Catégories multiéquationnelles

par

Yves Diers (Valenciennes)

Résumé. Les catégories multiéquationnelles sont des catégories de foncteurs multicontinus pour les multiproduits, définis sur une catégorie à multiproduits et à valeurs dans Ens. On montre que les catégories multiéquationnelles sont équivalentes aux catégories multimonadiques sur Ens. Cela étend le résultat de F. E. J. Linton suivant lequel les catégories équationnelles variétales sont équivalentes aux catégories monadiques sur Ens.

0. Introduction. Les catégories multiéquationnelles sont des catégories de foncteurs multicontinus pour les multiproduits, définis sur une catégorie à multiproduits et à valeurs dans Ens. On montre que les catégories multiéquationnelles sont équivalentes aux catégories multimonadiques sur Ens. Cela étend le résultat de F. E. J. Linton suivant lequel les catégories équationnelles variétales sont équivalentes aux catégories monadiques sur Ens.

Parmi les nombreux exemples de telles catégories donnés dans [1], citons les catégories des corps, des anneaux locaux, des espaces métriques, des espaces préhilbertiens, des ensembles ordonnés complets, des espaces localement compacts. La description, en termes de catégories multiéquationnelles, de ces objets bien connus, n'est pas ordinaire. Elle fait apparaître des opérations partiellement définies telles que les valeurs des fractions rationnelles pour les anneaux locaux, les bornes supérieures pour les ensembles ordonnés complets et les limites d'ultrafiltres pour les espaces localement compacts.

1. Théories et catégories multiéquationnelles.
2. Catégories multiéquationnelles et catégories multimonadiques.
3. La théorie multiéquationnelle des espaces localement compacts.
4. La théorie multiéquationnelle des ensembles ordonnés complets.

1. Théories et catégories multiéquationnelles.

1.0. Définitions. Un *multiproduit* d'une petite famille $(A_i)_{i\in I}$ d'objets d'une catégorie A est une petite famille $(\gamma_{ij}\colon B_j \to A_i)_{(i,j)\in I\times J}$ de morphismes de A telle que, pour toute famille $(f_i\colon B \to A_i)_{i\in I}$ de morphismes de A, il existe un unique couple (j, f) formé d'un $j\in J$ et d'un morphisme $f\colon B \to B_j$ vérifiant: $\forall i\in I$, $\gamma_{ij} f = f_i$.

Un multiproduit est déterminé à isomorphisme près. On dira que les B_j *appartiennent* au multiproduit des objets $(A_i)_{i\in I}$. La notion duale s'appelle *multisomme* et a été définie dans [0]. Une catégorie A est *à multiproduits* si toute petite famille d'objets de A a un multiproduit.

1.1. DÉFINITIONS. Une *théorie multiéquationnelle* est une catégorie M à multi-produits, munie d'un ensemble M_0 d'objets distingués tel que tout objet de M appartient à un multiproduit d'objets de M_0.

Une *M-multialgèbre* est un foncteur $F\colon M \to \mathrm{Ens}$ qui est multicontinu pour les multiproduits [0] c'est-à-dire tel que, pour tout multiproduit $(\gamma_{ij}\colon Y_j \to X_i)_{(i,j)\in I\times J}$ dans M, l'application canonique $\langle (F\gamma_{ij})\rangle\colon \coprod_{j\in J} FY_j \to \prod_{i\in I} FX_i$ est bijective.

Si F, G sont deux M-multialgèbres, un *M-homomorphisme* de F dans G est une transformation naturelle de F dans G. Ceux-ci forment un ensemble puisqu'ils sont déterminés par leurs valeurs sur les objets appartenant à M_0.

$\mathrm{MulAlg}(M)$ désigne la *catégorie des M-multialgèbres* et M-homomorphismes. Le foncteur *oubli de structure* $U_M\colon \mathrm{MulAlg}(M) \to \mathrm{Ens}$ est défini par $U_M F = \coprod_{X\in M_0} FX$ pour $F \in \mathrm{MulAlg}(M)$ et $U_M f = \coprod_{X\in M_0} f_X$ pour $f\colon F \to G$. Les catégories équivalentes aux catégories de la forme $\mathrm{MulAlg}(M)$ sont dites *multiéquationnelles* et les foncteurs équivalents aux foncteurs de la forme U_M sont dits *multiéquationnels*. Nous allons montrer que les catégories et foncteurs multiéquationnels sont exactement les catégories et foncteurs multimonadiques sur Ens. [1].

2. Catégories multiéquationnelles et catégories multimonadiques.

THÉORÈME. *Une catégorie M est une théorie multiéquationnelle si et seulement si elle est équivalente à la duale de la catégorie de Kleisli $(\mathrm{Ens}_{/s})_T$ d'une multimonade (S, T) sur* Ens. *Les catégories* $\mathrm{MulAlg}(M)$ *et* $\mathrm{Ens}^T{}_{/s}$ *sont alors équivalentes, de façon compatible avec les foncteurs oubli de structure.*

Preuve. a) Soit M une théorie multiéquationnelle. On note M_0 l'ensemble des objets distingués de M et $U_0\colon M^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ le foncteur $\coprod_{X_0\in M_0} \mathrm{Hom}_M(-, X_0)$. Montrons que U_0 a un multiadjoint à gauche. Soit E un ensemble. Pour chaque famille $(X_e)_{e\in E}$ d'éléments de M_0 indexée par E, choisissons un multiproduit $(\gamma_{ej}\colon Y_j \to X_e)_{(e,j)\in E\times J(X_e)}$ de $(X_e)_{e\in E}$ dans M. Pour chaque $j \in J(X_e)$, on définit l'application $g_j\colon E \to U_0 Y_j$ par $g_j(e) = (X_e, \gamma_{ej})$. Posons $K = \coprod_{(X_e)\in M_0^E} J(X_e)$. Montrons que la famille de morphismes $(g_j\colon E \to U_0 Y_j)_{((X_e),j)\in K}$ est universelle pour le foncteur U_0. Soit Y un objet de M. Donner une application $g\colon E \to U_0 Y$ revient à donner une famille $(X_e)_{e\in E}$ d'objets de M_0 et une famille $(f_e\colon Y \to X_e)_{e\in E}$ de morphismes de M; ce qui revient à donner une famille $(X_e)_{e\in E}$, un élément j de $J(X_e)$ et un morphisme $f\colon Y \to Y_j$ vérifiant $f_e = \gamma_{ej} f$ pour tout $e \in E$; c'est-à-dire à donner un couple $((X_e), j) \in K$ et un morphisme $f\colon Y \to Y_j$ vérifiant $(U_0 f) g_j = g$. Ainsi le foncteur U_0 a un multiadjoint à gauche et chaque objet de M est but d'un morphisme appartenant à une famille de morphismes universelle pour U_0. Si on note (S, T) la multimonade sur Ens engendrée par U_0, la catégorie de Kleisli $(\mathrm{Ens}_{/s})_T$ de la monade T est alors équivalente à la catégorie M^{op} ([2] ou [4]).

b) Considérons maintenant une multimonade sur Ens de la forme (S, I). La catégorie de Kleisli de (S, I) est $\mathrm{Ens}_{/s}$. Montrons que $\mathrm{Ens}_{/s}$ est à multisommes. On pose $\boldsymbol{X} = \mathrm{Ens}_{/s}$ et $P = U_s\colon \mathrm{Ens}_{/s} \to \mathrm{Ens}$. Alors P est une fibration discrète à petites fibres. Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de $\boldsymbol{X}$. Notons $(\tau_i\colon PX_i \to E)_{i\in I}$ une somme des ensembles PX_i. Posons $J = \{Y \in \boldsymbol{X}\colon PY = E \text{ et } \forall i \in I,\ \tau_i^*(Y) = X_i\}$. Pour tout $Y \in J$, notons $\gamma_{iY}\colon X_i \to Y$ l'unique morphisme de $\boldsymbol{X}$ vérifiant $P\gamma_{iY} = \tau_i$. Montrons que $(\gamma_{iY}\colon X_i \to Y)_{(i,Y)\in I\times J}$ est une multisomme de $(X_i)_{i\in I}$. Soit $(f_i\colon X_i \to Z)_{i\in I}$ une famille de morphismes de $\boldsymbol{X}$. Il existe un unique morphisme $g\colon E \to PZ$ vérifiant: $\forall i \in I$, $g\tau_i = Uf_i$. L'objet $Y = g^*(Z)$ appartient alors à J et il existe un unique morphisme $f\colon Y \to Z$ vérifiant: $\forall i \in I$, $f\gamma_{iY} = f_i$.

La catégorie duale $\boldsymbol{X}^{\mathrm{op}} = (\mathrm{Ens}_{/s})^{\mathrm{op}}$ dans laquelle on distingue l'ensemble M_0 des objets de la forme $(1, x)$ est alors une théorie multiéquationnelle. Les foncteurs représentables $\boldsymbol{X}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ sont évidemment des multialgèbres. Montrons que, réciproquement, une multialgèbre $F\colon \boldsymbol{X}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est un foncteur représentable. Posons $I = \coprod_{PX=1} FX$ et pour $i = (X, x) \in I$, posons $X_i = X$ et $x_i = x$; alors $x_i \in FX_i$. Soit $(\gamma_{iY}\colon X_i \to Y)_{(i,Y)\in I\times J}$ la multisomme de $(X_i)_{i\in I}$ dans $\boldsymbol{X}$, décrite ci-dessus. Puisque F est une multialgèbre, $\langle (F\gamma_{iY})\rangle\colon \coprod_{Y\in J} FY \to \prod_{i\in I} FX_i$ est bijective. Notons (Y_0, y_0) l'unique élément de $\coprod_{Y\in J} FY$ dont l'image par $\langle (F\gamma_{iY})\rangle$ est $(x_i)_{i\in I}$. Nous allons montrer que (Y_0, y_0) est un couple de représentation pour le foncteur F. Les applications $\alpha_X\colon \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{X}}(X, Y_0) \to FX$ qui à $f\colon X \to Y_0$ associent $Ff(y_0)$ définissent une transformation naturelle $\alpha\colon \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{X}}(-, Y_0) \to F$. Considérons d'abord un objet X de $\boldsymbol{X}$ vérifiant $PX = 1$. Pour un morphisme $f\colon X \to Y_0$, le morphisme $Pf\colon 1 \to I$ détermine un élément $i \in I$. On a alors $f = \gamma_{iY_0}$ et $\alpha_x(f) = \alpha_x(\gamma_{iY_0}) = F\gamma_{iY_0}(y_0) = x_i$. On en déduit que l'application

$$\coprod_{PX=1} \alpha_x\colon \coprod_{PX=1} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{X}}(X, Y_0) \to \coprod_{PX=1} FX,$$

composée des bijections:

$$\coprod_{PX=1} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{X}}(X, Y_0) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(1, PY_0) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(1, I) \simeq I = \coprod_{PX=1} FX,$$

est bijective. Donc, pour tout X vérifiant $PX = 1$, α_x est une bijection. Considérons maintenant, une famille $(X_k)_{k\in K}$ d'objets de $\boldsymbol{X}$ vérifiant $PX_k = 1$ et ayant une multisomme $(\gamma_{kZ}\colon X_k \to Z)_{(k,Z)\in K\times L}$. Le foncteur F étant une multialgèbre, l'application $\prod_{Z\in L} \alpha_Z$ est bijective comme composée de bijections suivantes:

$$\coprod_{Z\in L} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{X}}(Z, Y_0) \simeq \prod_{k\in K} \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{X}}(X_k, Y_0) \simeq \prod_{k\in K} FX_k \simeq \coprod_{Z\in L} FZ.$$

On en déduit que chaque application α_Z est bijective. Si on note que tout objet Z de $\boldsymbol{X}$ appartient à une multisomme d'objets de $\boldsymbol{X}$ au-dessus de 1, on en conclue que α est un isomorphisme.

c) Soit (S, T) une multimonade sur Ens. On note $\boldsymbol{X} = \mathrm{Ens}_{/s}$, $\boldsymbol{X}_T$ la catégorie de Kleisli de T, et $F_T\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}_T$, $U_T\colon \boldsymbol{X}_T \to \boldsymbol{X}$ les foncteurs adjoints associés. Rappelons que le foncteur F_T est l'identité sur les objets. Montrons que la catégorie X_T est à multisommes. Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'objets de X_T, si $(\gamma_{ij}\colon X_i \to Y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une multisomme de $(X_i)_{i\in I}$ dans X, qui existe d'après b), alors $(F_T\gamma_{ij}\colon X_i \to Y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une multisomme de $(X_i)_{i\in I}$ dans X_T puisque l'on a, pour tout objet X de X_T,

$$\coprod_{j\in J}\mathrm{Hom}_{X_T}(Y_j, X)\simeq \coprod_{j\in J}\mathrm{Hom}_X(Y_j, U_TX)\simeq \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_X(X_i, U_TX)\simeq \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{X_T}(X_i, X).$$

La catégorie X_T^{op} dans laquelle on distingue les objets de la forme $(1, x)$ est alors une théorie multiéquationnelle. En outre un foncteur $F\colon X_T^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est une multialgèbre si et seulement si le foncteurs $FF_T^{\mathrm{op}}\colon X^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est une multialgèbre, c'est-à-dire, d'après b) si et seulement si $FF_T^{\mathrm{op}}\colon X^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$ est représentable. Le produit fibré de Linton [2]

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ens}_{/s}^{T} \arrow[r] \arrow[d, "U^T"'] & {[(\mathrm{Ens}_{/s})_T^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]} \arrow[d, "{[F_T^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]}"] \\
\mathrm{Ens}_{/s} \arrow[r] & {[(\mathrm{Ens}_{/s})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ens}]}
\end{tikzcd}$$

implique alors que $\mathrm{Ens}_{/s}^{T}$ est équivalente à la catégorie des foncteurs

$$F\colon ((\mathrm{Ens}_{/s})_T)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ens}$$

qui sont des multialgèbres, c'est-à-dire à $\mathrm{MulAlg}\big(((\mathrm{Ens}_{/s})_T)^{\mathrm{op}}\big)$.

3. La théorie multiéquationnelle des espaces localement compacts. La théorie multiéquationnelle M des espaces localement compacts est une catégorie équivalente à la duale de la catégorie de Kleisli $(\mathrm{Ens}_{/s})_T$ de la multimonade (S, T) sur Ens, engendrée par les espaces localement compacts. D'après [1], elle peut être décrite comme suit.

Les objets de M sont les couples $(I, \mathscr{K})$ formés d'un cardinal I considéré comme ensemble et d'un ensemble $\mathscr{K}$ de parties de I tel que

1) $\varnothing \in \mathscr{K}$,
2) $\forall I' \in \mathscr{K}$, $\forall I'' \subset I'$, $I'' \in \mathscr{K}$,
3) $\forall I' \in \mathscr{K}$, $\forall I'' \in \mathscr{K}$, $I' \cup I'' \in \mathscr{K}$,
4) $\forall i \in I$, $\{i\} \in \mathscr{K}$.

Pour un cardinal fini n, $\mathscr{K}$ est nécessairement l'ensemble des parties de n. On note alors n l'unique objet $(n, \mathscr{K})$. L'objet 1 sera l'objet distingué de M. Les morphismes $(I, \mathscr{K}) \to (J, \mathscr{L})$ sont les familles $(\mathscr{U}_j)_{j\in J}$ d'ultrafiltres sur I rencontrant $\mathscr{K}$ et qui vérifient:

$$\forall J' \subset J (J' \in \mathscr{L} \Leftrightarrow (\forall \mathscr{U} \in \beta(I), (\bigcap_{j\in J'} \mathscr{U}_j \subset \mathscr{U}) \Rightarrow (\mathscr{U} \cap \mathscr{K} \neq \varnothing))).$$

En particulier, un morphisme $(I, \mathscr{K}) \to 1$ est un ultrafiltre sur I qui rencontre $\mathscr{K}$, et il y a n morphismes $n \to 1$. Tout objet $(J, \mathscr{L})$ de M appartient au multiproduit de la famille d'objets $(1)_{j\in J}$, si bien que la catégorie M est, en fait, déterminée par les morphismes $\mathscr{U}\colon (I, \mathscr{K}) \to 1$.

Un espace localement compact E détermine une multialgèbre $E^{(-)}\colon M \to \mathrm{Ens}$ où $E^{(I,\mathscr{K})}$ est l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E dont les sous-familles indexées par les membres de $\mathscr{K}$ sont les sous-familles relativement compactes, c'est-à-dire $E^{(I,\mathscr{K})} = \{(x_i)_{i\in I} \in E^I\colon \forall I' \subset I, I' \in \mathscr{K} \Leftrightarrow \{x_i\}_{i\in I'}$ est relativement compact$\}$. En particulier $E^{(n)} = E^n$ et $E^{(1)} = E$. Pour un morphisme $(\mathscr{U}_j)_{j\in J}\colon (I, \mathscr{K}) \to (J, \mathscr{L})$, l'application $E^{(\mathscr{U}_j)}\colon E^{(I,\mathscr{K})} \to E^{(J,\mathscr{L})}$ est définie par $E^{(\mathscr{U}_j)}((x_i)_{i\in I}) = (\lim_{\mathscr{U}_j} x_i)_{j\in J}$. En particulier, pour un ultrafiltre $\mathscr{U}\colon (I, \mathscr{K}) \to 1$, l'application $E^{(\mathscr{U})}\colon E^{(I,\mathscr{K})} \to E$ est définie par $E^{(\mathscr{U})}(x_i) = \lim_{\mathscr{U}} x_i$. Le fait que le foncteur $E^{(-)}\colon M \to \mathrm{Ens}$ soit une multialgèbre s'exprime par la relation $E^I = \coprod_{\mathscr{K}} E^{(I,\mathscr{K})}$, c'est-à-dire que, pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E, il existe un unique ensemble $\mathscr{K}$ tel que $(x_i) \in E^{(I,\mathscr{K})}$ à savoir $\mathscr{K} = \{I' \subset I\colon \{x_i\}_{i\in I'}$ est relativement compact dans $E\}$. Si E, F sont des espaces localement compacts et $f\colon E \to F$ est une application continue propre, on définit une transformation naturelle $f^{(-)}\colon E^{(-)} \to F^{(-)}$ par $f^{(I,\mathscr{K})}(x_i) = (f(x_i))$.

Réciproquement une multialgèbre $F\colon M \to \mathrm{Ens}$ détermine un espace localement compact $E = F1$ dont la topologie est définie par la fermeture

$$\overline{\{x_i\}}_{i\in I} = \{F\mathscr{U}(x_i) | \mathscr{U}\colon (I, \mathscr{K}) \to 1\}$$

pour toute partie $\{x_i\}_{i\in I}$ de E; et un homomorphisme $t\colon F \to G$ définit une application continue et propre $t_1\colon F1 \to G1$.

4. La théorie multiéquationnelle des ensembles ordonnés complets. D'après [1], la théorie multiéquationnelle M des ensembles ordonnés complets peut être décrite comme suit.

Les objets de M sont les couples $(I, \mathscr{M})$ formés d'un cardinal I et d'un ensemble $\mathscr{M}$ de parties de I tel que

1) $\varnothing \notin \mathscr{M}$,
2) $\forall I' \in \mathscr{M}$, $\forall I'' \subset I$ $(\varnothing \neq I'' \subset I' \Rightarrow I'' \in \mathscr{M})$,
3) $\forall i \in I$, $\{i\} \in \mathscr{M}$.

Pour le cardinal 1, $\mathscr{M}$ est nécessairement l'ensemble $\{1\}$. L'objet $(1, \mathscr{M})$ est noté 1. C'est l'objet distingué de M. Les morphismes $(I, \mathscr{M}) \to (J, \mathscr{N})$ sont les familles $(I_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathscr{M}$ telles que: $\forall J' \subset J$ $(J' \in \mathscr{N} \Leftrightarrow \bigcup_{j\in J'} I_j \in \mathscr{M})$. En particulier un morphisme $(I, \mathscr{M}) \to 1$ est un membre de $\mathscr{M}$. Tout objet $(I, \mathscr{M})$ de M appartient au multiproduit de la famille d'objets $(1_i)_{i\in I}$ si bien que la catégorie M est, en fait, déterminée par les morphismes $I'\colon (I, \mathscr{M}) \to 1$.

Un ensemble ordonné complet E détermine une multialgèbre $E^{(\ )}\colon M \to \mathrm{Ens}$ où $E^{(I,\mathscr{M})}$ est l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E dont les sous-familles majorées non vides sont exactement celles qui sont indexées par les membres de $\mathscr{M}$, c'est-à-dire $E^{(I,\mathscr{M})} = \{(x_i)_{i\in I} \in E^I\colon \forall I' \subset I,\ (I' \in \mathscr{M}) \Leftrightarrow (x_i)_{i\in I'}$ est majoré non vide$\}$. Pour un morphisme $(I_j)\colon (I, \mathscr{M}) \to (J, \mathscr{N})$, l'application $E^{(I_j)}$ est définie par $E^{(I_j)}(x_i) = (\sup_{i\in I_j} x_i)_{j\in J}$. En particulier pour un morphisme $I'\colon (I, \mathscr{M}) \to 1$ l'application $E^{(I')}\colon E^{(I,\mathscr{M})} \to E$ est définie par $E^{(I')}(x_i) = \sup_{i\in I'} x_i$. Le fait que le foncteur $E^{(\ )}$ soit une multialgèbre s'exprime par la relation $E^I = \coprod_{\mathscr{M}} E^{(I,\mathscr{M})}$, c'est-à-dire que, pour toute famille $(x_i) \in E^I$, il existe un unique $\mathscr{M}$ tel que $(x_i) \in E^{(I,\mathscr{M})}$, à savoir $\mathscr{M} = \{I' \subset I\colon I' \neq \emptyset$ et $(x_i)_{i\in I'}$ majoré$\}$. Si E, F sont ordonnés complets, une application sup-continue propre $f\colon E \to F$ détermine une transformation naturelle $f^{(\ )}\colon E^{(\ )} \to F^{(\ )}$ définie par $f^{(I,J)}(x_i) = (f(x_i))$. Réciproquement une multialgèbre $F\colon M \to$ Ens détermine un ensemble ordonné complet $E = F1$ dont l'ordre est défini de la façon suivante: on considère le cardinal $2 = \{0, 1\}$, l'ensemble $\mathscr{M}_0 = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ de parties de 2, l'objet $(2, \mathscr{M}_0)$ de M et le morphisme $\sigma = \{0, 1\}\colon (2, \mathscr{M}_0) \to 1$. On définit alors $x \leqslant y$ par: $(x, y) \in F(2, \mathscr{M}_0)$ et $F(\sigma(x, y)) = y$. En outre, une transformation naturelle $t\colon F \to G$ entre deux multialgèbres définit une application sup-continue propre $t_1\colon F1 \to G1$.

Bibliographie

[0] Y. Diers, *Familles Universelles de Morphismes*, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 93 (3) (1979), pp. 175–195.

[1] — *Multimonads and Multimonadic Categories*, Journal of Pure and Applied Algebra 17 (1980), pp. 153–170.

[2] F. E. J. Linton, *An outline of Functorial Semantics*, Lecture Notes in Math. Vol. 80, Springer, 1969, pp. 7–52.

[3] — *Some aspects of Equational Categories*, Proceedings of the Conference on Categorical Algebra, La Jolla, pp. 84–95, Springer, 1966.

[4] H. Schubert, *Categories*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1972.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
U. E. R. DE SCIENCES
UNIVERSITÉ DE VALENCIENNES

Accepté par la Rédaction le 18. 2. 1980

Classical hierarchies from a modern standpoint

Part I. *C*-sets

by

John P. Burgess* (Princeton, N. J.)

Abstract. The C-sets form the smallest family of sets of reals containing the open sets and stable under complementation and operation $\mathscr{A}$. The theory of C-sets is surveyed, and a new selection result proved: A G_δ-valued, C-measurable multifunction whose graph is a C-set admits a C-measurable selector.

Chapter A. Introduction

§ 1. Motivation. Scattered through the literature of measure theory, general topology, logic, and probability are several definitions of families of sets of reals properly including the Borel sets and provably included in the Lebesgue measurable sets. Their interest derives from two circumstances: On the one hand, in certain situations in everyday mathematical practice, particularly in connection with selection problems of the sort surveyed in [20], non-Borel sets arise naturally. On the other hand, for ordinary mathematical purposes nonmeasurable sets are worthless, and many working mathematicians would even rather avoid sets whose measurability can only be established using, say, Martin's Axiom or large cardinals.

As we go beyond the Borel, the first natural stopping place is Selivanovski's [15] family of *ensembles criblés* or *C-sets*, the smallest family containing the open sets and stable under complementation and what is called *Suslin's operation* or *operation* $\mathscr{A}$. The most basic properties of C-sets can be derived from theorems in the classical text [9]: The C-sets form a σ-field containing the analytic sets (continuous images of Borel sets) and stable under inverse image by C-measurable functions and containing only Lebesgue measurable sets. Together with a celebrated theorem on the uniformization of analytic sets due to Yankov/von Neumann (v. § 8 below), these properties suffice for many applications, e.g. the following (cf. [20, § 9] for finer results of Brown & Purves et al.):

Let $f\colon R^2 \to [0, 1]$ be a Borel function, and suppose that for each x the function $f(x, \cdot)$ achieves its infimum, which we denote $f^*(x)$. For many purposes it would

* Research partially supported by U. S. National Science Foundation grant MCS-77-03590.