W; G) \arrow[d, "\alpha"] & & \\
 & I^{n-1}(G) \arrow[r, "\delta_x^{n-1}"] \arrow[d, equal] & H^n(X, X \setminus V; G) \arrow[r, "i_x^n"] \arrow[d, "\beta"] & H^n(X \setminus x, X \setminus V; G) \arrow[r, "j_x^n"] \arrow[d, "\varphi"] & I_x^n(G) \\
H^{n-1}(X \setminus x, X \setminus U; G) \arrow[r, "j_U^{n-1}"] & I_x^{n-1}(G) \arrow[r, "\delta_U^{n-1}"] & H^n(X, X \setminus U; G) \arrow[r, "i_U^n"] & H^n(X \setminus x, X \setminus U; G) \arrow[r, "j_U^n"] & I_x^n(G)
\end{tikzcd}$$

---

[1] В формулировке этой леммы имеются опечатки.

Строки этой диаграммы образованы точными последовательностями троек типа $(X, X \setminus x, X \setminus V)$, а вертикальные гомоморфизмы индуцированы вложением. В соответствии с периферической когомологической локальной связностью X окрестность V выберём таким образом, чтобы гомоморфизм φ был нулевым. Пусть $h \in \operatorname{Im} \beta$. Тогда в силу коммутативности диаграммы $i_U^n(h) = 0$. Найдётся $h' \in I_x^{n-1}(G)$, для которого $\delta_U^{n-1}(h') = h$. Тогда $\delta_w^{n-1}(h') \in H^n(X, X \setminus W; G)$ переходит в h при гомоморфизме $\beta \circ \alpha$ т.е. $\operatorname{Im} \beta \subset \operatorname{Im}(\beta \circ \alpha)$. Так как, очевидно, $\operatorname{Im} \beta \supset \operatorname{Im}(\beta \circ \alpha)$, то выполняется условие (ML). Теорема доказана.

Предложения 1 и 2 ниже дают локальные характеристики свойства периферической когомологической локальной связности. Предварительно докажем утверждение, являющееся аналогом того, что $\varprojlim_{U \ni x}{}^{(1)} \tilde{H}_n^c(U; G) =$ $= \varprojlim_{U \ni x} \tilde{H}_n^c(U; G) = 0$ для всех n и любых $x \in X$ (см. [3] и [5]).

Лемма 1. *Для всех точек $x \in X$ и любых $n \geqslant 0$* $\varprojlim_{U \ni x}{}^{(1)} H^n(X \setminus x, X \setminus U; G) =$ $= \varprojlim_{U \ni x} H^n(X \setminus x, X \setminus U; G) = 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $x \in X$. В точной последовательности 2 теоремы 1 в [5]

$$0 \to \varprojlim_i{}^{(1)} H^{n-1}(Y, Y \setminus A_i; G) \to H^n(Y, Y \setminus A; G) \to \varprojlim_i H^n(Y, Y \setminus A_i; G) \to 0$$

положим $Y = X \setminus x$ и $A = \varnothing$. Пусть A_i — замкнутые окрестности точки x, для которых $A_{i+1} \subset A_i$ и $\bigcap_i^{\infty} A_i = \varnothing$. Возникает точная последовательность

$$0 \to \varprojlim_i{}^{(1)} H^{n-1}(X \setminus x, X \setminus A_i; G) \to H^n(X \setminus x, X \setminus x; G) \to \varprojlim_i H^n(X \setminus x, X \setminus A_i; G) \to 0,$$

в которой средний, а потому и крайние члены, равны нулю для всех n. Поскольку спектры $\{H^n(X \setminus x, X \setminus A_i; G)\}_i$ и $\{H^n(X \setminus x, X \setminus U; G)\}_{U \ni x}$, где U — открытые окрестности точки x, являются конфинальными частями объединённого спектра, то $\varprojlim_{U \ni x}{}^{(k)} H^n(X \setminus x, X \setminus U; G) = \varprojlim_i{}^{(k)} H^n(X \setminus x, X \setminus A_i; G) = 0$ $(k = 0, 1)$.

Предложение 1. *Эквивалентные утверждения*:

1. *пространство X периферически когомологически локально связно над G в точке $x \in X$*;

2. *для всякого n обратный спектр $\{H^n(X, X \setminus U; G)\}_{U \ni x}$ удовлетворяет условию стабилизации (ML) и существует такая окрестность W точки x, что образ гомоморфизма $H^n(X \setminus x, X \setminus W; G) \to I_x^n(G)$ равен нулю*;

3. *для всякого n найдется такая последовательность окрестностей U_i точки x, что обратный спектр $\{H^n(X, X\setminus U_i; G)\}_i$ распадается в прямую сумму постоянного спектра $H_x^n(G)$ и некоторого спектра с нулевыми проекциями.*

Доказательство. Будем пользоваться диаграммой из теоремы 1. Покажем эквивалентность условий 1 и 2. Пусть X обладает свойством $\mathrm{pclc}_G(x)$. Доказательство первой части утверждения 2 содержится в теореме 1, вторая часть вытекает из того, что $\varphi = 0$.

Если справедливо утверждение 2, выберём окрестность V так, чтобы $j_V^n = 0$. Пусть v — произвольный элемент модуля $H^n(X\setminus x, X\setminus V; G)$ и $u = \varphi(v)$. Найдётся $u' \in H^n(X, X\setminus U; G)$ и $v' \in H^n(X, X\setminus V; G)$, такие, что $u = i_U^n(u')$, $v = i_V^n(v')$ и $u' = \beta(v')$. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{Im}\beta = \operatorname{Im}(\beta\circ\alpha)$ для любой окрестности $W\subset V$ точки x. Аналогично, для V можно подобрать такую окрестность $W\subset V$, $W\ni x$, что $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\big(H^n(X, X\setminus\tilde W; G)\to H^n(X, X\setminus W; G)\big)$ для всякого $\tilde W\subset W$, $\tilde W\ni x$. Этот процесс можно продолжить, поэтому $u' \in \varprojlim_{U\ni x} H^n(X, X\setminus U; G)$. Так как $\operatorname{Im}\delta_x^{n-1} = \varprojlim_{U\ni x} H^n(X, X\setminus U; G)$, то $u' \in \operatorname{Im}\delta_x^{n-1}$ и, следовательно, $u = 0$.

Покажем эквивалентность утверждений 2 и 3. Пусть выполнено условие 2. Выбираем U таким образом, что $j_U^{n-1} = 0$. Тогда для любой окрестности $V\subset U$ точки x преобразование δ_V^{n-1} — мономорфизм. Так как X имеет свойство $\mathrm{pclc}_G(x)$, то δ_x^{n-1}: $I_x^{n-1}(G)\to H_x^n(G)$ — изоморфизм и $H_x^n(G)$ мономорфно вкладывается в $H^n(X, X\setminus V; G)$. С другой стороны, $H_x^n(G)$ есть образ модулей $H^n(X, X\setminus V; G)$ для достаточно малых окрестностей V точки x.

Если выполнено условие 3, то спектр $\{H^n(X, X\setminus V; G)\}_{V\ni x}$ удовлетворяет условию (ML) и отображение δ_V^{n-1} — мономорфизм (поскольку δ_x^{n-1} — изоморфизм). Следовательно, $j_V^{n-1} = 0$ для достаточно малых окрестностей точки x. Предложение доказано.

Для счётных модулей G преобразование δ_x^n: $I_x^n(G)\to H_x^{n+1}(G)$ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда обратный спектр $\{H^n(X, X\setminus U; G)\}_{U\ni x}$ удовлетворяет условию (ML) (см. следствие 5 и [5]). Поэтому пункт 2 предложения 1 показывает, насколько условие периферической когомологической локальной связности зависит от требования изоморфности δ_x^n.

Предложение 2. *Если модуль коэффициентов G счётен, то эквивалентны следующие условия:*

1. *пространство X периферически когомологически локально связно над G в точке x,*

2. *модули $I_x^n(G)$ счётны для всех n,*

3. *для всякого n и любой ограниченной*(²) *окрестности U точки x модуль $H^n(X\setminus x, X\setminus U; G)$ счётен.*

Заметим, что вообще говоря группы H^n континуальны даже в категории локально конечных полиэдров.

(²) Окрестность называется ограниченной, если она имеет компактное замыкание.

Доказательство. Пусть X обладает свойством $\mathrm{pclc}_G(x)$. По предложению 1 существует такая окрестность W точки x, что в точной последовательности тройки $(X, X\setminus x, X\setminus W)$

$$\ldots\to H^n(X, X\setminus W; G)\to H^n(X\setminus x, X\setminus W; G)\xrightarrow{j^n} I_x^n(G)\to H^{n+1}(X, X\setminus W; G)\to\ldots$$

отображение j^n равно нулю. В силу локально компактности пространства окрестность W можно считать ограниченной. Следовательно, $I_x^n(G)$ мономорфно вкладывается в счётный модуль $H^{n+1}(X, X\setminus W; G) = H_c^{n+1}(W; G)$, т.е. справедливо утверждение 2.

Рассматривая когомологическую последовательность для произвольной ограниченной окрестности W точки x, получаем условие 3.

Если фигурирующие в лемме 1 группы счётны, то из её утверждения вытекает, что конфинальная часть спектра $\{H^n(X\setminus x, X\setminus U; G)\}_{U\ni x}$ имеет нулевые проекции (см. следствие 1 из работы [5]). Поэтому из условия 3 вытекает периферическая когомологическая локальная связность в точке x.

Заметим, что даваемый условием 2 предложения 2 критерий периферической когомологической локальной связности является аналогом теоремы Митчелла [9], в которой утверждается, что когомологически конечномерное пространство X тогда и только тогда гомологически локально связно над счётным кольцом R, когда во всех точках $x\in X$ модули $H_n^x(R)$ счётны.

Известно, что из гомологической локальной связности над кольцом R следует гомологическая локальная связность над любым R — модулем G. Соответствующее утверждение справедливо и для свойства периферической когомологической локальной связности.

Теорема 2. *Пусть X периферически когомологически локально связно над счётным кольцом R в точке x. Тогда в этой точке X периферически когомологически локально связно над любым R — модулем G.*

Доказательство. Фиксируем произвольное n. Для любой окрестности U точки x выберём такие окрестности V и W, $x\in W\subset V\subset U$, что гомоморфизмы $H^n(X\setminus x, X\setminus V; R)\to H^n(X\setminus x, X\setminus U; R)$ и $H^{n+1}(X\setminus x, X\setminus W; R)\to H^{n+1}(X\setminus x, X\setminus V; R)$ тривиальны. Следовательно, равны нулю и образы гомоморфизмов $H^n(X\setminus x, X\setminus V; R)\otimes G\to H^n(X\setminus x, X\setminus U; R)\otimes G$ и $\operatorname{Tor}\big(H^{n+1}(X\setminus x, X\setminus W; R), G\big)\to\operatorname{Tor}\big(H^{n+1}(X\setminus x, X\setminus V; R), G\big)$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & H^n(X\setminus x, X\setminus W; R)\otimes G & \to & H^n(X\setminus x, X\setminus W; G) & \to & \operatorname{Tor}\big(H^{n+1}(X\setminus x, X\setminus W; R), G\big) & \to 0\\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & \\
0\to & H^n(X\setminus x, X\setminus V; R)\otimes G & \to & H^n(X\setminus x, X\setminus V; G) & \to & \operatorname{Tor}\big(H^{n+1}(X\setminus x, X\setminus V; R), G\big) & \to 0\\
 & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow & & \downarrow & \\
0\to & H^n(X\setminus x, X\setminus U; R)\otimes G & \to & H^n(X\setminus x, X\setminus U; G) & \to & \operatorname{Tor}\big(H^{n+1}(X\setminus x, X\setminus U; R), G\big) & \to 0
\end{array}$$

в строках которой стоят формулы универсальных коэффициентов, существование которых для любых G обеспечивается вытекающей из предложения 2 счётностью модулей $H^p(X\setminus x, X\setminus U; R)$ (см. § 5 в [4]). Так как φ и ψ — тривиальные отображения, то и гомоморфизм $H^n(X\setminus x, X\setminus W; G)\to H^n(X\setminus x, X\setminus U; G)$ тривиален.

Вместе с теоремой 1 из этого результата следует, что для периферически когомологически локально связного над счётным кольцом R в точке x пространства X преобразования $\delta_x^n\colon I_x^n(G)\to H_x^{n+1}(G)$ являются изоморфизмами для любого R-модуля G. Однако счётность кольца R в этом утверждении не существенна.

Предложение 3. *Если X периферически когомологически локально связно над кольцом R в точке $x\in X$, то преобразования $\delta_x^n\colon I_x^n(G)\to H_x^{n+1}(G)$ являются изоморфизмами для произвольного R-модуля G.*

Доказательство. Фиксируем произвольное n. Переходя в формуле универсальных коэффициентов

$$0\to H_c^n(U; R)\otimes G\to H_c^n(U; G)\to \operatorname{Tor}\left(H_c^{n+1}(U; R), G\right)\to 0$$

(см. теорему 1 в [3]) к обратному пределу и учитывая, что для достаточно малых окрестностей $H_c^n(U; R) = H^n(X, X\setminus U; R)$ получаем

$$\ldots\to \varprojlim_{U\ni x}{}^{(1)}\left(H^n(X, X\setminus U; R)\otimes G\right)\to \varprojlim_{U\ni x}{}^{(1)} H^n(X, X\setminus U; G)\to$$
$$\to \varprojlim_{U\ni x}{}^{(1)}\operatorname{Tor}\left(H^{n+1}(X, X\setminus U; R), G\right)\to 0.$$

По предложению 1 обратный спектр $\{H^p(X, X\setminus U; R)\}_{U\ni x}$ $(p = n, n+1)$ распадается в прямую сумму постоянного спектра и некоторого спектра с нулевыми проекциями. Следовательно, $\varprojlim\limits_{U\ni x}{}^{(1)}\left(H^n(X, X\setminus U; R)\otimes G\right) = \varprojlim\limits_{U\ni x}{}^{(1)}\operatorname{Tor}\left(H^{n+1}(X, X\setminus U; R), G\right) = 0$ и тем самым $\varprojlim\limits_{U\ni x}{}^{(1)} H^n(X, X\setminus U; G) = 0$. Таким образом, из точной последовательности, указанной в доказательстве теоремы 1, заключаем, что $\delta_x^n\colon I_x^n(G)\to H_x^{n+1}(G)$ — изоморфизмы.

Теперь рассмотрим гомологически аналог свойства периферической когомологической локальной связности.

Определение 2. Будем говорить, что пространство X *периферически гомологически локально связно в точке $x\in X$ над модулем коэффициентов G* ($\mathrm{phlc}_G(x)$) если для любой окрестности U точки x и всякого $n\geqslant 0$ можно подобрать такую окрестность $V\subset U$ точки x, что образ гомоморфизма $H_n^c(X\setminus x, X\setminus U; G)\to$ $\to H_n^c(X\setminus x, X\setminus V; G)$ равен нулю. Пространство называется *периферически гомологически локально связным над G* (phlc_G), если оно периферически гомологически локально связно над G в каждой точке $x\in X$.

Определение оправдывается тем, что (как это легко следует из применения точного функтора $\varinjlim\limits_{U\ni x}$ к гомологическим последовательностям пар $(X\setminus x, X\setminus U)$) $\varinjlim\limits_{U\ni x} H_n^c(X\setminus x, X\setminus U; G) = 0$. Свойство $\mathrm{phlc}_G(x)$ имеет место всякий раз, когда

точка $x\in X$ обладает сколь угодно мелкими окрестностями U с конечно порождёнными модулями $H_n^c(X\setminus x, X\setminus U; G)$.

Предложение 4. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *пространство X периферически гомологически локально связно над G в точке $x\in X$;*

2. *для всякого n прямой спектр $\{H_n^c(X, X\setminus U; G)\}_{U\ni x}$ удовлетворяет условию* (ML) *и существует такая окрестность W точки x, что образ гомоморфизма $H_{n+1}^x(G)\to H_n^c(X\setminus x, X\setminus W; G)$ равен нулю;*

3. *для всякого n найдется последовательность окрестностей U_i, точки x, что прямой спектр $\{H_n^c(X, X\setminus U_i; G)\}_i$ распадается в прямую сумму постоянного спектра $H_n^x(G)$ и некоторого спектра с нулевыми проекциями.*

Доказательство. Для произвольного n рассмотрим диаграмму, аналогичную диаграмме из теоремы 1:

$$\begin{tikzcd}
H_{n+1}^x(G) \arrow[r, "\delta_{n+1}^U"] \arrow[d, equal] & H_n^c(X\setminus x, X\setminus U; G) \arrow[r, "i_n^U"] \arrow[d, "\varphi"] & H_n(X, X\setminus U; G) \arrow[r, "j_n^U"] \arrow[d, "\beta"] & H_n^x(G) \arrow[r, "\delta_n^U"] \arrow[d, equal] & H_{n-1}^c(X\setminus x, X\setminus U; G) \\
H_{n+1}^x(G) \arrow[r, "\delta_{n+1}^V"] & H_n^c(X\setminus x, X\setminus V; G) \arrow[r, "i_n^V"] & H_n(X, X\setminus V; G) \arrow[r, "j_n^V"] \arrow[d, "\alpha"] & H_n^x(G) \arrow[d, equal] & \\
 & & H_n(X, X\setminus W; G) \arrow[r, "j_n^W"] & H_n^x(G) &
\end{tikzcd}$$

Покажем эквивалентность условий 1 и 2. Пусть для любой окрестности U точки x окрестность $V\subset U$ выбрана таким образом, что $\varphi = 0$. Тогда $\delta_{n+1}^V = 0$. Пусть u — произвольный элемент ядра отображения $\alpha\circ\beta$. Тогда $j_n^U(u) = 0$ и $u = i_n^U(u')$, где $u'\in H_n^c(X\setminus x, X\setminus U; G)$. Поскольку $\varphi(u') = 0$, то $\beta(u) = 0$. Следовательно, $\operatorname{Ker}(\alpha\circ\beta)\subset\operatorname{Ker}\beta$. Так как, очевидно, $\operatorname{Ker}\beta\subset\operatorname{Ker}(\alpha\circ\beta)$, то справедливо условие (ML).

Если выполнено условие 2, выберём U таким образом, что $\delta_{n+1}^U = 0$. Тогда $\delta_{n+1}^V = 0$ для всякого $V\subset U$. Подберём V так, чтобы $\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Ker}(\alpha\circ\beta)$ для любой окрестности $W\subset V$ точки x, что возможно в силу условия (ML). Пусть u — произвольный элемент модуля $H_n^c(X\setminus x, X\setminus U; G)$, $u' = i_n^U(u)$. Тогда образ u' в модуле $H_n^x(G)$ равен нулю, так как $j_n^U(u') = 0$. В соответствии с выбором V имеем $\beta(u') = 0$. Так как i_n^V — мономорфизм, получаем, что $\varphi(u) = 0$.

Покажем эквивалентность условий 2 и 3. Пусть выполнено условие 2. Выберём U так, что $\delta_n^U = 0$. Следовательно, отображение $j_n^U\colon H_n(X, X\setminus U; G)\to$ $\to H_n^x(G)$ — эпиморфизм. С другой стороны, в силу условия (ML) образ отображения β изоморфен $H_n^x(G)$ и, следовательно, для достаточно малых окрестностей $H_n^x(G)$ мономорфно вкладывается в модуль $H_n(X, X\setminus W; G)$.

Если выполнено условие 3, то спектр $\{H_n(X, X\setminus W; G)\}_{W\ni x}$ удовлетворяет условию (ML) и отображение j_n^V является эпиморфизмом. Следовательно $\delta_n^V = 0$ для достаточно малых окрестностей точки x. Предложение доказано.

Связь между свойствами pclc и phlc устанавливает

Теорема 3. *Если X периферически когомологически локально связно в точке $x \in X$ над счётным кольцом R, то в этой точке X периферически гомологически локально связно над любым R-модулем G. Если пространство гомологически локально связно над R то из свойства* $\mathrm{phlc}_R(x)$ *вытекает* $\mathrm{pclc}_G(x)$ *(R не обязательно счётно).*

Доказательство. Первая часть доказывается аналогично теореме 2, однако используются формулы универсальных коэффициентов

$$0 \to \mathrm{Ext}\big(H^{n+1}(X\setminus x, X\setminus U; R), G\big) \to H_n^c(X\setminus x, X\setminus U; G) \to$$
$$\to \mathrm{Hom}\big(H^n(X\setminus x, X\setminus U; R), G\big) \to 0.$$

Так как в силу предложения 2 группы $H^p(X\setminus x, X\setminus U; R)$ счётны, эти формулы имеют место в соответствии с § 5 в [4].

Доказательство второй части проводится аналогично, поскольку для hlc_R-пространств имеются формулы универсальных коэффициентов ([7], II. 12.7).

$$0 \to \mathrm{Ext}\big(H_{n-1}^c(X\setminus x, X\setminus A; R), G\big) \to H^n(X\setminus x, X\setminus A; G) \to$$
$$\to \mathrm{Hom}\big(H_n^c(X\setminus x, X\setminus A; R), G\big) \to 0.$$

В этих формулах предполагается, что окрестность A точки x замкнута. Но это не существенно, так как определения 1 и 2 легко переформулируются в терминах замкнутых окрестностей точки x.

Примеры показывают, что гомологическая локальная связность и периферическая когомологическая локальная связность (периферическая гомологическая локальная связность) — независимые понятия.

Пример 1. Пусть S_i^1, $i = 1, 2, \ldots$, — окружности, $\pi_i\colon S_i^1 \to S_{i+1}^1$ — двукратные накрытия и пусть X — компактификация одной точкой x_0 локально компактного пространства, полученного из дискретного объединения цилиндров отображений π_i после попарных отождествлений окружностей S_i^1. Пространство X локально стягиваемо и поэтому гомологически локально связно. Как показал Е. Г. Скляренко (см. § 5 в [4]), в случае, когда $R = Z$ — кольцо целых чисел, $H^n_{x_0}(Z) = 0$ для всех n, $H_n^{x_0}(Z) = 0$ для $n \neq 2$, а группа $H_2^{x_0}(Z)$ изоморфна двоично рациональным числам $Q(\frac{1}{2})$, поэтому $I^2_{x_0}(Z) \cong$ $\cong \mathrm{Ext}(Q(\frac{1}{2}), Z) \neq 0$. Следовательно, $\delta^2_{x_0}$ — не изоморфизм, и в соответствии с теоремой 1 X не имеет свойства $\mathrm{pclc}_Z(x_0)$.

Пример 2. Для всякого целого числа $k \geqslant 1$ из начала координат $\mathcal{O}$ евклидовой плоскости R^2 отложим отрезок длины $1/k$ под углом $1/k$ к оси абсцисс, и из конечной точки $k+1$-ого отрезка опустим перпендикуляр на k-ую прямую. Пусть X — объединение всех отрезков. Ясно, что X имеет свойства pclc_Z и phlc_Z. Однако X не $\mathrm{hlc}_Z(\mathcal{O})$.

В связи с этим естественно изучать пространства, являющиеся гомологически локально связными и периферически когомологически локально связными одновременно.

Теорема 4. *Справедливы утверждения:*

Если X — hlc_R, *то имеют место формулы универсальных коэффициентов*

(1) $$0 \to \mathrm{Ext}\big(I^x_{n-1}(R), G\big) \to I^n_x(G) \to \mathrm{Hom}\big(I^x_n(R), G\big) \to 0.$$

Если X — pclc_R, *то имеют место формулы универсальных коэффициентов*

(2) $$0 \to \mathrm{Ext}\big(H^{n+1}_x(R), G\big) \to H^x_n(G) \to \mathrm{Hom}\big(H^n_x(R), G\big) \to 0.$$

Если X — hlc_R *и* pclc_R, *то имеют место формулы универсальных коэффициентов*

(3) $$0 \to \mathrm{Ext}\big(H^x_{n-1}(R), G\big) \to H^n_x(G) \to \mathrm{Hom}\big(H^n_x(R), G\big) \to 0,$$

(4) $$0 \to \mathrm{Ext}\big(I^{n+1}_x(R), G\big) \to I^x_n(G) \to \mathrm{Hom}\big(I^n_x(R), G\big) \to 0.$$

Если X — hlc_R, *то имеют место формулы универсальных коэффициентов*

(5) $$0 \to I^x_n(R)\otimes G \to I^x_n(G) \to \mathrm{Tor}\big(I^n_{x-1}(R), G\big) \to 0,$$

(6) $$0 \to H^x_n(R)\otimes G \to H^x_n(G) \to \mathrm{Tor}\big(H^x_{n-1}(R), G\big) \to 0.$$

Если X — pclc_R, *то имеют место формулы универсальных коэффициентов*

(7) $$0 \to H^n_x(R)\otimes G \to H^n_x(G) \to \mathrm{Tor}\big(H^{n+1}_x(R), G\big) \to 0,$$

(8) $$0 \to I^n_x(R)\otimes G \to I^n_x(G) \to \mathrm{Tor}\big(I^{n+1}_x(R), G\big) \to 0.$$

Заметим, что для hlc_R-pclc_R-пространств имеются изоморфизмы $H^x_n(G) \cong$ $\cong I^x_{n-1}(G)$ (теорема 2 в [5]) и $I^n_x(G) \cong H^{n+1}_x(G)$ (предложение 3), так что некоторые формулы оказываются совпадающими. Поэтому достаточно доказать формулы универсальных коэффициентов (1), (2), (5) и (7).

Доказательство. Фиксируем любое n и произвольную точку $x \in X$. Известно, что для гомологически локально связных пространств имеет место формула универсальных коэффициентов

$$0 \to \mathrm{Ext}\big(H^c_{n-1}(X; R), G\big) \to H^n(X, G) \to \mathrm{Hom}\big(H^c_n(X; R), G\big) \to 0.$$

Пологая $X = U\setminus x$ и переходя к прямому пределу по U, получаем

$$0 \to \varinjlim_{U\ni x} \mathrm{Ext}\big(H^c_{n-1}(U\setminus x; R), G\big) \to I^n_x(G) \to \varinjlim_{U\ni x} \mathrm{Hom}\big(H^c_n(U\setminus x; R), G\big) \to 0.$$

В общем случае функтор $\varinjlim$ не перестановочен с функторами Ext и Hom. Однако (как заметил Е. Г. Скляренко) в силу гомологической локальной связности пространства X обратный спектр $\{H^c_p(U\setminus x; R)\}_{U\ni x}$ распадается в прямую сумму постоянного спектра $I^x_p(R)$ и некоторого спектра с нулевыми проекциями ($p = n-1, n$). Поэтому

$$\varinjlim_{U\ni x} \mathrm{Ext}\big(H^c_{n-1}(U\setminus x; R), G\big) \cong \mathrm{Ext}\big(I^x_{n-1}(R), G\big)$$

и

$$\varinjlim_{U\ni x} \mathrm{Hom}\big(H^c_n(U\setminus x; R), G\big) \cong \mathrm{Hom}\big(I^x_n(R), G\big).$$

Формулы (2), (5) и (7) доказываются таким же образом. Во втором случае функтор прямого предела применяется к известной формуле универсальных коэффициентов (см. теорему 3 в [3])

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_c^{n+1}(U; R), G) \to H_n(U; G) \to \operatorname{Hom}(H_c^n(U; R), G) \to 0.$$

Учитывая, что для достаточно малых открытых множеств $H_c^p(U; R) \cong H^p(X, X \setminus U; R)$ и $H_p(U; R) \cong H_p(X, X \setminus U; R)$, получаем

$$0 \to \varinjlim_{U \ni x} \operatorname{Ext}(H^{n+1}(X, X \setminus U; R), G) \to H_n^x(G) \to \varinjlim_{U \ni x} \operatorname{Hom}(H^n(X, X \setminus U; R), G) \to 0$$

Распадение обратного спектра $\{H^p(X, X \setminus U; R)\}_{U \ni x}$ в прямую сумму постоянного спектра $H_x^p(R)$ и спектра с нулевыми проекциями ($p = n, n+1$) происходит за счёт периферической когомологической локальной связности (предложение 1) и немедленно приводит к формулам (2).

Формулы универсальных коэффициентов

$$0 \to H_n^c(X; R) \otimes G \to H_n^c(X; G) \to \operatorname{Tor}(H_{n-1}^c(X; R), G) \to 0$$

имеют место лишь для конечно порождённых модулей коэффициентов G, и без ограничений на G — в теории гомологий Бореля–Мура [6]. Однако для hlc_R — пространств теория гомологий Бореля–Мура эквивалентна точной теории гомологий, определённой Е. Г. Скляренко (см. предложение 8 в [2]). Пологая $X = U \setminus x$ и переходя к обратному пределу, получаем

$$0 \to \varprojlim_{U \ni x} (H_n^c(U \setminus x; R) \otimes G) \to I_n^x(G) \to \varprojlim_{U \ni x} (\operatorname{Tor}(H_{n-1}^c(U \setminus x; R), G) \to \varprojlim_{U \ni x}{}^{(1)} (H_n^c(U \setminus x; R) \otimes G) \to \ldots$$

Как и выше, в силу гомологической локальной связности X обратный спектр $\{H_p^c(U \setminus x; R)\}_{U \ni x}$ является прямой суммой постоянного спектра $I_p^x(R)$ и спектра с нулевыми отображениями. Это обеспечивает не только то, что начальные члены этой точной последовательности совпадают с членами последовательности (5), но и обращение в нуль четвертого члена (содержащего $\varprojlim^{(1)}$).

Аналогично, из формулы универсальных коэффициентов

$$0 \to H_c^n(U; R) \otimes G \to H_c^n(U; G) \to \operatorname{Tor}(H_c^{n+1}(U; R), G) \to 0,$$

учитывая изоморфизм $H_c^p(U; R) \cong H^p(X, X \setminus U; R)$, получаем

$$0 \to \varinjlim_{U \ni x} (H^n(X, X \setminus U; R) \otimes G) \to H_x^n(G) \to \varinjlim_{U \ni x} \operatorname{Tor}(H^{n+1}(X, X \setminus U; R), G) \to \varinjlim_{U \ni x}{}^{(1)} (H^n(X, X \setminus U; R) \otimes G) \to \ldots$$

В силу периферической когомологической локальной связности, применяя аргументы, аналогичные предыдущему случаю, получаем точную последовательность (7). Теорема доказана.

Локальные ограничения, фигурирующие в теореме 4, существенны. Так, анализ локальных групп в точке x_0 пространства, рассмотренного в примере 1

выше, опровергает формулы (2), (3) и (4) (несмотря на то, что X гомологически локально связно). Модификация этого примера (в которой отображение окружностей $S_i^1 \to S_{i+1}^1$ имеет степень i) опровергает формулу (8). Существуют примеры и в других ситуациях.

Полученные формулы универсальных коэффициентов позволяют доказать некоторые дальнейшие свойства пространства, являющихся одновременно гомологически и периферически когомологически локально связными. Важную роль при этом играет следующий результат Митчелла [9].

Пусть R — счётное кольцо, $\{F_i\}_{i \in I}$ — обратный спектр счётных модулей. Тогда $\varinjlim_i \operatorname{Hom}(F_i, R)$ и $\varinjlim_i \operatorname{Ext}(F_i, R)$ тогда и только тогда счётны, когда для всякого i можно подобрать такое $j \geqslant i$, что модуль $\operatorname{Im}(F_j \to F_i)$ конечно порождён. В частности, $\operatorname{Hom}(F, R)$ и $\operatorname{Ext}(F, R)$ тогда и только тогда счётны, когда F — конечно порождён.

Следствие 1. *Пусть R — счётное кольцо и пространство X имеет конечную когомологическую размерность над R. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *пространство X гомологически и периферически когомологически локально связно над R;*
2. *локальные модули гомологий и когомологий всех типов конечно порождены для каждого n и любой точки $x \in X$;*
3. *модули $H_n^x(R)$ конечно порождены для любого n и любой $x \in X$.*

Доказательство. Пусть X обладает свойствами hlc_R и pclc_R. Тогда для произвольной фиксированной точки $x \in X$ группы $I_{n-1}^x(R) \cong H_n^x(R)$ счётны [9]. Группы $H_x^n(R) \cong I_x^{n-1}(R)$ также счётны (предложение 2). Используя выше упомянутую теорему Митчелла, из точных последовательностей 2 теоремы 4 заключаем, что модули $H_x^n(R) = I_x^{n-1}(R)$ конечно порождены. Аналогично, из точных последовательностей 3 вытекает конечная порождённость модулей $I_{n-1}^x(R) = H_n^x(R)$.

Из условия 2, очевидно, вытекает условие 3.

Пусть $H_n^x(R)$ конечно порождены для произвольных n и $x \in X$. Тогда по теореме 1 Митчелла [9] X есть hlc_R — пространство, поэтому $H_n^x(R) \cong I_{n-1}^x(R)$. В соответствии с формулами 1 теоремы 4 группы $I_x^n(R)$ счётны. Следовательно, X обладает свойством pclc_R (предложение 2).

Говорят, что локальное число Бетти p_x^n конечно в точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x найдётся такая окрестность $V \subset U$ точки x, что образ гомоморфизма $H_c^n(V; R) \to H_c^n(U; R)$ конечно порождён. Локальное число Бетти p_n^x конечно в точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x можно подобрать такую окрестность $V \subset U$ точки x, что образ гомоморфизма $H_n^c(V \setminus x; R) \to H_n^c(U \setminus x; R)$ конечно порождён.

Следствие 2. *Пусть R — счётное кольцо и пространство X имеет конечную когомологическую размерность над R. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *пространство X гомологически и периферически когомологически локально связно над R;*

2. *для всякого n числа p_n^x и p_x^n конечны во всех точках $x \in X$;*

3. *для всякого n, любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U найдется такая окрестность $V \subset U$ точки x, что образы гомоморфизмов $H_n(U; R) \to H_n(V; R)$ и $H^n(U \setminus x; R) \to H^n(V \setminus x; R)$ конечно порождены.*

Доказательство. Покажем сначала эквивалентность условий 1 и 2. По теореме 16.4 гл. 2 в [7] p_x^n конечны для всякого n во всех точках $x \in X$ тогда и только тогда, когда X — hlc_R. В силу предложения 6.8 из [6] модули $H_n^c(U \setminus x; R)$ счётны для всех n и $x \in X$, и по теореме 2 Митчелла конечность p_n^x эквивалентна счётности модулей $\varinjlim_{U \ni x} \mathrm{Hom}(H_n^c(U \setminus x; R), R)$, и $\varinjlim_{U \ni x} \mathrm{Ext}(H_n^c(U \setminus x; R), R)$. Переход к прямому пределу в формулах универсальных коэффициентов, существующих в силу гомологической локальной связности X [3], приводит к точным последовательностям

$$0 \to \varinjlim_{U \ni x} \mathrm{Ext}(H_{n-1}^c(U \setminus x; R), R) \to I_x^n(R) \to \varinjlim_{U \ni x} \mathrm{Hom}(H_n^c(U \setminus x; R), R) \to 0 .$$

Таким образом, счётность $\varinjlim_{U \ni x} \mathrm{Ext}(H_n^c(U \setminus x; R), R)$ и $\varinjlim_{U \ni x} \mathrm{Hom}(H_n^c(U \setminus x; R), R)$ для всех n эквивалентна счётности для всех n модулей $I_x^n(R)$. Последнее эквивалентно периферической когомологической локальной связности (предложение 2).

Проверим эквивалентность условий 1 и 3. Гомологическая локальная связность пространства X эквивалентна тому, что для всякого n, любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U существует окрестность $V \subset U$ точки x такая, что модуль $\mathrm{Im}(H_n(U; R) \to H_n(V; R))$ конечно порождён.

Если выполнено условие 3, то можно подобрать такую систему окрестностей U_i точки x, диаметры которых стремятся к нулю, что модули $\mathrm{Im}(H^n(U_i \setminus x; R) \xrightarrow{\pi^i} H^n(U_{i+1} \setminus x; R))$ конечно порождены и поэтому счётны для всех i. Но тогда $I_x^n(R) = \varinjlim_i H^n(U_i \setminus x; R) = \varinjlim_i (\mathrm{Im}\,\pi^i)$ счётны и по предложению 2 X имеет свойство pclc_R.

Наоборот, как уже отмечалось, из гомологической локальной связности X следует, что прямой спектр $\{H^n(U \setminus x; R)\}_{U \ni x}$ распадается в прямую сумму постоянного спектра $I_x^n(R)$ и некоторого спектра с нулевыми проекциями. По следствию 1 модули $I_x^n(R)$ конечно порождены, поэтому выполнено условие 3. Следствие доказано.

Теорема 5. *Если X и Y гомологически локально связны над R, то имеют место формулы Кюннета*

$$(1) \quad 0 \to \bigoplus_{p+q=n} (H_p^x(X; R) \otimes H_q^y(Y; R)) \to H_n^{(x,y)}(X \times Y; R) \to$$
$$\to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p^x(X; R), H_q^y(Y; R)) \to 0 .$$

Если X и Y периферически когомологически локально связны над R, то имеют место формулы Кюннета

$$(2) \quad 0 \to \bigoplus_{p+q=n} (H_x^p(X; R) \otimes H_y^q(Y; R)) \to H_{(x,y)}^n(X \times Y; R) \to$$
$$\to \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}(H_x^p(X; R), H_y^q(Y; R)) \to 0 .$$

В этих формулах через $H_p^x(X; R)(H_x^p(X; R))$ обозначены локальные модули гомологий $H_p^x(R)$ (соответственно, локальные модули когомологий $H_x^p(R)$) пространства X в точке x.

Доказательство. Первая формула доказана в [7], стр. 234. Проверим вторую. По теореме II.18.2 в [7] имеются точные последовательности

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} (H_c^p(U; R) \otimes H_c^q(V; R)) \to H_c^n(U \times V; R) \to$$
$$\to \bigoplus_{p+q=n+1} \mathrm{Tor}(H_c^p(U; R), H_c^q(V; R)) \to 0 .$$

Здесь U — окрестность точки $x \in X$, а V — окрестность точки $y \in Y$. Переходя к обратному пределу и учитывая, что в силу периферической когомологической локальной связности пространств X и Y над R обратные спектры

$$\{H^p(X, X \setminus U; R)\}_{U \ni x} = \{H_c^p(U; R)\}_{U \ni x} \quad \text{и} \quad \{H^p(Y, Y \setminus V; R)\}_{V \ni y} = \{H_c^p(V; R)\}_{V \ni y}$$

распадаются в прямые суммы постоянных спектров $H_x^p(X; R)$, соответственно $H_y^p(Y; R)$, и спектров с нулевыми проекциями (предложение 1), с помощью аргументов, уже применявшихся в теореме 4, получим формулу 2. Теорема доказана.

Анализируя в рассмотренной выше точной последовательности члены, содержащие $\overset{(1)}{\varprojlim}$, получаем, что $\overset{(1)}{\varprojlim_{U \times V}} H_c^n(U \times V; R) = 0$. Поэтому из приведённой в теореме 1 точной последовательности для локальных когомологий заключаем, что если оба пространства обладают свойством pclc_R, то $H_{(x,y)}^{n+1}(X \times Y; R) \cong \cong I_{(x,y)}^n(X \times Y; R)$.

Известно также, что произведение $X \times Y$ гомологически локально связных пространств X и Y гомологически локально связно, и поэтому $H_n^{(x,y)}(X \times Y; R) \cong I_{n-1}^{(x,y)}(X \times Y; R)$.

Таким образом, в формулах 1 и 2 теоремы 5 группы H_p^x и H_x^p можно заменить изоморфными им локальными модулями I_q^x и I_x^q.

Следствие 3. *Если X и Y гомологически локально связны над R, то имеют место формулы Кюннета*

$$(1) \quad 0 \to \bigoplus_{p+q=h-1} (I_p^x(X; R) \otimes I_q^y(Y; R)) \to$$
$$\to I_n^{(x,y)}(X \times Y; R) \to \bigoplus_{p+q=n-2} \mathrm{Tor}(I_p^x(X; R), I_q^y(Y; R)) \to 0.$$

Если X и Y периферически когомологически локально связны над R, то имеют место формулы Кюннета

$$(2)\quad 0 \to \bigoplus_{p+q=n-1} \big(I_x^p(X; R) \otimes I_y^q(Y; R)\big) \to$$
$$\to I_{(x,y)}^n(X \times Y; R) \to \bigoplus_{p+q=n} \operatorname{Tor}\big(I_x^p(X; R), I_y^q(Y; R)\big) \to 0 .$$

Следствие 4. *Пусть R — счётное кольцо. Если X и Y периферически когомологически локально связны над R, то и произведение $X \times Y$ обладает этим свойством.*

Доказательство. Свойство pclc_R пространства X эквивалентно счётности всех локальных модулей $I_x^n(R)$ (предложение 2). Если этим свойством обладают X и Y, то все модули $I_x^p(X; R)$ и $I_y^q(Y; R)$ счётны, и из рассмотрения точной последовательности 2 следствия 3 получаем, что все модули $I_{(x,y)}^n(X \times Y; R)$ также счётны, т.е. $X \times Y$ обладает свойством pclc_R.

В заключение выражаю благодарность Е. Г. Скляренко за постановку задачи и руководство работой.

Литература

[1] Е. М. Бениаминов, Е. Г. Скляренко, *О локальных группах когомологий*, Доклады АН СССР 176 (5) (1967), стр. 987–990.
[2] С. В. Петкова, *Пространства с конечно порожденными гомологиями и когомологиями*, Сердика Българско Матем. спис. 3 (1977), стр. 349–358.
[3] Е. Г. Скляренко, *Теория гомологий и аксиома точности*, Успехи матем. наук 24 (5) (1969), стр. 87–140.
[4] — *К теории гомологий, ассоциированной с когомологиями Александрова–Чеха*, Успехи матем. наук 34 (6) (1979), стр. 92–120.
[5] А. Э. Харлап, *Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обобщенные многообразия*, Матем. сб. 96 (3), (1975), стр. 347–371.
[6] A. Borel, J. C. Moore, *Homology theory for locally compact spaces*, Michigan Math. J. 7 (1960), pp. 137–160.
[7] G. F. Bredon, *Sheaf Theory*, Mc. Graw-Hill, New York 1967.
[8] W. S. Massey, *Homology and cohomology theory*, New York and Basel 1978.
[9] W. J. R. Mitchell, *Homology manifolds, inverse systems and cohomological local connectedness*, J. London Math. Soc. 19 (2) (1979), pp. 348–358.

Accepté par la Rédaction le 19. 5. 1980

On Prohorov spaces *

by

G. V. Cox (Macomb, Ill.)

Abstract. A topological property is defined which implies the Prohorov property and in some eases is equivalent. Related properties are discussed, and our property is used to refute two reasonable conjectures concerning Prohorov spaces.

§ 1. Introduction. For a separable, metric space, X, we let $P(X)$ denote the space of probability measures on the Borel subsets of X, endowed with the weak topology. That is, $\mu_n \to \mu$ if and only if $\liminf \mu_n G \geqslant \mu G$ for every open set G. Let $P_t(X)$ denote the subspace of $P(X)$ consisting of those "tight" measures, μ, for which $\mu B = \sup\{\mu K\colon K \subseteq B,\ K \text{ is compact}\}$ for all Borel sets, B, in X.

We say that X is *Prohorov* if it is true that if M is a compact subset of $P_t(X)$, then if $\varepsilon > 0$, there exists a compact subset H of X such that for each $\mu \in M$, $\mu H \geqslant 1 - \varepsilon$. The first result concerning Prohorov spaces was that if X is Polish (complete, separable, metric), then X is Prohorov [Pv].

It is not at all obvious which separable metric spaces enjoy the Prohorov property. Indeed, the next series of results concerning Prohorov spaces consisted of examples of non-Prohorov spaces, culminating in the description of a non-Prohorov, σ-compact subspace of the unit square [D].

Shortly afterwards, Preiss [Ps] (and later, independently, Saint-Raymond [SR]) showed that among the co-analytic separable metric spaces, the only Prohorov spaces are the Polish spaces, so it is much easier to be non-Prohorov than was previously suspected. In the same paper, Preiss gives an example, assuming the continuum hypothesis (CH), of a non-Polish, Prohorov subspace of the unit interval.

The purpose of this paper is to examine the relationship between Polish spaces and Preiss's CH example in an attempt to topologically characterize separable, metric Prohorov spaces. We give a topological property, called an S-decomposition, which is sufficient, and many times necessary, for a space to be Prohorov. Related properties of S-decompositions are discussed, and the property is used to refute two reasonable conjectures about Prohorov spaces.

* The research for this paper was conducted while the author was at University of London, Chelsea College.